BAC

Carmen Delcea • Valentina Ionescu
Luminița Petrișan • Laura Eugenia Tănase

MATEMATICĂ M2

- TEORIE
- APLICAȚII
- TESTE DE ANTRENAMENT
- REZOLVĂRI

Conform modelelor stabilite de MEC



CORINT EDUCAȚIONAL

Cuvânt-înainte

„Învățând matematică, înveți să gândești."
Grigore Moisil

Examenul de Bacalaureat reprezintă un moment de bilanț, care încununează eforturile depuse de fiecare elev pe parcursul celor patru ani de liceu și care deschide porțile către viitorul academic sau profesional. În cadrul acestui examen, *Matematica* este disciplina care testează gândirea logică, puterea de analiză și sinteză, precum și capacitatea de structurare a informațiilor.

Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei, fiind concepută ca un material de lucru esențial și accesibil. Cartea se adresează în primul rând elevilor, reprezentând un instrument util în sistematizarea noțiunilor teoretice și promovând învățarea autodidactă. Conținutul lucrării, special calibrat pentru elevii care susțin examenul maturității, acoperă integral tematica programelor oficiale pentru profilurile *Tehnologic* și *Științe ale naturii*.

Structura cărții cuprinde o primă parte cu elemente de teorie și probleme propuse, defalcate pe ani de studiu. Breviarul teoretic nu își propune să fie un tratat matematic exhaustiv, ci este structurat astfel încât elevul să identifice rapid definiția, formula sau teorema necesară, nemaifiind nevoit să caute printre zeci de pagini de demonstrații. Majoritatea problemelor propuse, care însoțesc partea teoretică, respectă riguros stilul de formulare din variantele de Bacalaureat extrase în sesiunile din anii precedenți.

În a doua parte, lucrarea conține teste de antrenament elaborate după modelul oficial, iar secțiunea finală oferă soluții detaliate și comentarii metodice atât pentru problemele propuse, cât și pentru teste. Acolo unde a fost posibil, au fost prezentate mai multe metode de rezolvare a aceleiași cerințe. În locul percepției rigide de tipul „*Trebuie să faci așa și numai așa!*", am urmărit să promovăm o abordare flexibilă: „*Ai putea să procedezi așa sau altfel, în funcție de preferințe*", pentru că matematica este în mare măsură nealgoritmică, solicitând pe alocuri și creativitate.

Culegerea poate fi utilizată și pentru pregătirea curentă, permițând elevilor să se antreneze din timp, pentru că un rezultat bun se obține doar prin studiu sistematic. Profesorii pot folosi conținutul lucrării pentru a selecta aplicații destinate activității la clasă, pentru evaluările sumative și pentru orele dedicate pregătirii suplimentare.

CLASA A IX-A

Repere teoretice

Mulțimi de numere

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ....\}$ – mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$ – mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ – mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor iraționale

Orice număr irațional se poate scrie ca o fracție zecimală infinită și neperiodică.

Modulul unui număr real

Definiție: $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$ sau $|x| = \max(x; -x)$

Proprietăți:

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ \forall x \in \mathbb{R}$ și $\forall y \in \mathbb{R}^*$

5. $|x| \leq m \Leftrightarrow x \in [-m; m], \forall m > 0$

6. $|x| \geq m \Leftrightarrow x \in (-\infty; -m] \cup [m; +\infty), \forall m > 0$

Aplicații

1. Calculați: $\sqrt{5} \cdot (6\sqrt{6} : 3\sqrt{3} - 3\sqrt{8} + 5\sqrt{2})$.

2. Calculați: $\left(\frac{12}{2-\sqrt{7}} + \frac{18}{4+\sqrt{7}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7}}$.

3. Calculați: $\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)\right]$.

4. Arătați că m este un număr natural, unde $m = 2 \cdot (15 - 3 \cdot 5) + (3 \cdot 5 - 7) : 4$.

5. Câte elemente are mulțimea $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{11}\right) \cap \mathbb{Z}$?

6. Fie $a = \frac{1}{5} : \sqrt{0{,}04} - \frac{\sqrt{192}}{6} + \frac{\sqrt{27}}{9}$ și $b = 1{,}4 \cdot \sqrt{3} - \frac{\sqrt{12}}{5} + \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}}$. Arătați că $|a| - |b| \in \mathbb{Z}$.

7. Arătați că $4 \cdot (2{,}1 - 0{,}3) - 3{,}2 = 4$.

8. Pentru $a = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$, calculați $|2 \cdot a + 3| + |5 - 2 \cdot a|$.

9. Arătați că $\sqrt{(5-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 4$.

10. Rezolvați ecuația: $|3 \cdot x - 2| = 9$.

CLASA A X-A

Repere teoretice

Radicali. Funcția radical

Radicali de ordinul 2

Definiție. Fie $a \geq 0$. Numărul real $x \geq 0$ pentru care $x^2 = a$ se numește rădăcina pătrată a lui a și se notează $\sqrt{a}$.

Proprietăți:

1. $\sqrt{x^2} = |x|\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

2. $(\sqrt{x})^2 = x,\ \forall x \geq 0$

3. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy},\quad \forall x, y \geq 0$

4. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}},\ x \geq 0, y > 0$

5. $\sqrt{x^2 y} = |x|\ \sqrt{y},\ x \in \mathbb{R}, y \geq 0$

6. $x\sqrt{y} = \sqrt{x^2 y},\ x, y \geq 0$

Radicali de ordinul 3

Definiție. Numărul real x pentru care $x^3 = a$ se numește rădăcina cubică a lui a și se notează $\sqrt[3]{a}$.

Proprietăți: Fie $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\sqrt[3]{x^3} = x$

2. $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$

3. $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$

4. $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}},\ y \neq 0$

5. $\sqrt[3]{x^3 y} = x\sqrt[3]{y}$ (scoaterea factorului de sub radical)

6. $x\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3 y}$ (introducerea unui factor sub radical)

Radicali de ordinul n

Fie $a \in \mathbb{R}$

- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, dacă n este par — ***Exemplu:*** $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, dacă n este impar — ***Exemplu:*** $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

Proprietăți: Fie $x, y \geq 0$ și $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

2. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}},\quad y \neq 0$

3. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ — ***Exemplu:*** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{4}$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ — ***Exemplu:*** $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

5. $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ — ***Exemplu:*** $\sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2$

6. $\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x\sqrt[n]{y}$ — ***Exemplu:*** $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

7. $x\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n y}$ — ***Exemplu:*** $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$

8. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[kn]{x^k}$ — ***Exemplu:*** $\sqrt{3} = \sqrt[2\cdot 2]{3^2} = \sqrt[4]{9}$

Funcția radical

Definiție: Funcția $f:D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ se numește funcție radical, unde
$\begin{cases} D = [0, \infty), \text{ dacă } n \text{ par} \\ D = \mathbb{R}, \text{ dacă } n \text{ impar} \end{cases}$.

Definiție: Funcția $f:[0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \sqrt{x}$ se numește funcție radical de ordinul doi.

Definiție: Funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x}$ se numește funcție radical de ordinul 3.

Observație: Funcția radical este strict crescătoare și injectivă.

Ecuații iraționale

Metoda de rezolvare:

1. Se stabilesc condițiile de existență.
2. Se izolează radicalul.
3. Se ridică la putere.
4. Se rezolvă ecuația obținută.
5. Se verifică soluțiile.

Aplicații

1. Calculați: **a)** $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$; **b)** $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$.
2. Aduceți la o formă mai simplă expresia: $E = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)^3$.
3. Rezolvați ecuațiile: **a)** $\sqrt{2x+3} = 7$; **b)** $\sqrt{x+2} = x$.
4. Rezolvați ecuația: $\sqrt[3]{9x-1} = 2$.
5. Rezolvați ecuațiile: **a)** $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5$; **b)** $\sqrt{2x+1} + 1 = x$.
6. Rezolvați ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} = x$.
7. Rezolvați ecuația $(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.
8. Rezolvați ecuația $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-1}$.
9. Rezolvați ecuațiile: **a)** $\sqrt{x^2 + 9x} = x + 4$; **b)** $\sqrt{2x^2 + 1} - x = 1$.
10. Rezolvați ecuațiile: **a)** $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2$; **b)** $\sqrt{x + \sqrt{x-1}} = \sqrt{3}$.
11. Arătați că $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \in \mathbb{N}$.

Repere teoretice

Puteri. Funcția exponențială. Ecuații exponențiale

Pentru $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$; $a^0 = 1$ pentru $a \in \mathbb{R}^*$

Proprietăți: Fie $a, b > 0,\ m, n \in \mathbb{R}$.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$
8. Dacă $a > 1$ și $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $a^m \leq a^n \Leftrightarrow m \leq n$.
9. Dacă $0 < a < 1$ și $m, n \in \mathbb{R}$, atunci $a^m \leq a^n \Leftrightarrow m \geq n$.

CLASA A XI-A

Repere teoretice

Matrice

Definiție: Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe. Notăm $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ și $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ mulțimile primelor m, respectiv n numere naturale.

O funcție $f: M \times N \to \mathbb{C}, f((i,j)) = a_{ij} \in \mathbb{C}, i \in M, j \in N$ se numește matrice de tipul (m,n). Funcția $f((i,j))$ se poate prezenta sub forma unui tablou cu m linii si n coloane astfel:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – matrice cu m linii și n coloane; $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $M_{m,n}(\mathbb{C})$ reprezintă mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu elemente din $\mathbb{C}$.

Definiție: Două matrice $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ sunt egale, și scriem $A = B$, dacă $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall\, i \in M$ și $j \in N$.

Definiție: A^t reprezintă transpusa lui A și se obține din A prin schimbarea liniilor în coloane (sau a coloanelor în linii).

Observație: Dacă $m = n$, atunci matricea se numește pătratică de ordinul n și are forma

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $A \in M_n(\mathbb{C})$.

$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ reprezintă urma matricei A.

Sistemul ordonat de elemente $\left(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\right)$ se numește diagonala principală a matricei A, iar sistemul ordonat de elemente $\left(a_{1n}, \cdots, a_{n1}\right)$ se numește diagonala secundară a matricei A.

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$ este matricea unitate de ordinul n; $O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$ este matricea nulă de tipul (m, n).

Operații cu matrice

I. Adunarea matricelor

Definiție: Fie $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$. Prin suma (adunarea) matricelor A și B înțelegem matricea C, notată $C = A + B$, de forma $C = \left(c_{ij}\right)$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Proprietăți ale operației de adunare:

1. $A + B = B + A, \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ (comutativitate)
2. $(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ (asociativitate)
3. $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ (element neutru)
4. $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ \exists(-A) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ a.î. $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$.

II. Înmulțirea matricelor cu scalari

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice de tipul (m, n) cu elemente numere complexe. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ un număr complex.

Definiție: Se numește produsul dintre numărul α și matricea A matricea notată $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$.

Proprietăți ale înmulțirii matricelor cu scalari:

1. $(a + b)A = aA + bA, \forall\, a, b \in \mathbb{C}$ și $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$
2. $a(A + B) = aA + aB,\ \forall\, a \in \mathbb{C}$ și $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$
3. $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A,\ \forall\, a, b \in \mathbb{C}$ și $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$
4. $1 \cdot A = A,\ \forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

III. Înmulțirea matricelor:

Definiție: Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C}), B = (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,p}}}$. Se numește produsul matricelor A și B, matricea notată $A \cdot B = (c_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}}$, unde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},\ \forall\, i = \overline{1,m}$ și $k = \overline{1,p}$.

Proprietățile înmulțirii matricelor:

1. $(AB)C = A(BC), A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{n,p}(\mathbb{C}), C \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ (asociativitate)
2. **a)** $A(B + C) = AB + AC, A \in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ B, C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ (distributivitatea înmulțirii față de adunare – la stânga)
   b) $(B + C)A = BA + CA, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C}), A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ (distributivitatea înmulțirii față de adunare – la dreapta)
3. $AI_n = I_n A = A,\ \forall A \in M_n(\mathbb{C})$ element neutru – (Atenție! Pentru matrice pătratică.)
4. $a(bA) = (ab)A, \forall a, b \in \mathbb{C}, A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$
5. $(a + b)A = aA + bA, \forall a, b \in \mathbb{C}, A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$
6. $a(A + B) = aA + aB, \forall a \in \mathbb{C},\ A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$
7. $aA = O_{m,n} \Leftrightarrow a = 0$ sau $A = O_{m,n}$
8. $(A^t)^t = A$, oricare ar fi $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$; $(A + B)^t = A^t + B^t, \forall\, A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$; $(aA)^t = aA^t,\ \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$; $(AB)^t = B^t A^t, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\forall B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$

Puterile unei matrice:

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Definim: $A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A,\ A^3 = A^2 \cdot A, \cdots, A^n = A^{n-1} \cdot A,\ n \in \mathbb{N}^*$.

- **Relația Hamilton-Cayley:**

$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$, unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sau $A^2 - (trA)A + (\det A)I_2 = O_2$.

CLASA A XII-A

Prezentare teoretică

Legi de compoziție, grupuri, inele, corpuri

➦ *Lege de compoziție internă*

Definiție. Fie M o mulțime nevidă ($M \neq \emptyset$). O **lege de compoziție internă** „$*$" pe mulțimea M este o funcție $*\colon M \times M \to M$ care asociază oricărei perechi ordonate $(x, y) \in M \times M$ un unic element din M, notat $x * y$.

Condiția de „bună definire" (folosind cuantificatorul logic $\forall$) se scrie astfel: $\forall x, y \in M \quad x * y \in M$.

Exemplul 1: **Adunarea pe mulțimea numerelor naturale**: $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x + y \in \mathbb{N}$.

Observație: Scăderea **nu** este lege de compoziție pe $\mathbb{N}$, deoarece afirmația $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x - y \in \mathbb{N}$ este falsă. Într-adevăr, este valabil contraexemplul: $3 - 8 = -5 \notin \mathbb{N}$.

Exemplul 2: Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea de compoziție „$\circ$" prin $x \circ y = x + y - 5$. Aceasta este o lege de compoziție internă pe $\mathbb{R}$ deoarece, dacă adunăm orice două numere reale și scădem 5, rezultatul este tot un număr real.

Exemplul 3: Înmulțirea matricelor pe mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ este o lege de compoziție internă, deoarece produsul oricăror două matrice 2×2 este tot o matrice 2×2: $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}) \quad A \cdot B \in M_2(\mathbb{R})$.

Asociativitatea unei legi de compoziție

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „$*$" o lege de compoziție internă pe M. Spunem că legea de compoziție „$*$" este **asociativă** dacă este îndeplinită următoarea condiție: $\forall x, y, z \in M \quad (x * y) * z = x * (y * z)$.

Pentru a demonstra că o lege de compoziție „$*$" definită pe mulțimea M **nu este asociativă**, trebuie demonstrată negația definiției: $\exists x, y, z \in M$ astfel încât $(x * y) * z \neq x * (y * z)$, ceea ce revine la identificarea unui contraexemplu.

În această privință, avem o veste bună: nu suntem obligați să justificăm modul în care am găsit acest contraexemplu, fiind suficient să arătăm că el funcționează. Avem însă și o veste proastă: nu dispunem de un algoritm pentru găsirea contraexemplului dorit. Inspirația și experiența rezolvitorului sunt decisive în acest demers.

Exemplul 1: **Adunarea și înmulțirea pe mulțimea numerelor reale**: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$. La fel se întâmplă și în cazul înmulțirii: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Exemplul 2: Scăderea pe mulțimea numerelor reale **nu** este o lege de compoziție asociativă. Putem demonstra acest lucru printr-un simplu contraexemplu. Fie $x = 10$, $y = 5$ și $z = 2$. Calculăm $(10 - 5) - 2 = 5 - 2 = 3$ și $10 - (5 - 2) = 10 - 3 = 7$. Deoarece $3 \neq 7$, deducem că $(x - y) - z \neq x - (y - z)$.

Observație. Pentru a demonstra non-asociativitatea scăderii pe $\mathbb{R}$, nu este nevoie să realizăm o demonstrație generală: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x - y) - z \neq x - (y - z)$. Dealtfel, această afirmație este falsă, în ciuda aparențelor. Unii (nepricepuți) ar fi tentați să accepte următoarea „demonstrație": „Calculând membrul stâng obținem $x - y - z$. Calculând membrul drept obținem $x - y + z$. Se observă că am obținut rezultate diferite, deci afirmația $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x - y) - z \neq x - (y - z)$ este adevărată." Confuzia dintre *egalitatea formală* și *egalitatea numerică efectivă* este sursa acestei erori. Rezultatele $x - y - z$ și $x - y + z$ sunt *formal diferite*, dar pot fi *numeric egale* (de exemplu pentru $z = 0$).

Exemplul 3: Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea de compoziție „$\circ$” prin formula: $x \circ y = x + y + 2$. Pentru a demonstra că legea este asociativă, trebuie să demonstrăm că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Pasul 1: Calculăm membrul stâng: $(x \circ y) \circ z = (x + y + 2) \circ z$. Aplicăm regula din nou, considerând $(x + y + 2)$ ca fiind primul termen și z al doilea termen: $(x \circ y) \circ z = (x + y + 2) + z + 2 = x + y + z + 4$.
Pasul 2: Calculăm membrul drept: $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z + 2)$. Aplicăm regula, unde x este primul termen, iar $(y + z + 2)$ este al doilea termen: $x \circ (y \circ z) = x + (y + z + 2) + 2 = x + y + z + 4$. Deoarece am obținut același rezultat, $x + y + z + 4$, concluzionăm că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

Comutativitatea unei legi de compoziție

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „$*$” o lege de compoziție internă pe M. Spunem că legea de compoziție „$*$” este **comutativă** dacă este îndeplinită condiția: $\forall x, y \in M \;\; x * y = y * x$.

Pentru a demonstra că o lege de compoziție „$*$” definită pe mulțimea M **nu este comutativă**, trebuie demonstrată negația definiției: $\exists x, y \in M$ astfel încât $x * y \neq y * x$, ceea ce revine la identificarea unui contraexemplu.

Exemplul 1: Operația de adunare $(+)$ este comutativă pe mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, deoarece ordinea termenilor nu schimbă suma: $\forall x, y \in \mathbb{N} \;\; x + y = y + x$. Același lucru este valabil și pentru operația de înmulțire pe mulțimea numerelor naturale.

Exemplul 2: **Înmulțirea matricelor NU este comutativă**. Fie $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2 cu elemente reale. Înmulțirea matricelor **nu** este o lege de compoziție comutativă. Putem demonstra acest lucru printr-un contraexemplu simplu:

Alegem două matrice A și B din $M_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculăm produsul $A \cdot B$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculăm produsul $B \cdot A$: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Deoarece $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deducem că $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Exemplul 3: Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea de compoziție „$\circ$” prin formula: $x \circ y = x + y - 2xy$. Pentru a arăta că legea este comutativă, trebuie să demonstrăm că $x \circ y = y \circ x$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Calculăm membrul drept, $y \circ x$ (adică înlocuim x cu y și y cu x în formulă): $y \circ x = y + x - 2yx$.

Deoarece adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt la rândul lor comutative ($y + x = x + y$ și $y \cdot x = x \cdot y$), putem rescrie rezultatul reordonând termenii: $y \circ x = x + y - 2xy$. Observăm că am obținut exact formula pentru $x \circ y$. Așadar, $x \circ y = y \circ x$, ceea ce demonstrează că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

Existența elementului neutru

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „$*$” o lege de compoziție internă pe M. Spunem că legea de compoziție admite **element neutru** dacă: $\exists e \in M$ astfel încât $\forall x \in M \;\; x * e = e * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+3x+3)$.

(5p) **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x^2+5x+6)$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) **b)** Determinați coordonatele punctelor de extrem ale graficului funcției.

(5p) **c)** Determinați imaginea funcției.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+1}$.

(5p) **a)** Calculați $\int_0^1 \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

(5p) **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(5p) **c)** Determinați o primitivă a funcției pentru care $F(2)=0$.

Testul nr. 4

• *Se acordă 10 puncte din oficiu.*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Arătați că $\frac{1}{5}+2\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{20}\right)=1$.

(5p) **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-4$. Determinați numărul real m pentru care $f(3)=m+f(1)$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-1}=3^{x+5}$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să verifice inegalitatea $4n\leq 27$.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$, $N(1,5)$ și $P(5,2)$. Determinați numărul real k pentru care $NP=k\cdot MN$.

(5p) **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=3\cdot AB$ și $AC=12$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 24.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2x+1&2\\1&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

(5p) **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

(5p) **b)** Arătați că $A(1)+A(3)=2A(2)$.

(5p) **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot A(1)=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\oplus y=\sqrt{x^2+y^2}-x+1$.

(5p) **a)** Arătați că $3\oplus 4=3$.

(5p) **b)** Determinați numărul real x pentru care $x\oplus\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$.

(5p) **c)** Determinați numerele întregi n pentru care $n\oplus n<2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$.

(5p) a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

(5p) c) Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3x^2+6x+7}$.

(5p) a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx = 11$.

(5p) b) Calculați $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx$.

(5p) c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0,+\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = a$ are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

Testul nr. 5

• *Se acordă 10 puncte din oficiu.*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că $2{,}5 + 2 \cdot (2 - 0{,}5) = 5{,}5$.

(5p) 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7 - 2x$. Arătați că $f(1) - f(2) = 2$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x-7} = 3$.

(5p) 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$, acesta să verifice inegalitatea $3n \geq 20$.

(5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(2,4)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

(5p) 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu aria egală cu 24 și $AC = 6$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu 8.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 3x & x+3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

(5p) a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$.

(5p) b) Arătați că $3A(2) - 2A(1) = A(4)$.

(5p) c) Determinați numărul real x pentru care $A(0) \cdot A(x) \cdot A(0) = 15A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + 4X + m$, unde m este număr real.

(5p) a) Pentru $m = -6$, arătați că $f(1) = 0$.

(5p) b) Determinați numărul real m pentru care $2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = x_1x_2x_3 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

(5p) c) Determinați numărul real m știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2 + 4$, apoi determinați rădăcinile complexe ale polinomului f în acest caz.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$.

(5p) a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(5p) c) Demonstrați că $f(x) + \ln(x^2 + 1) \leq 3$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)e^x$.

(5p) a) Arătați că $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x}\, dx = 6$.

(5p) b) Demonstrați că funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x + 1)e^x$ este o primitivă a funcției f.

(5p) c) Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)f'(x)\, dx = \frac{8(8e^6 - 1)}{3}$.

Testul nr. 6

• *Se acordă 10 puncte din oficiu.*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că $(0,4 + 0,2) \cdot 10 + 3 \cdot 0,5 = 7,5$.

(5p) 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Arătați că $f(2) + f(3) = 11$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x + 3) = \log_3 9$.

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

(5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(m, 5)$ și $C(6, 6)$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

(5p) 6. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC = 15$ și $AC = 9$. Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 36.

REZOLVĂRI

Repere teoretice și aplicații

Teste pentru examenul de Bacalaureat



Calculăm: $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\cos\frac{5\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{5\pi}{6}+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=$
$=\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{7}{18}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{3}-6\sqrt{2}+7}{18}$.
$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$
$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{7}{18}$
$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=2\cdot 1-(-1)\cdot 3=5$; $\det(A^2)=(\det A)^2=25$.

b) Calculăm: $A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}$; $A^2-3A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3\\ 9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$;
$A^2-2A+5I_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$.

c) $B(m)=I_2+mA$; $B(m)=\begin{pmatrix}1+2m & -m\\ 3m & 1+m\end{pmatrix}$; $\det(B(m))=(1+2m)(1+m)+3m^2=1+3m+5m^2$.
Impunem: $1+3m+5m^2=1\Rightarrow 5m^2+3m=0\Rightarrow m(5m+3)=0\Rightarrow$ $m=0$ sau $m=-\frac{3}{5}$.

2. a) $3\circ 2=3^{\lg 2}=2^{\lg 3}<2^{\lg 10}=2$.

b) $x\circ y=x^{\lg y}=10^{\lg x\lg y}=10^{\lg x\lg y}$
$x\circ x\circ x=10\Rightarrow 10^{\lg x\lg x}\circ x=10\Rightarrow 10^{\lg x\lg x\lg x}=10\Rightarrow 10^{\lg^3 x}=10\Rightarrow \lg^3 x=1\Rightarrow \lg x=1\Rightarrow$
$\Rightarrow x=10\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

c) Căutăm $e\in(0,\infty)$ astfel încât: $x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.
$10^{\lg x\lg e}=10^{\lg e\lg x}=x,\ \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\Rightarrow 10^{\lg x\lg e}=10^{\lg x},\ \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\Rightarrow$
$\lg x\lg e=\lg x,\ \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\Rightarrow \lg x(\lg e-1)=0,\ \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\Rightarrow \lg e=1\Rightarrow e=10\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x)=e^x(x^2+3x+3)+e^x(2x+3)=e^x(x^2+5x+6)$.

b) $f'(x)=e^x(x+2)(x+3)$. Cum $e^x>0$, pentru $f'(x)=0\ \Rightarrow\ x=-2$ sau $x=-3$.
f crescătoare pe $(-\infty,-3]$ și pe $[-2,\infty)$ și descrescătoare pe $[-3,-2]$, rezultă că punct de maxim local este $x=-3$ și punct de minim local este $x=-2$.
$f(-3)=e^{-3}(9-9+3)=3e^{-3}$ și $f(-2)=e^{-2}(4-6+3)=e^{-2}\Rightarrow (-3{,}3\ e^{-3})$ punct de maxim și $(-2,\ e^{-2})$ punct de minim pentru graficul funcției.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(x^2+3x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+3}{e^{-x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{-e^{-x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$;
$\lim\limits_{x\to\infty}e^x(x^2+3x+3)=\infty$;
$f(-3)=e^{-3}(9-9+3)=\frac{3}{e^3}$ este valoare maximă a funcției și $f(-2)=e^{-2}(4-6+3)=\frac{1}{e^2}$ este valoare minimă a funcției. Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ ca produs de funcții elementare, așadar $\mathrm{Im}f=\left[\frac{1}{e^2},\infty\right)$.

2. a) $\int_0^1 \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 x(x-1)\,dx = \int_0^1 (x^2-x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.

b) $\int_0^1 (x-1)\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

Prima integrală se calculează prin prima metodă a schimbării de variabilă:

$u = x^2+1,\ du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

A doua integrală se calculează prin metoda integrării prin părți:

$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}\,|\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

Prin urmare: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

c) $\int (x-1)\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \mathscr{C}$.

Considerăm primitivă $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c$.

Impunem $F(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$, așadar

$F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{3}$.

Testul nr. 4

SUBIECTUL I

1. $\frac{1}{5} + 2\cdot\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{20}\right) = \frac{1}{5} + 2\cdot\left(\frac{15}{20} - \frac{7}{20}\right) = \frac{1}{5} + 2\cdot\frac{8}{20} = \frac{1}{5} + 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

2. Calculăm valorile funcției: $f(3) = 5\cdot 3 - 4 = 15 - 4 = 11$ și $f(1) = 5\cdot 1 - 4 = 5 - 4 = 1$.
Ecuația de necunoscută $m \in \mathbb{R}$ din enunț devine: $f(3) = m + f(1) \Leftrightarrow 11 = m + 1 \Leftrightarrow m = 10$.

3. Folosind injectivitatea funcției exponențiale de bază 3, rezolvăm ecuația exponențială:
$3^{3x-1} = 3^{x+5} \Leftrightarrow 3x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Mulțimea de soluții reale este $S = \{3\}$.

4. Mulțimea A conține 10 elemente. Așadar, sunt 10 cazuri posibile.
Rezolvăm inecuația de necunoscută $n \in A$: $4n \le 27 \Leftrightarrow n \le \frac{27}{4} \Leftrightarrow n \le 6\frac{3}{4}$. Deoarece $n \in A$, mulțimea de soluții este $\{1,2,3,4,5,6\}$. Așadar, sunt 6 cazuri favorabile. $P = \frac{\textit{nr. cazuri favorabile}}{\textit{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

5. $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{0 + 3^2} = 3$,
$NP = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
Ecuația de necunoscută $k \in \mathbb{R}$ din enunț devine: $NP = k\cdot MN \Leftrightarrow 5 = k\cdot 3 \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$.

6. AB și AC catete, și $AB = \frac{AC}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Atunci: $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{4\cdot 12}{2} = 2\cdot 12 = 24$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinantul său este: $\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 2\cdot 1 = 3 - 2 = 1$.

b) $A(2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A(3) = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Efectuăm operația din membrul stâng al egalității: $A(1)+A(3)=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&4\\2&4\end{pmatrix}$.

Deoarece $2A(2)=2\begin{pmatrix}5&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&4\\2&4\end{pmatrix}$, obținem egalitatea cerută: $A(1)+A(3)=2A(2)$.

c) Metoda 1. Fie $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Înlocuind în ecuația matriceală, obținem succesiv:

$$X\cdot A(1)=A(2)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\1&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3x+y&2x+y\\3z+t&2z+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\1&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=5\\2x+y=2\end{cases}\text{și}\begin{cases}3z+t=1\\2z+t=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}\text{și}\begin{cases}z=-1\\t=4\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3&-4\\-1&4\end{pmatrix}.$$

Metoda 2. Deoarece $\det(A(1))=1\neq 0$, matricea $A(1)$ este inversabilă. Izolăm necunoscuta X:

$X\cdot A(1)=A(2)\Leftrightarrow X=A(2)\cdot A(1)^{-1}$.

$A(1)^{-1}=\frac{1}{\det(A(1))}\cdot A(1)^*;\ A(1)^t=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow A(1)^*\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow A(1)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$.

$$X=A(2)\cdot A(1)^{-1}=\begin{pmatrix}5&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+2\cdot(-1)&5\cdot(-2)+2\cdot3\\1\cdot1+2\cdot(-1)&1\cdot(-2)+2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4\\-1&4\end{pmatrix}.$$

2. a) $3\oplus4=\sqrt{3^2+4^2}-3+1=\sqrt{9+16}-2=\sqrt{25}-2=5-2=3$.

b) Ecuația de necunoscută $x\in\mathbb{R}$ devine $x\oplus\frac{4}{3}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\frac{16}{9}}-x+1=\frac{5}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\frac{16}{9}}=x+\frac{2}{3}$.

Impunem condiția necesară $x+\frac{2}{3}\geq0$, ceea ce ne permite să ridicăm la pătrat ecuația, păstrând echivalența: $x^2+\frac{16}{9}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\Leftrightarrow\frac{16}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{3}x\Leftrightarrow\frac{12}{9}=\frac{4}{3}x\Leftrightarrow\frac{4}{3}=\frac{4}{3}x\Leftrightarrow x=1$.

Condiția necesară este verificată: $1+\frac{2}{3}\geq0$ (adevărat), deci $x=1\in\mathbb{R}$ este unica soluție a ecuației.

Observație: Ne putem convinge că $x=1$ este într-adevăr soluție, verificând ecuația:

$1\oplus\frac{4}{3}=\sqrt{1^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}-1+1=\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$.

Această verificare este însă facultativă (nu face parte din rezolvarea problemei), întrucât am păstrat lanțul de echivalențe în rezolvarea ecuației. O variantă de rezolvare realizată fără impunerea condiției necesare ar recurge la o implicație logică în momentul ridicării la pătrat a ecuației ($a=b\Rightarrow a^2=b^2$). Într-o astfel de situație, verificarea finală în ecuație devine obligatorie pentru completitudinea rezolvării.

c) $n\oplus n=\sqrt{n^2+n^2}-n+1=\sqrt{2n^2}-n+1=|n|\sqrt{2}-n+1$. Rezolvăm (în mulțimea $\mathbb{Z}$) inecuația $|n|\sqrt{2}-n+1<2\Leftrightarrow|n|\sqrt{2}-n<1$. Analizăm două cazuri, în funcție de semnul lui n:

Cazul 1. Dacă $n\geq0$, atunci $|n|=n$, așadar $n\sqrt{2}-n<1\Leftrightarrow n(\sqrt{2}-1)<1\Leftrightarrow n<\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n<\sqrt{2}+1$. Numerele întregi din intervalul $[0,\sqrt{2}+1)$ sunt $0,1,2$, deoarece $2<\sqrt{2}+1<3$.

Cazul 2. Dacă $n<0$, atunci $|n|=-n$, așadar $-n\sqrt{2}-n<1\Leftrightarrow-n(\sqrt{2}+1)<1\Leftrightarrow n>-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n>1-\sqrt{2}$. Nu există numere întregi negative strict mai mari decât $1-\sqrt{2}$, deoarece $1-\sqrt{2}>-1$.

Mulțimea soluțiilor inecuației este $S=\{0,1,2\}$, deci numerele întregi căutate sunt $0,1,2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, fiind o funcție rațională. Calculăm derivata: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+9}\right)' = \frac{x'(x^2+9) - x(x^2+9)'}{(x^2+9)^2} = \frac{1\cdot(x^2+9) - x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{x^2+9-2x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}.$$

b) Asimptota orizontală spre $-\infty$ se determină calculând limita funcției spre $-\infty$:

Metoda 1. Cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$: dăm factor comun forțat la numitor puterea cea mai mare, x^2, și simplificăm parțial fracția: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+9} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x\left(1+\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{1}{-\infty(1+0)} = 0.$

Metoda 2. Cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+9} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x'}{(x^2+9)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$

Limita fiind finită, 0, dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Aflăm punctele critice: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(3-x)(3+x)}{\left(x^2+9\right)^2} = 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 3\}$.

Deoarece numitorul $(x^2+9)^2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, semnul derivatei este dat de semnul numărătorului $9 - x^2$, care este o funcție de gradul al doilea cu coeficientul dominant negativ ($a = -1 < 0$) și cu rădăcinile -3 și 3. Astfel, avem $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-3, 3)$.

Calculăm limita spre $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+9} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(1+\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{1}{+\infty(1+0)} = 0.$

Limita spre $-\infty$ este 0, calculată deja la punctul b).

Calculăm valorile în punctele critice: $f(-3) = \frac{-3}{(-3)^2+9} = \frac{-3}{18} = -\frac{1}{6}$, $f(3) = \frac{3}{3^2+9} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

x	$-\infty$					-3					3					$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	↘					$-\frac{1}{6}$	↗					$\frac{1}{6}$	↘				0

Din tabelul de variație rezultă că minimul global este $-\frac{1}{6}$ (atins în $x = -3$), iar maximul global este $\frac{1}{6}$ (atins în $x = 3$). Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci ia toate valorile intermediare (adică are Proprietatea lui Darboux), așadar, mulțimea valorilor funcției f este $\text{Im}f = \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$.

2. a) $f^2(x) = \left(\sqrt{3x^2+6x+7}\right)^2 = 3x^2+6x+7$; $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 (3x^2+6x+7)\,dx = \left(3\cdot\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} + 7x\right)\Big|_0^1 =$

$= (x^3+3x^2+7x)\big|_0^1 = (1^3+3\cdot1^2+7\cdot1) - (0^3+3\cdot0^2+7\cdot0) = 1+3+7 = 11.$

b) Pentru calculul integralei, utilizăm metoda schimbării de variabilă. Notăm:

$t = 3x^2+6x+7 \Rightarrow dt = (3x^2+6x+7)'dx = (6x+6)dx = 6(x+1)dx \Rightarrow (x+1)dx = \frac{1}{6}dt.$

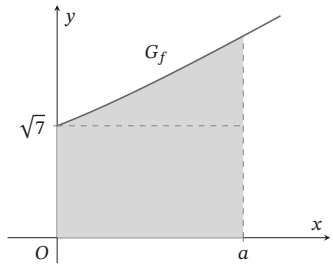
Schimbăm limitele de integrare: pentru $x = -1 \Rightarrow t = 3(-1)^2 + 6(-1) + 7 = 3 - 6 + 7 = 4$, iar pentru $x = 1 \Rightarrow t = 3(1)^2 + 6(1) + 7 = 3 + 6 + 7 = 16$. Integrala devine:

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}dx = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+7}}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{3x^2+6x+7}}\cdot(x+1)\,dx = \int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{6}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int_4^{16} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{3}\int_4^{16} (\sqrt{t})'dt = \frac{1}{3}\sqrt{t}\Big|_4^{16} = \frac{1}{3}(\sqrt{16} - \sqrt{4}) = \frac{1}{3}(4-2) = \frac{2}{3}.$$

c) Aria cerută este dată de formula: $\mathcal{A} = \int_0^a |f(x)|\,dx$. Deoarece $3x^2+6x+7 = 3(x+1)^2 + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcția este pozitivă, deci $|f(x)| = f(x)$, de unde $\mathcal{A} = \int_0^a \sqrt{3x^2+6x+7}\,dx$.

Cum $a \in (0,+\infty)$, intervalul de integrare este $[0,a]$, deci $x \geq 0$. Atunci termenii $3x^2$ și $6x$ sunt mai mari sau egali cu 0, așadar $3x^2+6x+7 \geq 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{3x^2+6x+7} \geq \sqrt{7}$.
Aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite pe intervalul $[0,a]$, obținem succesiv: $\mathscr{A} = \int_0^a \sqrt{3x^2+6x+7}\,dx \geq \int_0^a \sqrt{7}\,dx = (\sqrt{7}x)\Big|_0^a = a\sqrt{7}$.
Prin urmare, aria suprafeței plane este mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$, pentru orice $a \in (0,+\infty)$.



Testul nr. 5

SUBIECTUL I

1. $2,5+2\cdot(2-0,5)=2,5+2\cdot 1,5=2,5+3=5,5$.

2. $f(1)=7-2\cdot 1=5$ și $f(2)=7-2\cdot 2=3 \Rightarrow f(1)-f(2)=5-3=2$.

3. **Metoda 1.** Condiția de existență a radicalului: $4x-7\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq 7 \Leftrightarrow x\geq \frac{7}{4}$. Ambii membri fiind nenegativi, ridicarea la pătrat se face cu păstrarea echivalenței: $\sqrt{4x-7}=3 \Leftrightarrow 4x-7=9 \Leftrightarrow 4x=16 \Leftrightarrow x=4$. Deoarece $4\geq\frac{7}{4}$, condiția de existență este verificată. Mulțimea de soluții reale este $S=\{4\}$.
Metoda 2. Ridicăm la pătrat ecuația inițială: $\sqrt{4x-7}=3 \Rightarrow 4x-7=9 \Leftrightarrow 4x=16 \Leftrightarrow x=4$.
Metoda nu garantează că s-a obținut o ecuație echivalentă cu cea inițială, deci este obligatorie verificarea în ecuația inițială: $\sqrt{4\cdot 4-7}=\sqrt{16-7}=\sqrt{9}=3$ (adevărat), deci $S=\{4\}$.

4. Mulțimea A are 7 elemente, deci numărul cazurilor posibile este 7. Cazurile favorabile sunt numerele $n\in A$ care verifică inegalitatea $3n\geq 20 \Leftrightarrow n\geq \frac{20}{3} \Leftrightarrow n\geq 6\frac{2}{3}$, adică numerele 8, 10, 12 și 14, așadar numărul cazurilor favorabile este 4. Obținem: $P=\frac{\textit{nr. cazuri favorabile}}{\textit{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{7}$

5. $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$,
$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.
Deoarece $AC=BC=\sqrt{13}$, deducem că triunghiul ABC este isoscel.
Observație. Putem calcula și lungimea AB și putem demonstra că triunghiul ABC este isoscel de bază AB, nefiind un triunghi echilateral. Soluția problemei este însă completă și fără aceste calcule și afirmații suplimentare. Pe **ciornă**, în încercarea de a rezolva problema este posibil să nu nimerim exact cele două laturi congruente și atunci calculăm 3 lungimi, dar în redactarea soluției putem folosi doar cele două lungimi egale. O reprezentare grafică (pe ciornă) a celor 3 puncte în sistemul xOy ne poate scuti de calcule inutile.

6. Folosim formula $\mathscr{A}_{ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}$ și obținem: $\frac{AB\cdot 6}{2}=24 \Leftrightarrow 3\cdot AB=24 \Leftrightarrow AB=8$.

SUBIECTUL al II-lea

1. **a)** $A(2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}$; $\det(A(2))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}=2\cdot 5-1\cdot 6=10-6=4$.

b) $A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3\cdot 1 & 1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $A(2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3\cdot 2 & 2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}$.

$3A(2)-2A(1)=3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 18 & 15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 6 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 12 & 7\end{pmatrix}$.

Deoarece $A(4)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3\cdot 4 & 4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 12 & 7\end{pmatrix}$, obținem egalitatea cerută: $3A(2)-2A(1)=A(4)$.

c) $P(x)=A(0)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ 3x & x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot x+1\cdot 3x & 0\cdot 1+1\cdot(x+3)\\ 0\cdot x+3\cdot 3x & 0\cdot 1+3\cdot(x+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x & x+3\\ 9x & 3x+9\end{pmatrix}$.

Înmulțim rezultatul obținut, la dreapta, cu $A(0)$ și obținem: $A(0)\cdot A(x)\cdot A(0)=P(x)\cdot A(0)=$

$=\begin{pmatrix}3x & x+3\\ 9x & 3x+9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3x\cdot 1+(x+3)\cdot 3\\ 0 & 9x\cdot 1+(3x+9)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3x+3x+9\\ 0 & 9x+9x+27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6x+9\\ 0 & 18x+27\end{pmatrix}$.

Dar membrul drept este $15A(0)=15\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 15\\ 0 & 45\end{pmatrix}$, așadar ecuația de necunoscută $x\in\mathbb{R}$ din enunț devine: $\begin{pmatrix}0 & 6x+9\\ 0 & 18x+27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 15\\ 0 & 45\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+9=15\\ 18x+27=45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x=6\\ 18x=18\end{cases}\Leftrightarrow x=1$; numărul real cerut este 1.

2. a) Pentru $m=-6$, polinomul este $f=X^3+X^2+4X-6$; $f(1)=1^3+1^2+4\cdot 1-6=1+1+4-6=0$.

b) Relațiile lui Viète pentru polinomul $f=X^3+X^2+4X+m$ sunt: $x_1+x_2+x_3=-1$;
$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=4$; $x_1x_2x_3=-m$. Relația din enunț devine: $2\cdot 4=-m-2\cdot(-1)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8=-m+2\Leftrightarrow m=2-8\Leftrightarrow m=-6$.

c) Metoda 1. Rădăcinile polinomului $X^2+4=(X-2i)(X+2i)$ sunt $x_{1,2}=\pm 2i$. Polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, deci f este divizibil cu X^2+4 dacă și numai dacă $f(2i)=0$.
$f(2i)=(2i)^3\,(2i)^2+4(2i)+m=-8i-4+8i+m=m-4$. Obținem: $f(2i)=0\Leftrightarrow m-4=0\Leftrightarrow m=4$.
În acest caz polinomul devine: $f=X^3+X^2+4X+4=X^2(X+1)+4(X+1)=(X+1)(X^2+4)$.
Rădăcinile complexe ale polinomului f sunt rădăcinile polinomului X^2+4 împreună cu rădăcina polinomului $X+1$, adică $x_1=2i$, $x_2=-2i$ și $x_3=-1$.
Metoda 2. Împărțim polinomul $f=X^3+X^2+4X+m$ la X^2+4:

X^3	$+X^2$	$+4X$	$+m$	X^2+4
$-X^3$		$-4X$		$X+1$
/	$+X^2$	/	$+m$	
	$-X^2$		-4	
	/		$m-4$	

Obținem câtul $X+1$ și restul $m-4$, deci, conform teoremei împărțirii cu rest, polinomul f se scrie în forma: $f=X^3+X^2+4X+m=(X+1)(X^2+4)+(m-4)$.
Condiția de divizibilitate a polinomului f cu polinomul X^2+4 se realizează dacă și numai dacă restul este nul, adică $m-4=0\Leftrightarrow m=4$. În acest caz, polinomul f se descompune ca produs de factori de gradul I peste $\mathbb{C}$: $f=(X+1)(X^2+4)=(X+1)(X-2i)(X+2i)$, de unde $x_1=-1$, $x_2=2i$ și $x_3=-2i$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, fiind o funcție rațională. Calculăm derivata:

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+3)'(x^2+1)-(x^2+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$=\frac{2x(x^2+1)-(x^2+3)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3-6x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}$.

b) Metoda 1. Asimptota orizontală spre $+\infty$ se determină calculând limita funcției spre $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+0}{1+0}=1$.

Limita fiind finită, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.
Metoda 2. Funcția f fiind rațională și gradul numărătorului fiind egal cu gradul numitorului, limita sa spre $+\infty$ este egală cu raportul coeficienților termenilor dominanți: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{1}{1} = 1$, prin urmare ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ este $y = 1$.

c) Metoda 1. Considerăm funcția auxiliară $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \ln(x^2+1)$. Funcția g este derivabilă pe $[0,1]$, ca sumă de funcții derivabile, și derivata sa este: $g'(x) = f'(x) + (\ln(x^2+1))' =$
$= \frac{-4x}{(x^2+1)^2} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{-4x+2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -4x + 2x^3 + 2x/(x^2+1)^2 = \frac{2x^3-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

Pentru orice $x\in(0,1)$, avem $2x > 0$, $x^2-1 < 0$ și $(x^2+1)^2 > 0$, deci $g'(x) < 0$. Cum derivata g' se anulează doar pentru $x = 0$ și $x = 1$, rezultă că funcția g este strict descrescătoare pe intervalul $[0,1]$.

x	0		1
$g'(x)$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	0
$g(x)$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$

Din tabelul de variație se observă că valoarea maximă a funcției g pe intervalul $[0,1]$ este $g(0)$, prin urmare: $\forall x\in[0,1]\ g(x)\le g(0) \Leftrightarrow g(x) \le \frac{0^2+3}{0^2+1} + \ln(0^2+1) \Leftrightarrow f(x) + \ln(x^2+1) \le 3$.

Metoda 2. Demonstrăm inegalitatea $\ln(t+1)\le t$, pentru orice $t > -1$.
Considerăm funcția $h:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, h(t) = t - \ln(t+1)$. Funcția h este derivabilă, iar derivata sa este: $h'(t) = (t-\ln(t+1))' = 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t+1-1}{t+1} = \frac{t}{t+1}$. Determinăm punctul critic al funcției prin anularea derivatei: $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Pe intervalul $(-1,+\infty)$, numitorul $t+1$ este pozitiv, deci semnul derivatei este dat de semnul numărătorului:

- $\forall\, t\in(-1,0)$, avem $t < 0$, deci $h'(t) < 0$.
- $\forall\, t\in(0,+\infty)$, avem $t > 0$, deci $h'(t) > 0$.

t	-1		0		$+\infty$
$h'(t)$	|	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	
$h(t)$	|	$\searrow$	$h(0)$	$\nearrow$	

Din tabelul de variație rezultă că valoarea minimă a funcției este $h(0) = 0 - \ln(0+1) = 0$.
Prin urmare, pentru orice $t > -1$, avem $h(t)\ge h(0) \Leftrightarrow t - \ln(t+1)\ge 0 \Leftrightarrow \ln(t+1)\le t$.
Înlocuind $t = x^2\ge 0$, obținem inegalitatea $\ln(x^2+1)\le x^2$, de unde rezultă: $f(x) + \ln(x^2+1) \le \frac{x^2+3}{x^2+1} + x^2$.
Pentru a arăta că $f(x) + \ln(x^2+1)\le 3$, este suficient să demonstrăm că $\frac{x^2+3}{x^2+1} + x^2 \le 3$, $\forall\, x\in[0,1]$;
$\frac{x^2+3+x^2(x^2+1)-3(x^2+1)}{x^2+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3+x^4+x^2-3x^2-3}{x^2+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-x^2}{x^2+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-1)}{x^2+1} \le 0$.
Deoarece pentru orice $x\in[0,1]$ avem $x^2\ge 0$, $x^2-1\le 0$ și $x^2+1 > 0$, ultima inegalitate este adevărată, ceea ce confirmă inegalitatea din enunț.

2. a) $\frac{f(x)}{e^x} = \frac{(x+2)e^x}{e^x} = x+2$; $\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = \int_0^2 (x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{4}{2}+4\right) - (0+0) = 6 - 0 = 6$.

b) Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$, fiind un produs de funcții derivabile. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, avem:
$F'(x) = ((x+1)e^x)' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = 1\cdot e^x + (x+1)e^x = e^x(1+x+1) = (x+2)e^x = f(x)$.
Deoarece $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că F este o primitivă a funcției f.

c) $\int_0^2 f^2(x)f'(x)\,dx = \frac{f^3(x)}{3}\Big|_0^2 = \frac{f^3(2)-f^3(0)}{3} = \frac{((2+2)e^2)^3 - ((0+2)e^0)^3}{3} = \frac{(4e^2)^3 - 2^3}{3} = \frac{64e^6-8}{3} = \frac{8(8e^6-1)}{3}$.

Altă metodă: Folosim metoda schimbării de variabilă. Notăm $f(x) = t$, de unde rezultă $f'(x)\,dx = dt$.
Schimbăm limitele de integrare: când $x = 0 \Rightarrow t = f(0) = 2$, iar când $x = 2 \Rightarrow t = f(2) = 4e^2$. Integrala devine: $\int_0^2 f^2(x)f'(x)\,dx = \int_2^{4e^2} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_2^{4e^2} = \frac{(4e^2)^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64e^6}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8(8e^6-1)}{3}$.

Cuprins

Repere teoretice și aplicații

	Enunțuri	*Rezolvări*
Clasa a IX-a	5	130
Clasa a X-a	15	136
Clasa a XI-a	27	145
Clasa a XII-a	52	167

Teste pentru examenul de Bacalaureat

	Enunțuri	*Rezolvări*
Testul nr. 1	85	184
Testul nr. 2	86	185
Testul nr. 3	87	186
Testul nr. 4	88	188
Testul nr. 5	89	191
Testul nr. 6	90	194
Testul nr. 7	91	197
Testul nr. 8	93	199
Testul nr. 9	94	201
Testul nr. 10	95	204
Testul nr. 11	97	208
Testul nr. 12	98	211
Testul nr. 13	99	215
Testul nr. 14	100	216
Testul nr. 15	101	217
Testul nr. 16	102	219
Testul nr. 17	104	220
Testul nr. 18	105	221
Testul nr. 19	106	223
Testul nr. 20	107	224
Testul nr. 21	108	225
Testul nr. 22	109	227
Testul nr. 23	110	229
Testul nr. 24	111	230
Testul nr. 25	112	232
Testul nr. 26	113	233
Testul nr. 27	114	235
Testul nr. 28	115	237
Testul nr. 29	116	239
Testul nr. 30	117	240
Testul nr. 31	118	242
Testul nr. 32	119	244
Testul nr. 33	120	245
Testul nr. 34	121	246
Testul nr. 35	122	247
Testul nr. 36	123	248
Testul nr. 37	124	250
Testul nr. 38	125	251
Testul nr. 39	126	252
Testul nr. 40	127	254

Carmen Delcea
Valentina Ionescu
Luminița Petrișan
Laura Eugenia Tănase

BAC

MATEMATICĂ M2

Examenul de bacalaureat reprezintă un moment de bilanț, care încununează eforturile depuse de fiecare elev pe parcursul celor patru ani de liceu și care deschide porțile către viitorul academic sau profesional. Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei, fiind concepută ca un material de lucru esențial și accesibil.

Cartea se adresează în primul rând elevilor, reprezentând un instrument util în sistematizarea noțiunilor teoretice și promovând învățarea autodidactă. Conținutul lucrării, special calibrat pentru elevii care susțin examenul maturității, acoperă integral tematica programelor pentru profilurile *Tehnologic* și *Științe ale naturii*.

Structura cărții cuprinde o primă parte cu elemente de teorie și probleme propuse, defalcate pe ani de studiu. Breviarul teoretic nu își propune să fie un tratat matematic exhaustiv, ci este structurat astfel încât elevul să identifice rapid definiția, formula sau teorema necesară, nemaifiind nevoit să caute printre zeci de pagini de demonstrații. Majoritatea problemelor propuse, care însoțesc partea teoretică, respectă riguros stilul de formulare din variantele de bacalaureat extrase în sesiunile din anii precedenți.

În a doua parte, lucrarea conține teste de antrenament elaborate după modelul oficial, iar secțiunea finală oferă soluții detaliate și comentarii metodice atât pentru problemele propuse, cât și pentru teste.

Culegerea poate fi utilizată și pentru pregătirea curentă, permițând elevilor să se antreneze din timp, pentru că un rezultat bun se obține doar prin studiu sistematic. Profesorii o pot folosi pentru a selecta aplicații destinate activității la clasă, pentru evaluările sumative și pentru orele dedicate pregătirii suplimentare.

De la teorie la rezolvare, pas cu pas

Lucrarea îi va ajuta pe elevi să înțeleagă, să exerseze sistematic și să abordeze cu mai multă siguranță subiectele de la bacalaureat.

CORINT EDUCAȚIONAL

ISBN: 978-630-361-428-1

www.edituracorint.ro