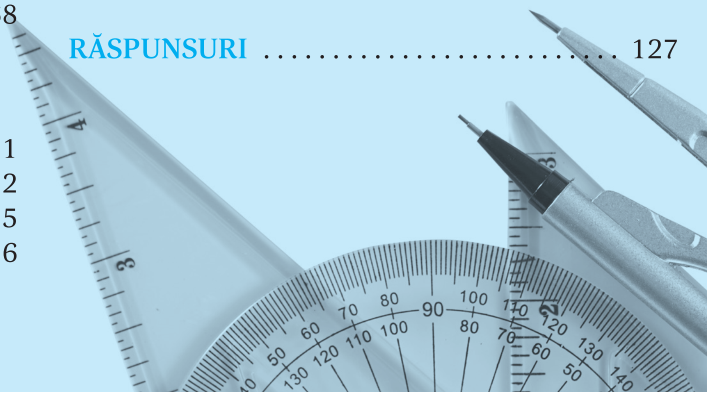
CUPRINS



PATRULATERUL 4

Patrulaterul convex. Paralelogramul

SĂ NE AMINTIM!

❖ Despre două vârfuri ale patrulaterului care determină o latură sau despre unghiurile corespunzătoare lor spunem că sunt *consecutive* sau *alăturate*.

❖ Despre două vârfuri ale patrulaterului care nu determină o latură sau despre unghiurile corespunzătoare lor spunem că sunt *opuse*.

❖ Segmentele determinate de două vârfuri opuse ale patrulaterului se numesc *diagonale*.

❖ Despre două laturi ale patrulaterului care au un capăt comun spunem că sunt *consecutive* sau *alăturate*.

❖ Despre două laturi ale patrulaterului care nu au puncte comune spunem că sunt *opuse*.

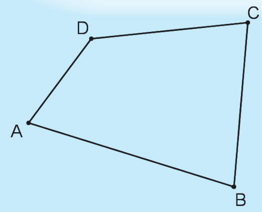
❖ Un patrulater se numește *convex* dacă, oricare ar fi o latură a sa, vârfurile nesituate pe aceasta sunt de aceeași parte a dreptei suport a laturii.

❖ Un patrulater care nu este convex se numește *concav*.

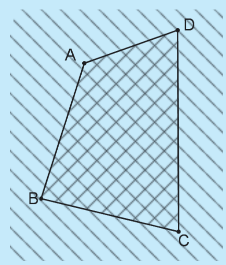
❖ Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360°.

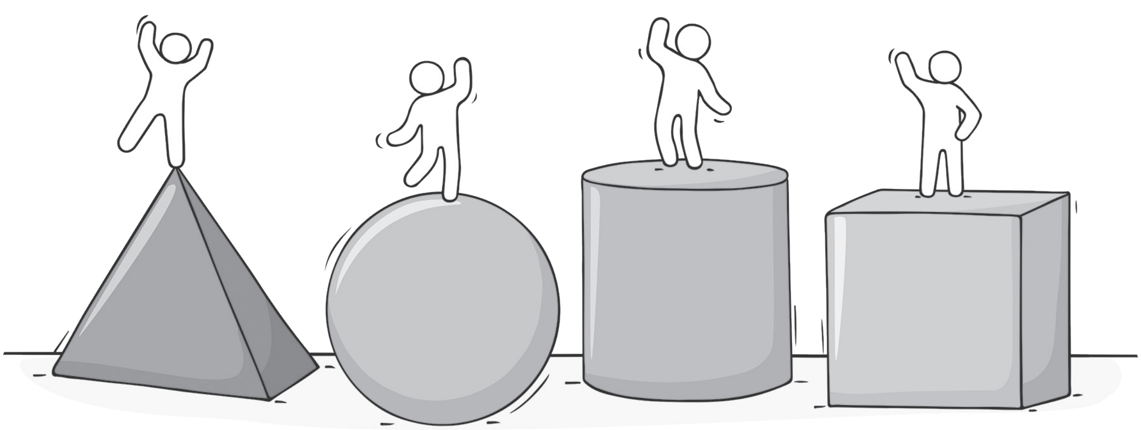
❖ *Interiorul* unui patrulater convex este format din punctele aflate în interiorul fiecărui unghi al patrulaterului – porțiunea dublu hașurată – și se notează Int $ABCD$.

❖ *Exteriorul* patrulaterului este format din punctele care nu se află nici pe laturi și nici în interiorul patrulaterului – porțiunea simplu hașurată – și se notează Ext $ABCD$.



Elementele patrulaterului $ABCD$	
vârfuri	punctele A, B, C și D
unghiuri	$\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$ sau $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle CDA$
laturi	segmentele AB, BC, CD și DA



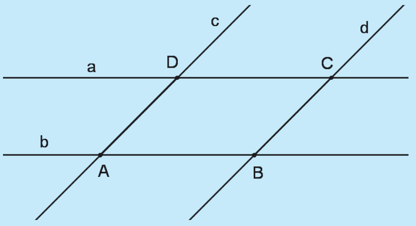


SĂ NE AMINTIM!

Paralelogramul

❖ Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două se numește *paralelogram*. $ABCD$ este paralelogram dacă $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$.

❖ Într-un paralelogram:
a) unghiurile consecutive sunt suplementare;
b) unghiurile opuse sunt congruente.



❖ Dacă un patrulater convex are:
a) oricare două unghiuri consecutive suplementare **sau**
b) unghiurile opuse congruente două câte două,
atunci el este paralelogram.

❖ Într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente.

❖ Dacă un patrulater convex are laturile opuse congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram.

❖ Un patrulater convex în care două laturi opuse sunt paralele și congruente este paralelogram.

❖ Într-un paralelogram, punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecărei diagonale.

❖ Dacă într-un patrulater convex punctul de intersecție al diagonalelor reprezintă mijlocul fiecărei diagonale, atunci patrulaterul este paralelogram.

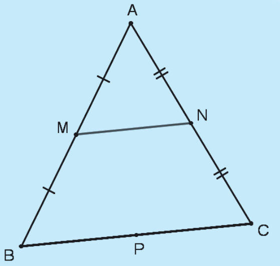
SĂ NE AMINTIM!

Linia mijlocie și centrul de greutate

❖ Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește *linie mijlocie în triunghi*.

❖ **TEOREMA LINIEI MIJLOCII ÎN TRIUNGHI**

✓ În orice triunghi, linia mijlocie determinată de mijloacele a două laturi este paralelă cu a treia latură și are lungimea jumătate din lungimea acesteia.



ΔABC, $M \in AB$, $N \in AC$, MN linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel BC$ și $MN = \frac{BC}{2}$.

Observații.

✓ Un triunghi are trei linii mijlocii.

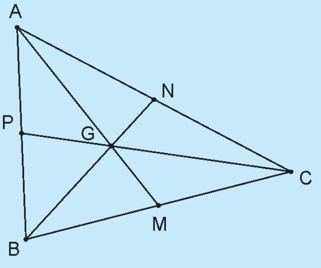
✓ Triunghiul determinat de cele trei linii mijlocii se numește *triunghi median* al triunghiului dat.

❖ **RECIPROCA TEOREMEI LINIEI MIJLOCII ÎN TRIUNGHI**

✓ Paralela dusă prin mijlocul unei laturi a unui triunghi la o latură a triunghiului intersectează a treia latură a triunghiului în mijlocul acesteia.

❖ **TEOREMA REFERITOARE LA CENTRUL DE GREUTATE AL UNUI TRIUNGHI**

✓ Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de intersecție este situat, pe fiecare dintre mediane, la două treimi față de vârf și o treime față de latura opusă vârfului.



ΔABC: AM, BN, CP mediane $\Rightarrow AM \cap BN \cap CP = \{G\}$,

$GM = \frac{1}{3}AM$, $GA = \frac{2}{3}AM$ și relațiile echivalente pentru celelalte mediane.

EXERSAȚI

1. Desenați triunghiul echilateral ABC și triunghiul dreptunghic isoscel DBC, $\sphericalangle D = 90°$, astfel încât punctele A și D să fie de aceeași parte a dreptei BC. Este patrulaterul $ABCD$ convex? Dar dacă punctele A și D sunt de o parte și de cealaltă a dreptei BC?

2. În patrulaterul convex $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 70°$ și $\sphericalangle C = 100°$. Determinați măsurile celorlalte două unghiuri ale patrulaterului.

3. Desenați un patrulater convex $ABCD$ astfel încât triunghiul ABD să fie echilateral, iar triunghiul BCD să fie dreptunghic isocel cu ipotenuza BD. Calculați măsurile unghiurilor sale.

4. Referitor la un patrulater convex $ABCD$, determinați măsurile unghiurilor necunoscute în fiecare dintre următoarele situații:

a) $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle C = 100°$ și $\sphericalangle D = 80°$; b) $\sphericalangle A = 50°$ și $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle A$.

5. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt, în ordinea vârfurilor, direct proporționale cu numerele 4, 5, 7 și 8.

6. Trei dintre unghiurile unui patrulater convex sunt congruente, iar suma măsurilor a două dintre cele patru unghiuri ale patrulaterului este 150°. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.

7. În patrulaterul $ABCD$ măsurile unghiurilor A, B și C sunt direct proporționale cu numerele 3, 5 și 6, iar al patrulea unghi are măsura de 108°. Demonstrați că patrulaterul are două unghiuri congruente.

8. Determinați măsura unui unghi al unui patrulater, știind că aceasta este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri.

9. În patrulaterul $MNPR$ măsura unghiului M este cu 20° mai mică decât măsura unghiului N, cu 10° mai mare decât măsura unghiului P și jumătate din măsura unghiului R. Determinați măsurile unghiurilor.

10. În patrulaterul convex $ABCD$ unghiurile A și C sunt congruente și ambele au măsura de 100°, iar lungimea laturii AB este mai mare decât lungimea laturii BC. Bisectoarea unghiului B intersectează latura CD în punctul E.

a) Exprimați măsura unghiului D în funcție de măsura unghiului B.
b) Exprimați măsura unghiului BEC în funcție de măsura unghiului B.
c) Demonstrați că bisectoarea DF a unghiului ADC este paralelă cu BE.

11. Desenați paralelogramul $ABCD$ în fiecare dintre următoarele situații:

a) $AB = 6$ cm, $\sphericalangle B = 115°$ și $BC = 4$ cm;
b) $AB = 5$ cm, $\sphericalangle A = 50°$ și $BC = 3$ cm;
c) $AD = 5{,}5$ cm, $AB = 7$ cm și $AC = 10$ cm;
d) $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm și $\sphericalangle AOB = 120°$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

34. În triunghiul ABC, punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Demonstrați că:
a) patrulaterul $AMPN$ este paralelogram;
b) punctele B, N și mijlocul segmentului MP sunt coliniare.

35. Un triunghi isoscel are două dintre laturi cu lungimile de 8 cm și 10 cm. Calculați perimetrul triunghiului format din liniile mijlocii ale triunghiului.

36. În triunghiul echilateral DEF punctele A, B și C sunt mijloacele laturilor DE, EF, respectiv DF.
a) Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.
b) Calculați perimetrul triunghiului DEF, știind că $P_{\Delta ABC} = 24$ cm.
c) Dacă $DA = 5$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

37. Demonstrați că mijloacele laturilor unui patrulater convex sunt vârfurile unui paralelogram.

38. Considerăm triunghiul ABC și mediana CM, $M \in AB$. Paralela prin B la CM intersectează dreapta AC în punctul D, iar paralela prin A la CM intersectează dreapta BC în punctul E. Demonstrați că:
a) $AE = 2CM$; b) $ABDE$ este paralelogram.

39. Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele M, N, P și R mijloacele segmentelor AB, BC, CO, respectiv OA, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstrați că patrulaterele $OMNC$, $MNPR$ și $BPDR$ sunt paralelograme.

40. În triunghiul ABC, punctul G este centrul de greutate al triunghiului.
a) Dacă $AG = 8$ cm, calculați lungimea medianei din A a triunghiului.
b) Dacă lungimea medianei din B a triunghiului este de 12 cm, iar M este mijlocul laturii AC, calculați lungimea segmentului GM.
c) Dacă suma lungimilor medianelor triunghiului este 18 cm, calculați suma distanțelor de la G la vârfurile triunghiului.

41. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, punctul G este centrul de greutate, iar M este mijlocul ipotenuzei BC.
a) Dacă $BC = 18$ cm, calculați AG. b) Dacă $GM = 5$ cm, calculați BC.

42. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, punctul M este mijlocul laturii BC, iar N este mijlocul segmentului BM. Paralela prin N la AM intersectează AB în punctul P.
a) Demonstrați că P este mijlocul segmentului AB.
b) Dacă $AM \cap CP = \{G\}$ și $AG = 8$ cm, calculați BC și NP.

43. În triunghiul ABC se consideră un punct oarecare M pe latura BC. Demonstrați că mijloacele segmentelor AB, AM și AC sunt coliniare.

44. Considerăm trei puncte coliniare A, B și C, în această ordine, astfel încât $AB = 4$ cm și $BC = 5$ cm, și un punct O exterior dreptei AB. Punctele M, N și P sunt simetricele punctului O față de punctele A, B, respectiv C. Demonstrați că:
a) $MN \parallel AB$; b) $NP = 10$ cm; c) punctele M, N și P sunt coliniare.

45. În triunghiul ABC, $BC = 24$ cm, punctele D și E sunt mijloacele laturilor AB și AC. Punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor DB, DC, respectiv EC.
a) Demonstrați că patrulaterul $DMNE$ este paralelogram.
b) Demonstrați că punctele M, N și P sunt coliniare.
c) Calculați lungimea segmentului MP.

PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ

1. În triunghiul ABC considerăm medianele AM, $M \in BC$ și BN, $N \in AC$. Prelungim segmentul AM cu un segment $MD \equiv AM$ și segmentul BN cu segmentul $NE \equiv BN$. Demonstrați că:

a) patrulaterul $ABDC$ este paralelogram; b) punctele D, C și E sunt coliniare; c) $DE = 2 \cdot AB$.

2. Considerăm triunghiul ABC, $AB \neq AC$ și mediana AM, $M \in BC$. Construim $BD \perp AM$, $D \in AM$ și $CE \perp AM$, $E \in AM$. Demonstrați că:

a) $DM \equiv ME$; b) $BE \parallel CD$.

3. Considerăm punctele coliniare A, B și C, în această ordine, și un punct O exterior dreptei AB. Construim M, N și P, simetricele punctelor A, B și C față de punctul O. Demonstrați că:

a) $MN \parallel AB$; b) punctele M, N și P sunt coliniare.

4. În triunghiul ABC notăm cu M și N mijloacele laturilor AC și AB. Punctul O este un punct oarecare situat în interiorul triunghiului, iar D și E sunt simetricele acestuia față de M, respectiv N. Demonstrați că:

a) $AOCD$ este paralelogram; b) $EB \parallel DC$; c) $ED \parallel BC$ și $ED \equiv BC$.

5. Punctele A, B și C sunt coliniare și $AB \equiv BC$. De o parte și de alta a dreptei AB construim paralelogramele $ABMN$ și $BCPR$. Demonstrați că:

a) $MN \parallel PR$;

b) mijlocul segmentului MR aparține dreptei NP.

6. În triunghiul ABC considerăm medianele AD, $D \in BC$ și BE, $E \in AC$. Paralela prin D la BE intersectează latura AC în F.

a) Demonstrați că $CF = \frac{1}{4}AC$.

b) Construim și paralela prin E la AD, care intersectează DF în G și DC în H.

i. Dacă $BE = 12$ cm, calculați DG. ii. Dacă $AB = 20$ cm, calculați FH.

7. În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, considerăm medianele BD, $D \in AC$ și CE, $E \in AB$ și punctul lor de intersecție, notat cu G. Punctul F este mijlocul segmentului BG.

a) Demonstrați că $AG \perp BC$.

b) Demonstrați că $EF \perp BC$.

c) Notăm cu H intersecția dreptelor EF și BC.

i. Demonstrați că $BH = \frac{1}{3}CH$.

ii. Calculați lungimea segmentului FH, știind că lungimea medianei din A a triunghiului ABC este egală cu 18 cm.

8. În triunghiul ABC medianele AM, $M \in BC$ și BN, $N \in AC$ se intersectează în punctul G. Notăm cu D și E simetricele punctului G față de punctele M și N. Demonstrați că patrulaterul $ABDE$ este paralelogram.

9. În triunghiul ABC punctul M este mijlocul laturii AB, iar punctele N și P sunt situate pe latura BC astfel încât $BN = NP = PC$.

a) Demonstrați că $MN \parallel AP$.

b) Dacă $CM \cap AP = \{R\}$, demonstrați că:

i. R este mijlocul segmentului CM; ii. $AR = 3PR$.

10. Considerăm patrulaterul convex $ABCD$ și punctele E, F și G mijloacele segmentelor AC, BD, respectiv BC.

a) Demonstrați că $EG = AB:2$. b) Demonstrați că, dacă $EF \parallel CD$, atunci $AB \parallel CD$.

TESTE

TEST 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Scrieți numai rezultatele.

1. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este ... .

2. Dacă M și N sunt mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC, iar $BC = 10$ cm, atunci MN are lungimea egală cu ... .

3. Dacă $AD = 12$ cm este mediană a triunghiului ABC, iar punctul G este centrul de greutate al triunghiului, atunci AG are lungimea egală cu ... .

4. Dacă, într-un paralelogram $ABCD$, măsura unghiului A este egală cu $45°$, atunci măsura unghiului B este egală cu ... .

5. Un paralelogram $MNPQ$ are $MN = 10$ cm și $NP = 7$ cm. Perimetrul paralelogramului $MNPQ$ este de .... cm.

6. Patrulaterul convex cu două laturi paralele și congruente este ... .

SUBIECTUL AL II-LEA (30 de puncte).

Alegeți răspunsul corect.

1. Patrulaterul cu intersecția diagonalelor în interiorul figurii se numește:

   a) convex; b) concav; c) paralelogram; d) pătrat.

2. Dacă paralelogramul $ABCD$ are măsura unghiului B egală cu $112°$, atunci măsura unghiului C este egală cu:

   a) $48°$; b) $58°$; c) $68°$; d) $78°$.

3. Perimetrul patrulaterului cu lungimile laturilor de 4 cm, 6 cm, 9 cm și 12 cm este:

   a) 27 cm; b) 30 cm; c) 31 cm; d) 75 cm.

4. Dacă lungimile laturilor unui triunghi sunt 10 cm, 12 cm și 16 cm, atunci perimetrul triunghiului format din cele trei linii mijlocii ale triunghiului dat este egal cu:

   a) 9 cm; b) 19 cm; c) 20 cm; d) 38 cm.

5. În paralelogramul $ABCD$ punctul O este punctul de intersecție al diagonalelor. Dacă $AC = 28$ cm, atunci lungimea segmentului AO este egală cu:

   a) 7 cm; b) 14 cm; c) 21 cm; d) 28 cm.

6. În triunghiul ABC, știm că $AB = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Dacă M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC, atunci perimetrul patrulaterului $MNPB$ este egal cu:

   a) 11 cm; b) 20 cm; c) 22 cm; d) 30 cm.

SUBIECTUL AL III-LEA (30 de puncte)

Scrieți rezolvările complete.

1. Unghiurile A, B, C și D ale unui patrulater $ABCD$ sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, 4, respectiv 6.

a) Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

b) Arătați că $AB \parallel CD$. Este patrulaterul $ABCD$ paralelogram?

2. Pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M și N astfel încât $AM \equiv CN$. Arătați că:

a) $MBND$ este paralelogram;

b) $\Delta AMD \equiv \Delta CNB$.

3. Fie $MNPQ$ un paralelogram cu intersecția diagonalelor punctul O. Dacă A, B, C și D sunt mijloacele segmentelor OM, ON, OP, respectiv OQ, arătați că:

a) $AB \parallel PQ$;

b) $ABCD$ este paralelogram.

TEST 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Alegeți răspunsul corect.

1. Perimetrul unui paralelogram este de 48 cm, iar una dintre laturi are lungimea de 6 cm. Lungimea celeilalte laturi este de:

a) 16 cm; b) 18 cm; c) 24 cm; d) 42 cm.

2. În paralelogramul $ABCD$, $AB \perp BD$, $\sphericalangle A = 60°$ și $AD = 8$ cm. Perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu:

a) 16 cm; b) 18 cm; c) 24 cm; d) 32 cm.

3. Într-un paralelogram, diagonalele:

a) sunt paralele; b) sunt congruente; c) au același mijloc; d) sunt identice.

4. În paralelogramul $DEFG$, $\sphericalangle D = 4 \cdot \sphericalangle E$. Atunci măsura unghiului F este egală cu:

a) 36°; b) 45°; c) 144°; d) 135°.

5. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este de 50 cm. Dacă perimetrul ΔABD este de 30 cm, atunci lungimea diagonalei BD este egală cu:

a) 5 cm; b) 10 cm; c) 20 cm; d) 25 cm.

6. În triunghiul ABC punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Dacă ΔCNP este echilateral, de latură 6 cm, atunci perimetrul patrulaterului $MNPB$ este egal cu:

a) 12 cm; b) 18 cm; c) 24 cm; d) 30 cm.