

EXEMPLAR DE PREZENTARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII



OVIDIU ȘONTEA
EUGEN RADU
SILVIA MUȘĂTOIU

Matematică

Trunchi comun
și curriculum de
specialitate (TC+CS),
filiera teoretică,
profilul real, specializarea
matematică-informatică –
clasa a IX-a

9

CORINT
LOGISTIC

Matematică

Trunchi comun
și curriculum de
specialitate (TC+CS),
filiera teoretică,
profilul real, specializarea
matematică-informatică –
clasa a IX-a

9

OVIDIU ȘONTEA
EUGEN RADU
SILVIA MUȘĂTOIU

CORINT
LOGISTIC

Date despre autori:

OVIDIU ȘONTEA

Profesor de matematică la Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu” din București, cu o experiență didactică de peste trei decenii, Ovidiu Șontea este una dintre vocile cunoscute ale educației matematice românești. Activitatea sa a fost asociată atât cu formarea elevilor de performanță, cât și cu elaborarea de manuale și resurse didactice utilizate de generații de elevi și profesori. Implicat în viața Societății de Științe Matematice din România și în pregătirea loturilor olimpice, profesorul Ovidiu Șontea promovează o matematică riguroasă, profundă și relevantă pentru lumea contemporană.

EUGEN RADU

Profesor și autor cu o experiență îndelungată în elaborarea de manuale și culegeri de matematică, Eugen Radu este recunoscut pentru contribuția sa la dezvoltarea unor resurse didactice apreciate pentru claritate, rigoare și valoare formativă. De-a lungul timpului, lucrările realizate împreună cu alți autori consacrați au devenit repere pentru numeroase generații de elevi și profesori, punând accent pe înțelegerea profundă a conceptelor și pe formarea gândirii matematice.

SILVIA MUȘĂTOIU

Profesoară de matematică la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din București, fost director al colegiului și personalitate implicată activ în dezbaterile și dezvoltarea curriculumului național, Silvia Mușătoiu îmbină experiența didactică, preocuparea pentru performanță și interesul pentru modernizarea educației matematice. Activitatea sa este caracterizată de preocuparea constantă pentru păstrarea rigorii matematice și, în același timp, pentru ancorarea acesteia în prezent și în provocările viitorului.

CUPRINS

Competențe generale și competențe specifice	4
Ghid de utilizare a manualului	5
Test predictiv	6
ALGEBRĂ	
1. Elemente de logică matematică	
● Propoziția. Operații cu propoziții logice. Predicate și Cuantificatori	8
● Tipuri de propoziții matematice	15
● Metoda inducției matematice	23
2. Șiruri și progresii	
● Introducere	30
● Șiruri de numere reale	32
● Progresii aritmetice și progresii geometrice	37
● Proprietăți ale progresiilor	39
3. Funcții	
A. Proprietăți generale ale funcțiilor	
● Funcții - Proprietăți generale	56
● Graficul unei funcții. Drepte remarcabile și interpretare geometrică	63
● Proprietăți fundamentale ale funcțiilor numerice. Lecturi grafice	70
● Operații cu funcții numerice	79
● Funcții injective	85
● Funcții surjective	90
● Funcții bijective	94
● Funcții inversabile	97
● Proprietăți ale funcțiilor. Aplicații și lectură grafică. Fixare-consolidare-aprofundare	101
B. Funcția de gradul al doilea	
● Rolul funcției de gradul al doilea în descrierea variației neliniare	104
● Definiția funcției de gradul al doilea. Formă generală și formă canonică	109
● Etape ale reprezentării grafice a funcțiilor de gradul al doilea	127
● Utilizarea proprietăților funcției de gradul al doilea în rezolvarea inecuațiilor	133
● Sisteme de ecuații care conțin ecuații de gradul al doilea. Interpretare geometrică	138
C. Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical	
● Funcția putere cu exponent întreg	150
● Radicalul de ordin n , $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$	166
● Funcția radical	176
● Ecuații și inecuații cu radicali	181
TRIGONOMETRIE	
4. Funcții trigonometrice. Ecuații trigonometrice	
● Unități de măsură pentru unghiuri și arce. Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	188
● Funcții periodice	192
● Funcțiile trigonometrice sinus și cosinus	195
● Funcțiile tangentă și cotangentă	204
● Reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice	208
● Formule trigonometrice	212
● Funcții trigonometrice inverse	222
● Ecuații trigonometrice	226
GEOMETRIE	
5. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice	
● Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor. Rezolvarea triunghiurilor	232
● Formule pentru arie. Raza cercului circumscris și raza cercului înscris	241
● Teorema bisectoarei. Teorema lui Stewart	246
● Coliniaritate și concurență în geometria plană	251
Exerciții și probleme recapitulative	261

COMPETENȚE GENERALE ȘI COMPETENȚE SPECIFICE

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea propozițiilor elementare din care este alcătuit un enunț matematic

1.2. Identificarea elementelor specifice șirurilor/progresiilor în contexte variate

1.3. Identificarea unor relații de tip dependență funcțională între variabile sau entități, pentru a evidenția elemente ale funcțiilor

1.4. Identificarea pe cercul trigonometric a punctelor asociate unor numere reale

1.5. Identificarea elementelor necesare pentru calcularea unor măsuri (lungimi de segmente, unghiuri, arii)

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Identificarea operațiilor cu propoziții elementare din cadrul unui enunț matematic

2.2. Efectuarea de calcule pentru determinarea elementelor șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice, utilizând formule specifice

2.3. Extragerea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ și structural, din reprezentări grafice pentru a descrie proprietățile unei funcții (monotonie, convexitate, puncte de extrem etc.) într-o situație practică dată

2.4. Stabilirea unor caracteristici calitative/cantitative folosind funcții trigonometrice, inclusiv folosind instrumente digitale

2.5. Aplicarea unor metode adecvate pentru determinarea unor distanțe, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Determinarea valorii de adevăr a unui enunț matematic format din propoziții legate prin operatori logici

3.2. Aplicarea algoritmilor de calcul pentru determinarea unor termeni și a sumelor unor termeni consecutivi ai progresiilor aritmetice și geometrice, în diferite contexte

3.3. Aplicarea unor concepte și algoritmi matematici (funcții, rate de variație etc.), pentru a interpreta reprezentări grafice în scopul extragerii de informații relevante pentru rezolvarea, în contexte matematice, a unor probleme practice

3.4. Calcularea valorii unei funcții trigonometrice când se cunosc informații despre valorile unei alte funcții trigonometrice

3.5. Determinarea măsurilor unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Precizarea structurii logice a unui enunț

4.2. Transpunerea în limbaj specific matematic a unor situații din viața cotidiană referitoare la șiruri sau progresii în scopul analizării comportamentului acestora

4.3. Exprimarea unor concluzii și justificări matematice, utilizând limbajul specific funcțiilor (simboluri, formule, expresii, reprezentări), pentru a comunica informații extrase din reprezentări grafice, în contexte matematice practice

4.4. Stabilirea unor relații matematice utilizând calculul trigonometric

4.5. Caracterizarea în limbaj matematic a unei configurații geometrice folosind elemente de trigonometrie sau relații metrice

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Formularea unui enunț matematic (axiomă, definiție, relație/proprietate/teoremă) asociat unei situații date

5.2. Analizarea unor situații date în contexte intra și interdisciplinare, selectând modelul de progresie adecvat și metoda de rezolvare eficientă în funcție de datele disponibile

5.3. Analizarea unor situații date prin interpretarea reprezentărilor grafice și evidențierea soluțiilor posibile pentru a interpreta situații reale și a formula concluzii argumentate în contexte intra și interdisciplinare

5.4. Analizarea proprietăților funcțiilor trigonometrice folosind reprezentarea grafică sau cercul trigonometric

5.5. Aplicarea unor metode variate pentru optimizarea calculelor de distanțe, de măsuri de unghiuri și de arii

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Validarea unui enunț matematic asociat unei situații date

6.2. Modelarea matematică, folosind șirurile sau progresiile, a unor situații reale pentru interpretarea implicațiilor în contexte interdisciplinare și pentru luarea unor decizii fundamentate pe datele obținute

6.3. Modelarea unei situații reale, utilizând un model matematic (funcții, relații) construit pe baza datelor extrase din reprezentări grafice, pentru a explica, a anticipa sau a optimiza rezultate în contexte precum economie, biologie sau fizică

6.4. Descrierea unor relații între mărimi din diferite domenii, cu ajutorul funcțiilor trigonometrice

6.5. Modelarea unor configurații geometrice utilizând metode metrice, trigonometrice, sintetice

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI

Manualul cuprinde variantele tipărită și digitală



Rezolvă



Privește



Vizionează

Simboluri folosite
în varianta digitală

Manualul de *Matematică* pentru clasa a IX-a TC+CS destinat elevilor de la specializarea *matematică-informatică* este conceput ca un instrument de învățare care susține dezvoltarea gândirii matematice riguroase, a capacității de modelare și a competențelor necesare pentru studiul aprofundat al matematicii, informaticii și al disciplinelor STEM. Poate fi utilizat atât în activitatea curentă de la clasă, cât și în studiul individual.

Autorii propun o abordare care îmbină fundamentarea teoretică, rezolvarea de probleme, investigarea matematică și reflecția critică. Elevul este încurajat să *observe* regularități, să *formuleze* ipoteze, să *argumenteze*, să *demonstreze* și să *utilizeze* matematica pentru analiza și evaluarea unor situații din domeniul matematic și din lumea reală.

Structura manualului este construită în jurul unor *domenii matematice fundamentale*: elemente de logică matematică, șiruri și progresii, funcții și studiul acestora, funcții trigonometrice și aplicații ale trigonometriei în geometrie. Conținuturile sunt dezvoltate gradual, prin exemple, activități de explorare, exerciții și probleme cu niveluri diferite de complexitate. Manualul este organizat pe lecții, fiecare urmărind atât *formarea competențelor specifice* prevăzute de programă, cât și *dezvoltarea unor moduri autentice de lucru proprii matematicianului*: *observarea, investigarea, argumentarea și validarea rezultatelor*.

Pentru elev, lecțiile oferă:

- contexte matematice relevante și provocatoare;
- exemple rezolvate riguros și comentate;
- exerciții organizate gradual, de la consolidare la aprofundare;
- activități individuale, în pereche și pe grupe;
- situații de modelare și investigare;
- momente de reflecție și autoevaluare;
- conexiuni cu informatica, tehnologia și alte domenii ale cunoașterii.

Sunt incluse activități care propun *utilizarea responsabilă și critică a tehnologiilor digitale și a instrumentelor bazate pe inteligență artificială*. Acestea nu înlocuiesc gândirea matematică, ci oferă contexte suplimentare pentru informare, precum și pentru verificarea, interpretarea și argumentarea rezultatelor.

Rubricile permanente contribuie la dezvoltarea progresivă a competențelor matematice:



Reflecție de început: activarea cunoștințelor anterioare și formularea unor întrebări de explorare;



Situație reală și modelare matematică: evidențierea rolului matematicii în descrierea și analiza fenomenelor;



Reținem: sintetizarea ideilor esențiale ale lecției;



Reflectăm: dezvoltarea gândirii critice și a argumentării;



Exerciții rezolvate: evidențierea unor modele de raționament și strategii de lucru;



Exerciții propuse: consolidarea și extinderea competențelor formate, în contexte practic-aplicative;



(Auto)evaluare: sprijin pentru monitorizarea progresului individual;



Matematica sub semnul întrebării – contexte de reflecție asupra limitelor modelelor, interpretării rezultatelor și relației dintre matematică, tehnologie și realitate.

Mai mult decât un instrument pentru învățarea matematicii, acest manual propune un *spațiu de formare a unui mod de a gândi*. Pe parcursul lecțiilor vei întâlni situații în care va trebui să observi regularități, să formulezi ipoteze, să verifici argumente, să construiești modele și să iei decizii pe baza unor informații sistematizate sau pe care trebuie să le interpretezi în contexte reale date. Uneori *vei descoperi răspunsuri*, alteori *vei descoperi întrebări* mai bune decât cele de la care ai pornit. La finalul acestui parcurs, *cea mai importantă achiziție* nu ar trebui să fie o formulă sau o metodă de calcul, ci *capacitatea de a aborda riguros probleme noi, de a argumenta convingător și de a privi critic* atât propriile concluzii, cât și pe cele formulate de alții. Acestea sunt cele mai valoroase competențe pe care matematica le poate oferi pentru studiile viitoare, pentru profesie și pentru viață.

TEST PREDICTIV

Timp de lucru: 50 de minute. **Se acordă 1 punct din oficiu.**

- a) (1p) Se consideră numerele reale a și b astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. Știind că $a + b = 5\sqrt{3}$, află întregul cel mai apropiat de a .

b) (1p) Precizează care dintre numerele $-\frac{998}{999}$ și $-\frac{999}{1000}$ este mai mare. Justifică alegerea făcută!
- Se consideră expresia $E(x) = \frac{-3}{1-2x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

a) (1p) Determină toate valorile reale ale lui x pentru care $E(x) > 0$.

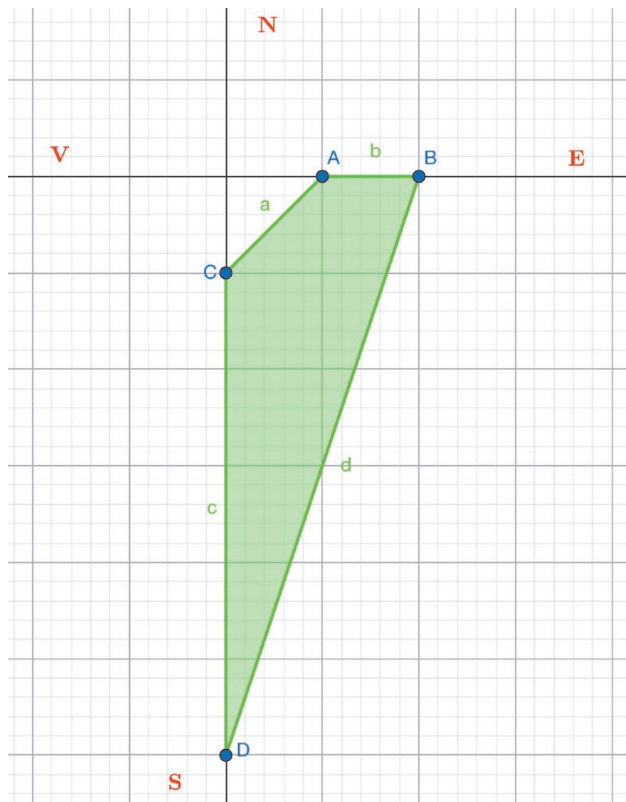
b) (1p) Determină mulțimea valorilor $x \in \mathbb{Q}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

c) (1p) Demonstrează că $|E(x)| \leq 3 \iff |2x - 1| \geq 1$. Acordă atenție ambelor implicații!
- În zona sud-estică a obeliscului O , așezat la intersecția a două străzi perpendiculare, cu direcțiile vest-est și sud-nord, se află o suprafață acoperită cu gazon, reprezentată schematic și marcată cu verde în figura alăturată. Știm că în realitate punctul A se află la distanța de 10 metri față de O .

a) (1p) Determină aria suprafeței acoperite cu gazon.

b) (1p) Determină tangenta unghiului format de latura cu lungimea cea mai mare a suprafeței acoperite cu gazon și axa suprapusă peste strada cu direcția sud-nord.

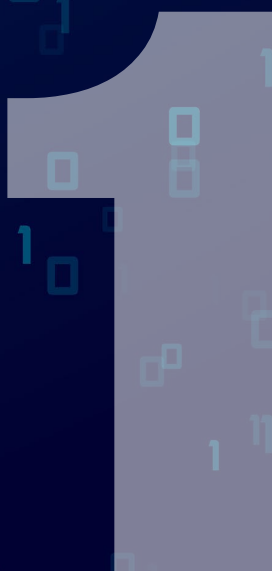
c) (1p) Stabilește dacă un cablu de 15 metri este suficient de lung pentru a construi un traseu electric, în linie dreaptă, de la punctul C până la latura BD .
- (1p) Demonstrează că un triunghi având două mediane egale este isoscel.



La finalul fiecărei unități de învățare completează un chestionar asemănător cu cel de mai jos (Tabel pentru observarea sistematică a activității și comportamentului elevilor pe parcursul unității de învățare):

Cel mai mult mi-a plăcut	
Cel mai puțin m-a interesat	
Am întâmpinat dificultăți în a înțelege	
Am nevoie de clarificări în legătură cu	

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ



Nu este suficient să ai dreptate; trebuie să poți arăta de ce ai dreptate.

Într-o lume plină de informații, capacitatea de a analiza afirmații și argumente este mai importantă ca oricând. Logica matematică oferă instrumentele necesare pentru a gândi clar, riguros și critic.

Propoziția. Operații cu propoziții logice.

Predicate și cuantificatori

În universul matematicii, spre deosebire de vorbirea curentă unde nuanțele și ambiguitatea sunt permise, utilizăm enunțuri care nu lasă loc de interpretare. În acest scop, în logica matematică definim **propoziția** ca fiind un **enunț care este fie adevărat, fie fals, dar niciodată ambele în același timp**. Această proprietate reprezintă două principii: principiul *terțului exclus* și *principiul necontradicției*. Valoarea de adevăr a unei propoziții p se notează cu $v(p)$ și este 1 (pentru Adevărat) sau 0 (pentru Fals).

EXEMPLE ȘI CONTRAEXEMPLE

Pentru a distinge clar o propoziție matematică de un simplu enunț, analizăm câteva exemple:

- Enunțul p : „ $3 + 5 = 8$ ” este o *propoziție adevărată* ($v(p) = 1$).
- Enunțul q : „Numărul π este un număr rațional” este o *propoziție falsă* ($v(q) = 0$); aceasta este propoziție validă, deoarece îi putem stabili valoarea de adevăr (falsul).

În schimb, următoarele *nu sunt propoziții logice*:

- Enunțurile interogative sau exclamative: „Cât este ceasul?” sau „Rezolvă exercițiul!” (acestea nu pot fi nici adevărate, nici false).
- Enunțurile ambigue sau care depind de o variabilă necuantificată: „El este un elev silitor” sau „ $x + 2 = 5$ ”. Expresia $x + 2 = 5$ devine propoziție doar dacă îi atribuim o valoare specifică lui x (de exemplu, pentru $x = 3$ devine adevărată) sau dacă folosim *cuantificatori* (precum „există x ”); când x nu este particularizat, $x + 2 = 5$ este o propoziție cu variabile, adică un *predicat*.

1. Operații cu propoziții logice

În logică, putem construi propoziții noi pornind de la una sau mai multe propoziții date (numite *propoziții simple*), folosind *conectori logici*. Valoarea de adevăr a unei *propoziții compuse* depinde exclusiv de valoarea de adevăr a propozițiilor componente.

A. Negația („non”)

Negația este o operație unară (se aplică unei singure propoziții) care inversează valoarea de adevăr.

DEFINIȚIE

Negația propoziției p , notată $\bar{p}$ sau $\neg p$, este propoziția care este falsă când p este adevărată și adevărată când p este falsă.

Valoarea de adevăr a unei propoziții o vom consemna mai ușor cu ajutorul unui tabel, numit *tabel de adevăr*, astfel:

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

EXEMPLE

- p : „Numărul 15 este divizibil cu 2.” ($v(p) = 0$);
- $\bar{p}$: „Numărul 15 **nu** este divizibil cu 2.” ($v(\bar{p}) = 1$).

Atenție (contraexemplu lingvistic)!

Negația propoziției „Toți elevii sunt prezenți” **nu** este „Niciun elev nu este prezent”, ci „Există cel puțin un elev care nu este prezent”.

B. Conjuncția („și”)

Tabel de adevăr

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

DEFINIȚIE

Conjuncția a două propoziții p și q , notată $p \wedge q$, este propoziția care este adevărată numai dacă ambele propoziții sunt adevărate simultan.

Mnemonică: Conjuncția este un conector „exigent”: o singură falsitate compromite totul.

EXEMPLU

În cazul p : „2 este număr par” ($v(p) = 1$) și q : „3 este număr par” ($v(q) = 0$), obținem $v(p \wedge q) = 0$.

C. Disjuncția („sau”)

Tabel de adevăr

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

DEFINIȚIE

Disjuncția a două propoziții p și q , notată $p \vee q$, este propoziția care este adevărată dacă cel puțin una dintre propoziții este adevărată.

OBSERVAȚIE

În matematică, „sau” este *inclusiv*, ceea ce înseamnă că disjuncția este adevărată chiar și când ambele propoziții sunt adevărate (spre deosebire de limbajul curent, unde „sau” poate fi exclusiv: „Mergem la mare sau la munte” – ori o destinație, ori alta, dar nu ambele).

EXEMPLU

În cazul (p : „ $1 + 2 = 3$ ” ($v(p) = 1$)) $\vee$ (q : „ $1 + 2 < 0$ ” ($v(q) = 0$)) obținem $v(p \vee q) = 1$!

Reflecție: În contextul prezentat, valoarea de adevăr a propoziției compuse „ $3 \leq 3$ ” nu ar mai trebui să fie o provocare!

D. Implicația („dacă... atunci”)

Tabel de adevăr

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

DEFINIȚIE

Implicația $p \rightarrow q$ este propoziția care este falsă într-un singur caz: atunci când p (ipoteza) este adevărată, iar q (concluzia) este falsă. În toate celelalte cazuri, implicația este adevărată.

EXEMPLU (PARADOXUL IMPLICAȚIEI)

Propoziția „Dacă $3 = 4$, atunci eu, Ionescu, sunt Napoleon” este Adevărată.

Raționament: Ipoteza ($3 = 4$) este Falsă (0). Conform tabelului, din fals rezultă orice (adevărat sau fals), iar raționamentul rămâne valid logic.

E. Echivalența („dacă și numai dacă”)

Tabel de adevăr

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

DEFINIȚIE

Echivalența $p \leftrightarrow q$ este propoziția adevărată atunci când p și q au aceeași valoare de adevăr (fie ambele adevărate, fie ambele false).

Legătura cu implicația: $p \leftrightarrow q$ se scrie explicit ca o propoziție compusă astfel: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

EXEMPLU

„ $\sqrt{10} > 3$ dacă și numai dacă $10 \geq 9$ ”. Aceasta este o *echivalență* adevărată.

Echivalența logică

Propoziția $p \leftrightarrow q$ se citește „ p dacă și numai dacă q ”; aceasta este adevărată când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr (ambele adevărate sau ambele false), caz în care vorbim despre o echivalență logică (a valorilor de adevăr).

EXEMPLU

$p: 2 + 3 < 0 \leftrightarrow q: (2 \text{ este impar})$ este o propoziție logică adevărată, deși nu exprimă o echivalență între cele două conținuturi.

UTILE DE REȚINUT

Utilizând *conectorii logici*, putem lega între ele propozițiile p, q, r obținând *propoziții compuse* sau formule ale calculului propozițional. Enunțurile care sunt adevărate pentru orice valori de adevăr ale componentelor le numim *tautologii*. Formulele care sunt false pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor componente reprezintă *contradicții*.

Exemple de tautologii:

1. Legea dublei negații: $(\overline{\overline{p}}) \leftrightarrow p$
2. Legile lui De Morgan:
 $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ și $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
3. Negarea implicației: $\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow p \wedge \overline{q}$
4. Modus Ponens: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
5. Contrapозиția: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$
6. Tranzitivitatea:
 $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
7. Principiul terțului exclus: $p \vee \overline{p}$
8. Principiul necontradicției: $(p \wedge \overline{p})$

EXEMPLE PRACTICE DE NEGARE A PROPOZIȚIILOR

- Pentru propoziția $p: 2 < 3$ sau $2 = 3$ ($2 \leq 3$), negația este $\overline{p}: 2 > 3$.
- Pentru propoziția $q: 3 \in A$ și $3 \in B$ ($3 \in A \cap B$), negația este $\overline{q}: 3 \notin A$ sau $3 \notin B$.
- Pentru propoziția $r: \text{„Dacă plouă, deschid umbrela”}$, negația este $\overline{r}: \text{„Plouă și nu deschid umbrela”}$ (deoarece $\overline{a \rightarrow b} \leftrightarrow a \wedge \overline{b}$)!

● Ce îți spune medicul (*negația unei disjuncții*): „**Nu** este indicat să faci abuz de produse făinoase **sau** dulciuri.” Cum traduci tu asta (*conjuncția negațiilor*): „**Nu** este indicat să faci abuz de produse făinoase și **nu** este indicat să faci abuz de dulciuri.”

2. Predicate și cuantificatori

Un *predicat pe o mulțime* M (numită și *universul predicatului*) este un enunț care conține una sau mai multe *variabile* și care, prin particularizarea variabilelor cu elemente din M , devine propoziție.

EXEMPLE

- predikat unar: $p(x): x + 2 = 9, x \in \mathbb{Z}$ (x unica variabilă);
- predikat binar: $q(x, y): x + y = 7, x, y \in \mathbb{R}$ (două variabile, x și y).

Identificarea predicatelor prin mulțimi

Dacă predikatul $p(x)$ este definit pe mulțimea M ($x \in M$), *mulțimea de adevăr* A a predicatului este submulțimea valorilor $x \in M$ pentru care $p(x)$ este propoziție adevărată.

Operații cu predicate

Pe mulțimea M , se consideră predicatele $p(x)$ (identificat prin mulțimea de adevăr A) și $q(x)$ (identificat prin mulțimea de adevăr B):

1. **Negația** ($\neg p(x)$): corespunde mulțimii de adevăr $C_M A = M \setminus A$ (complementara mulțimii A în raport cu M)

2. **Conjunția** ($p(x) \wedge q(x)$): corespunde intersecției de mulțimi, $A \cap B$.

3. **Disjuncția** ($p(x) \vee q(x)$): corespunde reuniunii de mulțimi, $A \cup B$.

4. **Implicația** ($p(x) \rightarrow q(x)$): corespunde relației de incluziune, $A \subset B$.

5. **Echivalența** ($p(x) \leftrightarrow q(x)$): corespunde relației de egalitate a mulțimilor, $A = B$.



EXEMPLU

Se consideră predicatele $p(x)$: x divide 5, $x \in \mathbb{Z}$, respectiv $q(x)$: $2x - 1 \geq 4$, $x \in \mathbb{N}$. În aceste condiții, evidențiem mulțimile de adevăr pentru:

- $p(x)$ este adevărat pentru $x \in \{1, -1, 5, -5\}$
- $q(x)$ este adevărat pentru $x \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$
- $\overline{p(x)}$: $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-5, -1, 1, 5\}$, $\overline{q(x)}$: $x \in \{0, 1, 2\}$
- $p(x) \wedge q(x)$ este adevărat pentru $x \in \{5\}$ (intersecția mulțimilor),

$$p(x) \vee q(x): x \in \{1, 3, 4, 5, 6, \dots\} \cup \{-1, -5\}$$

Există și alte moduri de a transforma operațiile cu predicate în propoziții, folosind *cuantificatori*.

Cuantificatori

Există două tipuri de cuantificatori care transformă predicatele în propoziții. În continuare, se consideră predicatul $p(x)$, $x \in E$.

1. Cuantificatorul existențial ($\exists$)

Cu predicatul $p(x)$, $x \in E$, putem forma o *propoziție* fie *adevărată*, dacă există cel puțin un element $x_1 \in E$ astfel încât $p(x_1)$ să fie adevărată, fie *falsă*, dacă pentru orice $x \in E$, $p(x)$ este falsă.

Această propoziție se citește: „Există cel puțin un x din mulțimea E astfel încât $p(x)$ adevărată” (*propoziție existențială*).

Notăție: $(\exists x)p(x)$ sau $(\exists x \in E), p(x)$.

2. Cuantificatorul universal ($\forall$)

Cu predicatul $p(x)$, $x \in E$, putem forma o *propoziție* fie *adevărată*, dacă pentru orice alegere a lui x din E , $p(x)$ este adevărată, fie *falsă*, dacă există cel puțin un $x_1 \in E$ pentru care $p(x_1)$ este falsă.

O astfel de propoziție se citește: „Oricare ar fi x , $p(x)$ adevărată” (*propoziție universală*).

Notăție: $(\forall x)p(x)$ sau $(\forall x \in E), p(x)$.

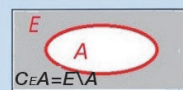
Operații logice și operații cu mulțimi

Negație (NON) și Complementara

$$\neg p \longrightarrow C_E A$$

Negare

Complementară

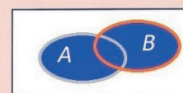


Disjuncția (SAU) și Reuniunea

$$p \vee q \longrightarrow A \cup B$$

Sau

Reuniune

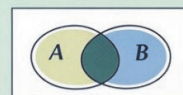


Conjunția (ȘI) și Intersecția

$$p \wedge q \longrightarrow A \cap B$$

Și

Intersecție



Implicația și Incluziunea

$$p \rightarrow q \longrightarrow A \subseteq B$$

Implicație

Incluziune

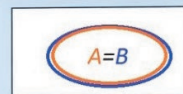


Echivalența și Egalitatea

$$p \leftrightarrow q \longrightarrow A = B$$

Echivalență

Egalitate



Reguli de negație pentru cuantificatori

Pentru a nega propozițiile care conțin cuantificatori, se aplică regulile:

$$\overline{(\forall x)p(x)} \leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}, \text{ respectiv } \overline{(\exists x)p(x)} \leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}.$$

Regulă practică: Prin negare, $\forall$ se transformă în $\exists$, iar $\exists$ se transformă în $\forall$, urmat de *negația predicatului*.

Cazul predicatelor în două variabile

$$\begin{aligned} \overline{(\exists x)(\exists y)p(x,y)} &\leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\overline{p(x,y)}, & \overline{(\forall x)(\exists y)p(x,y)} &\leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\overline{p(x,y)}, \\ \overline{(\exists x)(\forall y)p(x,y)} &\leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\overline{p(x,y)}, & \overline{(\forall x)(\forall y)p(x,y)} &\leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\overline{p(x,y)}. \end{aligned}$$



RETINEM

Numim **contraexemplu** un exemplu care *infirmă* o propoziție presupusă adevărată (numărul 4 este contraexemplu pentru afirmația „Mulțimea numerelor naturale de o cifră conține doar numere impare”). În acest sens, propoziția $(\forall x)p(x)$ este falsă dacă *există un contraexemplu*, adică există un element x_0 pentru care $p(x_0)$ este o propoziție falsă.

REFLECTĂM

Propoziția „Orice număr natural de forma $6k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}$, este prim” este falsă. Identifică un contraexemplu!

EXERCITII PROPUSE

Propoziții și valori de adevăr

- Identifică, dintre următoarele enunțuri, pe cele care sunt propoziții. Stabilește valoarea de adevăr a acestor propoziții:
 - Anul 1956 nu a fost an bisect.
 - Triunghiul are patru laturi?
 - Triunghiul are patru laturi.
 - El a fost la teatru.
 - Ionescu a fost la teatru.
 - Ce toamnă frumoasă!
 - $\max(\sqrt{10}; \pi) = \sqrt{10}$;
 - $\min(-2; -\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$;
 - $[-\sqrt{2}] = 0$, unde notația $[.]$ semnifică partea întreagă;
 - $\{-3, 25\} = 0, 25$ (partea fracționară);
 - $\{\pi\} = 0, 14$.
- (**Activitate în pereche**) Considerăm propozițiile: p : „Triunghiul ABC este isoscel.”; q : „Triunghiul ABC este dreptunghic.”; r : „Triunghiul ABC este echilateral.”. Formulați propozițiile: $\overline{p}$; $p \vee q$; $p \wedge q$; $q \rightarrow r$; $\overline{p} \wedge q$; $q \vee r$; $r \rightarrow p$.
- Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 3, 5\}$. Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate?
 - $(1 \in A) \vee (0 \in B)$;
 - $(4 \in A) \vee (5 \in B)$;
 - $(6 \in A) \vee (6 \in B)$;
 - $(2 \in A) \wedge (2 \in B)$;
 - $(3 \in A) \wedge (0 \in B)$;
 - $(4 \in A) \wedge (4 \in B)$;
 - $(4 \in A) \rightarrow (6 \in A)$;
 - $(1 \in A) \rightarrow (2 \in B)$.
- Stabilește valoarea de adevăr:
 - Dacă $2 + 3 = 6$, atunci $1 + 2 = 3$.
 - Dacă $3|9$, atunci $5 > 6$.
 - Dacă $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$, atunci $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 + 5$ nu este pătrat perfect.
- Dacă p și q sunt adevărate, iar r este falsă, stabilește valoarea de adevăr pentru:
 - $(p \wedge q) \vee r$;
 - $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$;
 - $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee \overline{r}$;
 - $(p \rightarrow q) \wedge r$;
 - $(p \rightarrow r) \rightarrow q$;
 - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$;
 - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$.
- Scrive sub forma „dacă p , atunci q ”:
 - Rombul care are un unghi drept este pătrat.
 - Suma a două numere raționale este număr rațional.
 - Nu iese fum fără foc.

7. (**Activitate în pereche**) Individual, scrieți negația propozițiilor, apoi comparați între voi:
- a) $2 \in \mathbb{N}$ sau $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; b) $3 \in \mathbb{Q}$ și $2 \mid 10$; c) 5 este număr natural par și $\frac{2}{3} > 0$;
d) Punctele A și B aparțin dreptei d. e) Merg și privesc. f) Merg, privesc și nu înțeleg.
g) Dacă dorm, mă odihnesc. h) Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci are un unghi ascuțit.
i) Dacă plec, mă voi întoarce foarte curând.
8. (**Activitate pe grupe**) Se consideră mulțimile de numere $E = \mathbb{Z}$, $A = \left\{-3, -\sqrt{5}, -\frac{1}{2}, 0, 1, 4, 2\sqrt{5}\right\}$, $B = \{x \in E \mid |x| \leq 3\}$ și predicatele $p(x): x \in E, x \in \mathbb{R}$; $q(y): y \in A, y \in \mathbb{R}$; $r(z): z \in B, z \in \mathbb{R}$, toate trei cu mulțimea din care iau valori variabilele (universul predicatelor) egală cu mulțimea numerelor reale.
- a) Care este *domeniul de adevăr* (mulțimea valorilor variabilei, din universul predicatului, pentru care propozițiile devin adevărate) al fiecăruia dintre predicatele $p(x), q(y)$, respectiv $r(z)$?
- b) Stabiliți valorile de adevăr ale propozițiilor:
- i. $p(1)$ sau $q(3)$; ii. $q(4)$ și $r(0)$;
iii. $\left(p\left(\frac{1}{2}\right) \text{ sau } q(-\sqrt{5})\right) \rightarrow r(4)$; iv. $\text{non } r(-2)$.
- c) Determinați domeniul de adevăr, justificând răspunsul, pentru fiecare predicat compus:
- i. $p(x)$ sau $q(x)$; ii. $q(x)$ și $r(x)$;
iii. $r(x) \rightarrow p(x)$; iv. $\text{non } r(z)$.
- d) În imaginea alăturată este prezentată legătura între operatorii logici $\neg$ (*non*), $\vee$ (*sau*), $\wedge$ (*și*), $\rightarrow$ (*implică*), $\leftrightarrow$ (*echivalent*) și operațiile cu mulțimi. Verificați rezultatele pe care le-ați obținut la punctul 3 cu relațiile din panou.
- e) Formulați predicatul compus care are domeniul de adevăr $B \setminus A$.
- f) Propuneți spre reflecție, unei alte grupe, cel puțin o nouă cerință bazată pe contextul dat inițial și *reciproc*!

Exerciții propuse predicate

1. Se consideră predicatul $p(x): x > x^2, x \in \mathbb{R}$. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor: $p(0), p(1/2), p(2/3), p(-2), p(\sqrt{3})$.
2. Se consideră predicatul $p(x, y): 2x^2 - y = 3, x, y \in \mathbb{R}$. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
- a) $p(1, 1)$; b) $p(-\sqrt{2}, 1)$; c) $p(4, -5)$; d) $p\left(\frac{13}{3}, \sqrt{31}\right)$.
3. (**Activitate în pereche**) Exprimați în limbajul predicatelor:
- a) Ecuația $2x + 3 = 5$ are cel puțin o soluție reală.
b) Ecuația $2x + 3y = -5$ are cel puțin o soluție reală.
c) Produsul oricăror numere întregi consecutive este număr par.
d) Sistemul $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ are soluție reală.
4. (**Activitate pe grupe**) Pe mulțimea numerelor întregi, se consideră predicatele $p(x): 3 \mid x$ și $q(x): 9 \mid x$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
- a) $p(12)$; b) $q(3)$; c) $p(0)$; d) $(\forall x)p(x)$; e) $(\exists x)q(x)$; f) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$; g) $(\forall x)(p(x) \vee q(x))$;
h) $(\exists x)(\overline{p(x)} \wedge q(x))$; i) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x))$; j) $(\exists x)(q(x) \rightarrow p(x))$; k) $(\forall x)(q(x) \rightarrow p(x))$.
5. Se consideră predicatul $p(x, y): 2x + 3y = 1, x, y \in \mathbb{Z}$. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
- a) $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$; b) $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$; c) $(\forall y)(\exists x)p(x, y)$.
6. Știind că $x, y, z \in \mathbb{R}$, determină valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
- a) $(\forall x)(\forall y)\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$; b) $((\forall y)(\exists x)x + y = 0) \rightarrow ((\exists x)(\forall y)x + y = 0)$;
c) $((\exists x)(\forall y)x + y = 0) \rightarrow ((\forall y)(\exists x)x + y = 0)$; d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + y + z = 0 \rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz)$;
e) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \rightarrow x + y + z = 0)$; f) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx)$;
g) $(\exists x)(\exists y)x^3 + y^3 \leq xy(x + y)$.



7. Scribe predicatelor următoare cu ajutorul operațiilor logice:

- a) $x \in A \cup B$; b) $x \in A \cap B$; c) $x \in A \setminus B$; d) $x \notin B \setminus A$.

8. Demonstrează că:

- a) $x \in (-3, 3) \Rightarrow |x| < 3$; b) $x \in [0, \infty) \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$; c) $[x] = -6 \Rightarrow x \in [-6; -5)$; d) $\frac{x}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2x}{3} \in \mathbb{Z}$;
e) $7|(2x + 5) \Rightarrow 7|(x - 1)$; f) $4x + 5 = 7 \Leftrightarrow 2x - 3 = -2$; g) $3x < 6 \Rightarrow -2x + 1 > -3$.

9. Demonstrează că:

- a) $|x - y| + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0)$; b) $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$;
c) $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$; d) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$.

10. Scribe cu ajutorul cuantificatorilor logici:

- p : Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5 \geq 4$; q : Oricare $a \in \mathbb{N}$ există $b \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < b$.
Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor p și q .

11. Demonstrează că:

- a) $(\exists n \in \mathbb{N}) \left| \frac{2n+3}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{100}$, apoi aproximează cu două zecimale exacte fracția $\frac{2n+3}{3n+1}$ pentru $n = 3^{10}$;
b) $13 | (5x + 7y) \Leftrightarrow 13 | (4x + 3y), x, y \in \mathbb{Z}$.

12. (Activitate în pereche) Se consideră E o mulțime nevidă, fixată, și $\mathcal{P}(E)$ mulțimea submulțimilor sale (numită și *familia* submulțimilor). Demonstrați că $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ avem:

- a) $A \cap B = B \cap A$; b) $A \cup B = B \cup A$; c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
g) $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$; h) $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.

13. Demonstrează că:

- a) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$; b) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
c) $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; d) $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

14. a) Se cunoaște că $(\forall y \in \mathbb{R}) 8xy - 12y + 2x - 3 = 0$ este propoziție adevărată. În acest context dat, determină valorile reale ale lui x .

b) Determină numărul real m astfel încât: $2xy - 3x - 3y + m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.



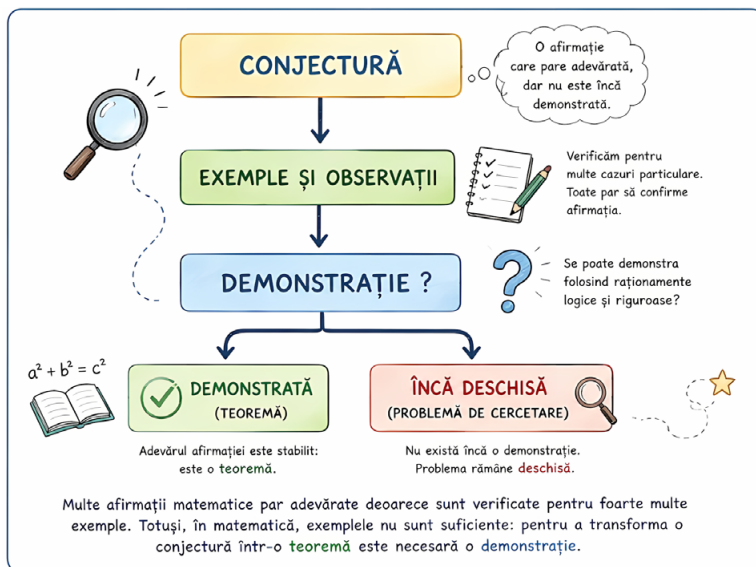
TEMĂ DE PORTOFOLIU – INVESTIGAȚIE

Matematica are încă mistere de descoperit

O afirmație matematică despre care se presupune că este adevărată, dar pentru care nu există încă o demonstrație, se numește **conjectură**. În prezent există mii de probleme deschise în matematică, unele formulate de sute de ani și încă nerezolvate.

Sarcină de lucru – Alege una dintre conjecturile următoare: *Conjectura numerelor prime gemene*; *Conjectura Goldbach*; *Ipoteza Riemann*. Realizează o scurtă investigație (1-2 pagini) în care să prezinți: 1. enunțul conjecturii; 2. câteva exemple care o susțin; 3. anul în care a fost formulată și numele matematicianului asociat; 4. de ce este considerată importantă; 5. stadiul actual al cercetărilor.

Reflecție finală – Răspunde în 5-10 rânduri la întrebarea: *Crezi că orice afirmație matematică adevărată poate fi demonstrată?* Argumentează-ți răspunsul.



Tipuri de propoziții matematice

În matematică ai întâlnit enunțuri fundamentale, uneori numite explicit ca de exemplu: *axiome, definiții, proprietăți, leme, teoreme, consecințe*. În cele ce urmează analizăm structura acestor enunțuri, pentru a le recunoaște și a le diferenția.

► Axioma

Este un enunț pe care îl admitem ca fiind o *propoziție adevărată fără demonstrație*. Ea reprezintă „regula jocului”, sau convenția matematică pe care construim diverse teorii.



EXEMPLU CLASIC: AXIOMA PARALELELOR (EUCLID)

„Printr-un punct exterior unei drepte putem construi o unică dreaptă paralelă cu cea dată”.



REFLECTĂM - CONEXIUNE CU REALITATEA

Gândește-te la *Constituția* unei țări sau la *regulile fundamentale* ale șahului. În cazul șahului, faptul că „nebunul se mișcă doar pe diagonală” este o *axiomă* a șahului. Nu demonstrăm de ce, ci acceptăm regula pentru a putea juca.

Accesează <https://www.presidency.ro/ro/presedinte/constitutia-romaniei> și extrage două enunțuri, norme juridice în acest caz, care să corespundă sensului de axiomă. Motivează alegerea făcută.



► Definiția

Este o propoziție adevărată care *introduce o noțiune nouă*, precizându-i înțelesul.



EXEMPLU

„Spunem că două plane sunt paralele atunci când intersecția lor este vidă”.



REFLECTĂM

Atunci când introducem prin definiție un anume obiect, trebuie să ținem cont de structura logică: *genul proxim* (categoria largă din care face parte) și *diferența specifică* (ce îl face unic – ce îl determină).



EXEMPLU (DEFINIȚIA BISECTOAREI)

Definiție: Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ este o semidreaptă a planului... (*genul proxim*: este o semidreaptă).

Care semidreaptă? Acea (unică) semidreaptă $[BD]$, interioară unghiului, pentru care $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ (*diferența specifică*).



REFLECTĂM

Similar cu exemplul dat, pe grupe, reflectați la definițiile liniilor importante în triunghi, evidențiind *genul proxim* și *diferența specifică*.

► Teorema

Este o propoziție adevărată, adevărul ei decurgând dintr-o demonstrație pe baza axiomelor, definițiilor sau altor teoreme anterior demonstrate.



Structura unei teoreme:

Majoritatea teoremelor sunt propoziții de tipul implicației $p \rightarrow q$ sau echivalenței $p \leftrightarrow q$. Ai învățat că implicația $p \rightarrow q$ se citește „Dacă p , atunci q ” și este util să reții că:

- p (ipoteza) este o condiție *suficientă* pentru q .
- q (concluzia) este o condiție *necesară* pentru p .



EXEMPLU

„Dacă două unghiuri sunt drepte, atunci unghiurile sunt congruente”.

Astfel, condiția ca unghiurile să fie drepte este *suficientă* pentru a fi congruente, dar nu și *necesară* (ele pot fi congruente și având altă măsură comună, de exemplu de 30°).



RETINE

Atunci când o propoziție p este *suficientă și necesară* pentru q , scriem $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ sau $p \leftrightarrow q$ (echivalență). În acest caz, citim „ p dacă și numai dacă q ”. Acestea se numesc adesea *teoreme de caracterizare* și succed definiției.



EXEMPLU

„Un patrulater convex este paralelogram *dacă și numai dacă* unghiurile sale opuse sunt congruente”.

► Propoziții derivate din teoreme

Considerăm implicația $p \rightarrow q$, pe care o numim și *teoremă* și în raport cu care putem forma următoarele propoziții derivate:

- *Reciproca* ($q \rightarrow p$): propoziție care *nu este întotdeauna adevărată*; dacă este adevărată, teorema $p \rightarrow q$ se numește *teoremă directă*, iar $q \rightarrow p$ se numește *teoremă reciprocă* (sau, simplu, *reciprocă*).
- *Contrara* ($\bar{p} \rightarrow \bar{q}$): propoziție care, de asemenea, *nu este întotdeauna adevărată*.
- *Contrapозиția* ($\bar{q} \rightarrow \bar{p}$): propoziție care este **întotdeauna adevărată** dacă teorema directă este adevărată (sunt echivalente logic).



EXEMPLE

Teorema lui Pitagora

Directa: Dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic în A , atunci $AB^2 + AC^2 = BC^2$. *Reciproca:* Dacă în $\triangle ABC$ are loc relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$, atunci $\triangle ABC$ este dreptunghic în A . (*Adevărată*)

Reflecție: Formulează *contrara* și *contrapозиția* și precizează valoarea de adevăr a fiecăreia.

Criteriul de divizibilitate cu 9

Directa: Dacă a, b, c sunt cifre și $(a + b + c) : 9 \Rightarrow \overline{abc} : 9$. *Reciproca:* Dacă a, b, c sunt cifre și $\overline{abc} : 9 \Rightarrow (a + b + c) : 9$. *Contrara:* Dacă $(a + b + c)$ nu este divizibil cu 9 $\Rightarrow \overline{abc}$ nu este divizibil cu 9”. (*Adevărată*).

Reflecție: Se consideră predicatele $p(x, y): x = y$ și $q(x, y): x^2 = y^2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

- $p \Rightarrow q$ este *Adevărată*
- Contrara $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ („Dacă $x \neq y$, atunci $x^2 \neq y^2$ ”) este *Falsă* (contraexemplu: $x = -2, y = 2$).



OBSERVAȚIE

În cazul în care ipoteza unei teoreme constă din mai multe propoziții legate prin conectorul $\wedge$, putem vorbi despre mai multe propoziții „reciproce” prin schimbarea unei părți din ipoteză cu concluzia.



REFLECTĂM

Identificați la nivelul clasei 1-2 exemple, formulați toate reciprokele posibile și stabiliți în fiecare caz în parte valoarea de adevăr. Este adevărată afirmația următoare: „Dacă o implicație admite mai multe formulări reciproce, atunci fie toate reciprokele sunt adevărate, fie false.”? Justificați.

Tipuri de raționamente

În rezolvarea problemelor operăm cu propoziții (*judecăți succesive*, înlănțuite). Un raționament este valid atunci când concluzia decurge corect din ipoteze (*premise*).

Atenție: Un raționament poate fi corect logic, dar să ducă la o concluzie falsă atunci când pornește de la premise false!

Exemplu de raționament corect cu concluzie falsă:

- Premisă 1: Unii oameni sunt păsări. (*Fals*)
- Premisă 2: Toate păsările pot înota. (*Fals*)
- Concluzie: Unii oameni pot înota.

În acest caz, *logica este validă*: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$, dar *adevărul factual lipsește*.



EXEMPLU – PROBLEMĂ DE LOGICĂ „MISTERUL MAȘINILOR”

Ion, Dinu, Nelu și Anton au mașini de culori diferite: alb, galben, roșu, negru. Se cunoaște că:

1. Anton și Ion *nu* au mașină roșie.

2. Dinu *nu* are mașină neagră.

3. Posesorul mașinii negre este pictor, i-a făcut un portret lui Nelu și îl va cunoaște pe Ion. (*Deci mașina neagră nu e a lui Nelu, nici a lui Ion*).

Ce culoare are mașina lui Anton?

Rezolvare prin tabel de adevăr:

Din ipoteze deducem că *mașina neagră* nu e a lui Dinu, Nelu sau Ion, deci *este a lui Anton*.

În cele ce urmează, plecând de la un set de propoziții considerate *premise*, vom vedea cum putem desprinde concluzii și care sunt acestea. Vom numi astfel de raționamente ca fiind *deductive*.

	Ion	Dinu	Nelu	Anton
Galben				
Alb				
Roșu	X			X
Negru	X	X	X	

Tipuri de raționament deductiv

A. Raționamentul direct (*Modus Ponens*)

Este bazat pe propoziția $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$, adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor ce o compun (*tautologie*).

Exemplu: Știm că $AB = AC \rightarrow \triangle ABC$ este isoscel. Dacă măsurăm și găsim $AB = 8, AC = 8$, concluzionăm direct că triunghiul este isoscel.

B. Raționamentul prin contrapozitie (*Modus Tollens*)

Este bazat pe tautologia $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$.



EXEMPLU

Se consideră $m \in \mathbb{N}$. Demonstrează că „Dacă $2^m + 1$ este prim, atunci m este o putere a lui 2”.

Demonstrație: Arătăm că „Dacă m *nu* este putere a lui 2, atunci $2^m + 1$ *nu* este prim”. Dacă m nu este putere a lui 2, $m = 2^k \cdot l$ (l impar > 1) și $2^m + 1 = (2^{2^k})^l + 1$, care se divide cu $2^{2^k} + 1$, deci $2^m + 1$ nu este prim.

C. Raționamentul prin reducere la absurd (*ppa*)

Pentru a demonstra $p \rightarrow q$, presupunem concluzia q ca fiind falsă (deci $\bar{q}$ ar fi adevărată) și încercăm să ajungem la o *contradicție* ($r \wedge \bar{r}$ întotdeauna falsă).



EXEMPLU DIN GEOMETRIE

Se consideră a, b și c drepte coplanare distincte. Dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că $a \cap c = \{A\}$. Deoarece $a \parallel b$ și $c \parallel b$, ar însemna că prin punctul A trec două paralele distincte la dreapta b , ceea ce intră în contradicție cu *Axioma paralelelor*. Deci presupunerea e falsă, așadar $a \parallel c$ reprezintă un adevăr în contextul dat.

Reflecție: Dacă enunțul din exemplu nu conține precizarea (ipoteza) de drepte distincte, mai obținem aceeași consecință? Discutați la nivelul clasei.

Alt exemplu: Demonstrează că $2^n + 1$ nu este divizibil prin 7, oricare ar fi n număr natural.

Vom presupune *contrariul*: există un număr natural k pentru care $7 \mid 2^k + 1$ și căutăm o *contradicție*: $2^k + 1 = 2^k + 2^3 - 7 = 2^3(2^{k-3} + 1) - 7$, de unde deducem că $7 \mid 2^{k-3} + 1$. Repetând raționamentul, obținem $7 \mid 2^{k-6} + 1$ ș.a.m.d. Fie $p \in \mathbb{N}$ cel mai mare număr pentru care $7 \mid 2^{k-3p} + 1$, însă pentru această valoare maximă, $k - 3p \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow 2^{k-3p} + 1 \in \{2, 3, 5\}$, contradicție.

Reflectăm: Folosind faptul că $2^3 = 8 = 7 + 1$, discutați la nivelul clasei și dezvoltați un alt raționament decât cel exemplificat.

Curiozități logice

1. Paradoxul

Este o afirmație care, deși pare să urmeze un raționament corect, duce la o *concluzie care se contrazice pe sine* sau *contrazice intuiția comună*. Paradoxurile sunt importante în matematică deoarece ne arată limitele sistemelor noastre de gândire și necesitatea unor definiții riguroase.



EXEMPLU CELEBRU

Paradoxul bărbierului (Bertrand Russell, 1872-1970, filozof, logician, matematician englez)

Imaginează-ți un sat izolat unde există o regulă strictă: „*Bărbierul satului îi bărbierește pe toți bărbații din sat care nu se bărbieresc singuri și numai pe aceștia*.”. Cine îl bărbierește pe bărbier?

Avem două posibilități, ambele ducând la o contradicție:

- Dacă bărbierul se bărbierește singur, atunci el face parte din categoria celor care se bărbieresc singuri, iar regula spune că el nu are voie să îi bărbierească pe aceștia; așadar, *nu se poate bărbieri singur*.

- Dacă bărbierul nu se bărbierește singur, atunci el intră în categoria celor care trebuie bărbieriți de bărbier, adică de el însuși, așadar el **trebuie** să se bărbierească singur.

Concluzie: O astfel de situație este *imposibilă logic*. Acest paradox simplu a zguduit lumea matematicii la începutul secolului al XX-lea, demonstrând că „teoria mulțimilor” (așa cum era ea definită atunci) avea fisuri și trebuia reconstruită cu mai multă atenție.

Cu siguranță ți-am stârnit curiozitatea! Pentru a afla mai multe, poți interoga un asistent IA sau să lec-turezi materiale scrise pe această temă (de exemplu, eseul matematicianului român Solomon Marcus).

2. Conjectura

Este o afirmație matematică ce *pare a fi adevărată*, bazată pe observații, intuiție sau dovezi parțiale, dar care *nu a fost încă demonstrată sau infirmată riguros*.

În momentul în care o conjectură este demonstrată, ea devine o *teoremă*. Dacă se găsește un singur contraexemplu care o infirmă, conjectura este considerată falsă.

EXEMPLU

Conjectura lui Goldbach (Christian Goldbach, 1690-1764, matematician prusac) – propusă în 1742, este una dintre cele mai vechi și mai faimoase probleme nerezolvate din *teoria numerelor*:

„Orice număr întreg par mai mare decât 2 poate fi scris ca sumă de două numere prime.”

- **Verificări** (cazuri particulare): $4 = 2 + 2$; $8 = 3 + 5$; $20 = 7 + 13$.

- **Statut actual:** Deși a fost verificată prin calcul computerizat pentru numere extrem de mari (până la 4×10^{18}), nu există încă o demonstrație matematică universală care să confirme că este valabilă pentru *toate* numerele pare. Dacă ți se pare provocator, solicită unui asistent IA să îți facă o prezentare a încercărilor în timp de rezolvare a conjecturii.

3. Propoziții indecidabile în logica matematică

O *propoziție indecidabilă* este un enunț în cadrul unui sistem axiomatic despre care se poate demonstra că *nu poate fi nici demonstrat, nici infirmat* folosind regulile și axiomele aceluia sistem. Acest concept a fost revoluționat de Kurt Gödel (1906-1978) prin *Teoremele de Incompletitudine* (1931), care au arătat că în orice sistem formal suficient de complex (cum este *aritmetica*) vor exista întotdeauna „adevăruri” care nu pot fi dovedite în interiorul sistemului respectiv.



EXEMPLU

Ipoteza continuului (CH) – una dintre cele mai cunoscute propoziții indecidabile din teoria mulțimilor (sistemul ZFC):

„Nu există nicio mulțime a a cărei mărime (cardinalitate) să fie strict între mărimea mulțimii numerelor întregi ($\aleph_0$) și mărimea mulțimii numerelor reale (c sau $2^{\aleph_0}$). $\aleph_0 < |X| < 2^{\aleph_0}$.”

De ce afirmația este indecidabilă? În 1940, Kurt Gödel a demonstrat că *Ipoteza continuului nu poate fi infirmată* folosind axiomele standard ale teoriei mulțimilor. În 1963, Paul Cohen (1934-2007, matematician american) a demonstrat că aceasta *nu poate fi nici demonstrată* folosind aceleași axiome.

Concluzie: *Ipoteza continuului este independentă de axiomele standard:* poți alege să o accepți ca adevărată sau ca falsă, creând astfel sisteme matematice diferite, dar coerente.

Activități de învățare și explorare

A. Atelierul de traducere: Din „Limba naturală” în „Limba matematică”

Scop: dezvoltarea capacității de a *schematiza* informația

Sarcină: Transformă următoarele fraze în formule logice, notând propozițiile simple cu p, q, r .

„Dacă plouă (p) și nu am umbrelă (q), atunci mă ud (r).”

„Merg la film (p) dacă și numai dacă vine Andrei (q) sau vine Maria (r).”

„Nu este adevărat că dacă învăț (p) iau notă mică (q).”

B. Laboratorul de dezbateri

Scop: înțelegerea cuantificatorilor $\forall, \exists$ și a negației.

Context: Un elev formulează o serie de *propoziții universale*. Colegul de bancă găsește câte un *contraexemplu* pentru a demonstra că unele propoziții sunt false.

Formulări ($\forall$)	Sarcină: Găsește contraexemplul ($\exists$)	Verdict
„Toate numerele prime sunt impare.”	<i>Exemplu:</i> Numărul 2 este prim și este par.	Fals
„Orice pătrat perfect se termină în 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.”	<i>Reflectăm:</i> Există vreun pătrat terminat în 2, 3, 7 sau 8?	Adevărat
„Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > x$.”	<i>Exemplu:</i> Pentru $x = 0,5 \Rightarrow 0,25 \not> 0,5$.	Fals
„Toate patrulatele cu laturi egale sunt pătrate.”	<i>Exemplu:</i> Rombul care nu are unghiuri drepte.	Fals

Cerință: Pe baza exemplului, la nivelul clasei, organizați-vă în perechi de echipe; în cadrul fiecărei perechi de echipe, membrii uneia formulează propoziții universale, cealaltă trebuie să justifice valoarea de adevăr a acestora, în cazul falsului prin identificarea/construirea unui contraexemplu. Schimbați apoi rolurile între echipele din pereche. Realizați câte un poster pe modelul prezentat în manual, iar la final faceți *turul galeriei*. Adăugați posterul la Portofoliul individual.

C. Proiect interdisciplinar. Logica și informatica

Scop: aplicarea operatorilor logici în tehnologie.

Descriere: Calculatoarele funcționează într-un sistem binar (cel puțin până în momentul de față): 1 (Adevărat/Curentul trece) și 0 (Fals/Curent oprit).

- **Serie (AND):** becul se aprinde doar dacă ambele întrerupătoare sunt închise ($p \wedge q$).
- **Paralel (OR):** becul se aprinde dacă cel puțin un întrerupător este închis ($p \vee q$).

Problemă: Un sistem de alarmă (S) se declanșează dacă:

1. Senzorul de mișcare (m) este activat **sau**
 2. Senzorul de geam spart (g) este activat **și** alarma nu a fost dezactivată din cod (d).
- Scrie formula logică de funcționare a alarmei.

D. Joc de rol: „Detectivul logician”

Scop: utilizarea regulilor de deducție (directă/prin contrapozitie).

Scenariu: Se investighează dispariția unei prăjituri din frigider. Există următoarele indicii (premise adevărate):

$P1$: Dacă urmele de pe podea sunt de făină, atunci făptașul este brutarul sau patiserul.

$P2$: Urmele de pe podea sunt, într-adevăr, de făină.

$P3$: Dacă făptașul ar fi fost brutarul, ar fi lăsat ușa deschisă.

$P4$: Ușa a fost găsită închisă.

Cine a furat prăjitura? Demonstrează pas cu pas.

Rezolvare (model):

Din $P1$ și $P2$ (deducție directă) $\Rightarrow$ Făptașul este brutarul sau patiserul. (concluzia 1)

Din $P3$ și $P4$ (contrapozitie: $p \rightarrow q$, dar $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$) $\Rightarrow$ Făptașul **nu** este brutarul (pentru că ușa nu era deschisă). (concluzia 2)

Din concluzia 1 (brutar sau patiser) și concluzia 2 (Nu brutar) $\Rightarrow$ Făptașul este patiserul.



PROBLEME ȘI EXERCITII PROPUSE

1. Enunță, folosind *sintagma* „dacă și numai dacă”:
a) teorema lui Thales; b) teorema lui Pitagora; c) criteriul de divizibilitate cu 4.
2. Enunță sub forma „o condiție necesară și suficientă ca... este ca...”:
a) teorema de paralelism a planelor; b) cazurile de congruență ale triunghiurilor.
3. a) Justifică faptul că $6 \mid a$ este o condiție suficientă ca $6 \mid ab$, oricare ar fi a și b numere întregi.
b) Demonstrează că $p = 6k + 1$ sau $p = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$ este o condiție necesară ca p să fie număr prim.
c) Justifică faptul că o condiție necesară și suficientă ca un dreptunghi să fie pătrat este ca diagonalele sale să fie perpendiculare.
4. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex, $BD \cap AC = \{O\}$, iar M și N sunt mijloacele laturii AD , respectiv BC . Demonstrează că:
a) $DO = OB$ și $\angle DAC = \angle BCA$ reprezintă o condiție necesară și suficientă ca $ABCD$ să fie paralelogram.
b) $MN = \frac{AB + CD}{2}$ este o condiție necesară și suficientă ca $ABCD$ să fie trapez.
5. (Activitate pe grupe: abordați cerințele individual, apoi prezentați și discutați la nivelul grupei)
Se consideră propozițiile:
a: Dacă măsura unui unghi al unui triunghi isoscel este 60° , atunci triunghiul este echilateral.
b: Dacă măsura unui unghi al unui triunghi isoscel este 30° , atunci lungimea catetei opuse unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.
c: Dacă două numere sunt pare, atunci suma lor este pară.
d: Orice dreptunghi este patrulater inscriptibil.
e: Dacă $m \mid (n + p)$ și $m \mid n$, atunci $m \mid p$, unde m, n și p sunt numere întregi.
Arătați că propozițiile sunt adevărate, apoi enunțați reciprocele lor și stabiliți dacă sunt adevărate.
6. Justifică prin contrapozitie:
a) Dacă $a_1 + a_2 + \dots + a_5 \geq 15$, atunci $(\exists) i \in \overline{1,5}, a_i \geq 3$.
b) Dacă $a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 360$, atunci $\exists i \in \overline{1,6}$ astfel încât $a_i \leq 60$.
c) Șase drepte distincte sunt coplanare. Arată că cel puțin o pereche dintre aceste drepte formează un unghi de măsură mai mică sau egală cu 60° . Generalizare.

7. Demonstrează prin *reducere la absurd*:

a) $\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

c) Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o unică perpendiculară pe respectiva dreaptă.

d) Nu există numere întregi care împărțite la 6 să dea restul 3, iar împărțite la 3 să dea restul 2.

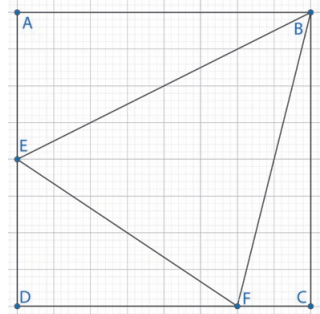
8. (**Activitate în pereche**) Persoanele Ionescu, Vasilescu, Costescu și Georgescu au prenumele Ioana, Vasile, Cristiana și George, dar fiecare inițială a numelui diferă de cea a prenumelui. Ionescu și Cristiana au ochii căprui, George are ochii albaștri, iar Vasile are ochii verzi. Cum se numesc cei patru?9. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$. Justifică faptul că cel puțin unul dintre numerele $a(a + b + c)$, $b(a + b + c)$ și $c(a + b + c)$ este mai mare sau egal cu 0.10. Demonstrează că nu există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{x + 1, 2x - 3, -x + 5\} = \{3x - 1, -2x, x - 4\}$.11. Se consideră a, b și c numere reale nenule, oricare două distincte și de același semn. Demonstrează că:

a) $\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$;

b) $\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \neq \emptyset$.

12. a) Demonstrează că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x + y = xy$, atunci $x \leq 2$ sau $y \leq 2$.b) Rezolvă în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.13. Știind că $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ sunt numere naturale distincte din mulțimea $\{1, 2, \dots, 11\}$, demonstrează că produsul $(a_1 + 1)(a_2 + 2) \dots (a_{11} + 11)$ este număr par.14. (**Principiul cutiei**) Demonstrează că printre oricare 6 numere întregi există cel puțin 2 a căror diferență este divizibilă cu 5.15. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$. Demonstrează că $(\forall \epsilon > 0, |a - b| < \epsilon) \Rightarrow a = b$.16. a) În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu latura de 4 unități, împărțit într-o rețea. Punctele E și F sunt poziționate pe nodurile rețelei. Demonstrează că aria triunghiului BEF este număr rațional.

b) Dacă acoperim planul cu o rețea de pătrate de latură 1, se poate construi un triunghi echilateral cu toate vârfurile în „nodurile” rețelei?



17. Formulează un raționament prin care să justifici că nu există triunghiuri

cu înălțimi egale cu $1, \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}$. Compară raționamentul tău cu cel al colegului de bancă.18. Determină valoarea de adevăr a propozițiilor: a) $(\forall)x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$; b) $(\exists)x \in \mathbb{R}, x^4 - x + 1 = 0$.

19. O monedă se află într-unul dintre cuferele A, B, respectiv C. Pe cufer este scris:

A: Moneda se află aici.

B: Moneda nu se află aici.

C: Moneda nu se află în caseta A.

Află caseta în care se află moneda, știind că cel mult una dintre inscripții este adevărată.

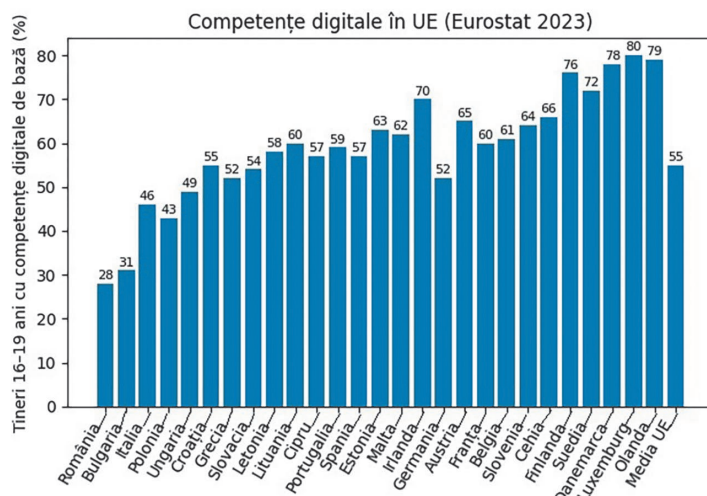
Creează propriul „Paradox” sau propria „Problemă a cuferelor” și propune-o colegului spre rezolvare.

20. (**Componentă a Portofoliului**) Graficul alăturat prezintă procentul tinerilor (16–19 ani) cu competențe digitale de bază, din țările UE (Eurostat, 2023). Media UE este 55%.A. *Lectură grafică:*

1. Scrie câte două țări, în fiecare caz în parte, pentru care procentul tinerilor cu competențe digitale de bază este:

a) sub 40%; b) între 50% și 60%;

c) peste 70%.



2. Care era diferența procentuală între procentajele corespunzătoare României și mediei UE în anul 2023?

3. Ce valoare de adevăr are propoziția: „Toate țările UE au procentajul tinerilor cu competențe digitale de bază peste 50%.”? Justifică răspunsul.

B. Propoziții logice, predicate:

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde x reprezintă oricare dintre țările UE.

$p(x)$: „Țara x apare în grafic cu procentaj de peste 50% competențe digitale în rândul tinerilor.”

$q(x)$: „Țara x are procentaj de competențe digitale în rândul tinerilor peste media UE.”

1. Scrie în limbaj natural $p(x)$ și $q(x)$; $p(x)$ sau $q(x)$; $\text{non } p(x)$.

2. Dă exemple de țări pentru care:

a) $p(x)$ este adevărată; b) $q(x)$ este falsă; c) $p(x)$ și $q(x)$ este adevărată.

C. Negații:

1. Scrie negația propozițiilor:

a) „Toate țările UE au procentajul tinerilor cu competențe digitale de bază peste 50%, conform datelor Eurostat 2023.”

b) „Există țări UE cu competențe digitale de bază în rândul tinerilor de peste 70%, conform datelor Eurostat 2023.”

2. Verifică pe grafic dacă propozițiile anterioare sunt adevărate.

D. Implicație și echivalență:

1. Analizează propoziția: „Dacă o țară are peste 70% competențe digitale în rândul tinerilor, atunci aceasta este peste media UE”. Stabilește valoarea de adevăr a propoziției și justifică pe baza graficului.

2. Analizează propoziția: „O țară este peste media UE dacă și numai dacă are procentajul tinerilor cu competențe digitale de bază peste 55%”. Stabilește valoarea de adevăr a propoziției, justificând.

E. Modelare:

Definim mulțimile $A = \{\text{țări cu peste 50}\%$, $B = \{\text{țări peste media UE}\}$, unde procentajul se referă la tineri cu competențe digitale de bază.

1. Descrie în cuvinte $A \cap B$, $A \cup B$ și $B \setminus A$.

2. Dă exemple de țări care se regăsesc în $A \cap B$, $A \cup B$, respectiv în $B \setminus A$.

3. Este adevărat că $B \subset A$? Argumentează.

F. Utilizarea aplicațiilor de inteligență artificială:

1. Cere unei aplicații de IA să reformuleze propoziția „România este sub media UE.”, apoi să genereze negația acesteia.

2. Verifică dacă răspunsul IA este corect matematic.

3. Cere IA să formuleze o altă propoziție logică pe baza graficului și analizeaz-o.

G. Gândire critică:

Afirmația „Dacă media UE este 55%, atunci majoritatea țărilor au peste 55%.” este corectă? Explică diferența dintre medie și majoritate.



H. Accesează pagina web <https://ec.europa.eu/eurostat/web/education-and-training/database?etrans=ro> care conține date oficiale pentru Uniunea Europeană. Alege un grafic care să conțină date despre țările UE, inclusiv România. Realizează un studiu similar cu cel prezentat pe baza graficului competențelor digitale. Formulează concluzii relevante pentru România, în comparație cu media UE și cu date corespunzătoare altor țări din UE. Propune o direcție de acțiune prin care indicatorul României s-ar putea îmbunătăți în viitor.



Metoda inducției matematice

Introducere: de la particular la general

Metodele de raționament întâlnite până acum permit obținerea de rezultate (propoziții) particulare din propoziții cu caracter general (leme, teoreme etc.). În matematică este posibil și invers, adică să deducem și să demonstrăm enunțuri generale plecând de la propoziții particulare adevărate.

Exemplu: Vrem să calculăm suma: $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1), n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Prin particularizarea lui n cu 1, 2, 3, respectiv 4, obținem: $S_1 = 1 = 1^2$; $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$; $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$; $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Aceste rezultate sugerează un tipar, dar este suficient pentru a-l extinde la orice valoare n ?

Enunț general: $S_n = n^2, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Este această propoziție adevărată? Răspunsul este afirmativ, dar nu justificat doar prin calculele anterioare, ci va fi demonstrat în cele ce urmează. Spunem în acest caz că facem un *raționament inductiv*.

Avertisment (riscurile generalizării pripite)

Să considerăm predicatul $P(n)$: „ $2^{2^n} + 1$ este număr prim”, $n \in \mathbb{N}$. Propoziția $(\forall) n \in \mathbb{N}, P(n)$ este o afirmație celebră a matematicianului *Pierre Fermat* (1601-1665) și aproape un secol s-a crezut că este posibil să fie adevărată. El se baza pe observația că propozițiile $P(0), P(1), P(2), P(3)$ și $P(4)$ sunt adevărate, fără a mai verifica valoarea de adevăr a propoziției $P(5)$. Faptul că $P(5)$ este falsă a fost descoperit de matematicianul elvețian *Leonhard Euler* (1707-1783) în 1732, arătând că $2^{2^5} + 1$ are ca divizor pe 641.

Concluzie: Examinând valorile de adevăr ale unor propoziții particulare, obținute dintr-un predicat de variabilă număr natural, *nu suntem îndreptățiți să tragem o concluzie generală*. Propozițiile de tip $(\forall) n, P(n)$, unde $P(n)$ este un predicat de variabilă număr natural, se pot demonstra printr-o altă metodă, numită *inducție matematică*.

În ce constă metoda inducției matematice?

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat și un predicat $p(n), n \in \mathbb{N}, n \geq m$. Vrem să demonstrăm că propoziția $(\forall) n \geq m, p(n)$ este adevărată. Metoda constă în verificarea următoarelor două condiții (pași sau etape):

I. *Etapa de verificare (inițială):* $P(m)$ este adevărată (m este valoarea de inițiere pentru variabila n).

II. *Etapa de demonstrație (pasul de inducție propriu-zisă):* Implicația $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ este adevărată pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \geq m$.

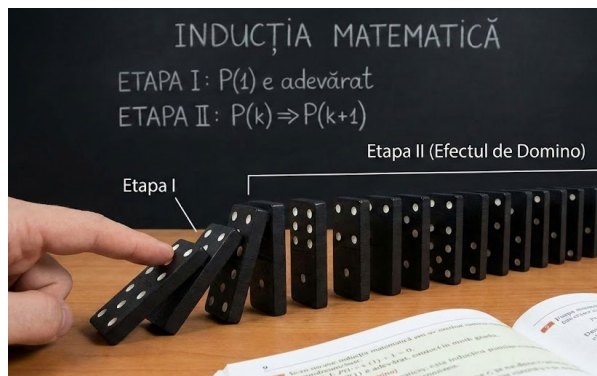
Doar în condițiile în care se obține adevăr la fiecare dintre cele două etape, propoziția $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq m, P(n)$ este adevărată!

Metoda inducției matematice constă în parcurgerea acestor două etape și se bazează pe o axiomă a „construcției” mulțimii numerelor naturale. Din acest motiv, mai poartă numele de *principiul inducției matematice*.

Din punct de vedere intuitiv, aceasta arată un mod de a obține „din aproape în aproape” propoziții adevărate, pornind de la o anumită propoziție adevărată (inițială):

- din faptul că $P(m)$ este adevărată, utilizând (II), deducem că $P(m + 1)$ este adevărată;
- din faptul că $P(m + 1)$ este adevărată, utilizând (II), deducem că $P(m + 2)$ este adevărată ș.a.m.d.

În etapa a II-a demonstrăm că implicația este adevărată, admițând că $P(k)$ este adevărată și demonstrând că $P(k + 1)$ este adevărată. În acest caz, $P(k)$ devine ipoteză, numită *ipoteză de inducție*.





REFLECTĂM

Imaginează-ți o scară care pare că are o infinitate de trepte, dar pe care nu le poți vedea în totalitatea lor. Legat la ochi, în ce condiții ai fi sigur că vei putea urca scara? Ai avea nevoie de certitudinea că există o primă treaptă? Dar că, după ce ai pășit pe o anumite treaptă, există certitudinea că există și următoarea? Este suficient să avem doar una dintre certitudini? Justifică.



EXEMPLE

Exemplul 1: Suma numerelor naturale impare

Revenim la contextul prezentat la începutul lecției și dorim să demonstrăm că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

Notăm $p(n)$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ și demonstrăm prin inducție matematică:

I. $p(1)$ adevărată (am verificat că $S_1 = 1^2$).

II. Admitem $p(k)$ adevărată, pentru oricare $k \geq 1$, și demonstrăm că $p(k + 1)$ este adevărată.

Formăm propoziția $p(k + 1)$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$. Suma din membrul stâng este: $[1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ (unde am înlocuit paranteza pătrată cu k^2 , conform ipotezei de inducție și am prelucrat algebric suma obținută). Rezultă $p(n)$ adevărată, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Observație: Imaginea alăturată furnizează un alt mod de a calcula suma $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$. Este suficient doar să privim desenul (avem o „demonstrație fără cuvinte”).

**Exemplul 2:** Inegalități

Să demonstrăm, prin raționament inductiv și deductiv, propoziția: $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5 \implies 2^n > n^2$.

Demonstrație:

Pentru început, construim raționamentul inductiv, evidențiind predicatul: $p(n)$: $2^n > n^2$, $n \geq 5$.

I. Verificăm că $p(5)$ este adevărată: $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$ (Adevărat). În acest caz, valoare de inițiere este 5.

II. Presupunem $p(k)$ adevărată pentru oricare $k \geq 5$ și demonstrăm că $p(k + 1)$ este adevărată: $p(k + 1)$: $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

Din ipoteza de inducție, $2^k > k^2$. Prin înmulțire cu 2 a ambilor membri, avem $2^{k+1} > 2k^2$. Este suficient să demonstrăm că $2k^2 > (k + 1)^2$ pentru oricare $k \geq 5$. Verifică prin calcul algebric! În concluzie, cum la ambele etape I și II am obținut adevăr, rezultă că $2^n > n^2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, ceea ce trebuia demonstrat.

Raționament deductiv. Observăm că $2^5 > 5^2$, $2^6 > 6^2$, Presupunem că există numere naturale n , mai mari decât 5, pentru care $2^n \leq n^2$. Considerăm p cel mai mic astfel de număr, deci $2^p \leq p^2$ și $p > 5$. Pentru că p este cel mai mic, atunci $2^{p-1} > (p - 1)^2$. Dar $2^p = 2^{p-1} \cdot 2 > (p - 1)^2 \cdot 2$. Deci $p^2 \geq 2^p > 2(p - 1)^2$. Rezultă $p^2 - 4p + 2 < 0 \implies p \in \{1, 2, 3\}$, ceea ce este în contradicție cu $p \geq 5$.

Exemplul 3: Identități cu produse

Considerăm predicatul $p(n)$: $\frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3) \dots (n + n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Demonstrație:

I. $p(1)$: $\frac{2}{1} = 2^1$ (Adevărat).

II. Presupunem $p(k)$ adevărată pentru oricare $k \geq 1$ și demonstrăm $p(k + 1)$:

$$\frac{(k + 2)(k + 3) \dots (2k)(2k + 1)(2k + 2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k - 1)(2k + 1)} = 2^{k+1}.$$

Prelucrăm membrul stâng folosind ipoteza $p(k)$:

$$\frac{(k + 1)(k + 2) \dots (2k)}{1 \cdot 3 \dots (2k - 1)} \cdot \frac{(2k + 1)(2k + 2)}{(k + 1)(2k + 1)} = 2^k \cdot \frac{2(k + 1)}{k + 1} = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$

2^k din ipoteză

Din I și II (adevărate) deducem că $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.



Exemplul 4: Inegalități cu sume

Să demonstrăm prin inducție propoziția $(\forall)n \in \mathbb{N}, n \geq 1: p(n): \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \dots + \frac{1}{8n} > \frac{5}{8}$ (suma din membrul stâng are $4n$ termeni).

Demonstrație:

I. $p(1): \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{5}{8}$ adevărată. Verifică prin calcul numeric!

II. Presupunem $p(k)$ adevărată pentru oricare $k \geq 1$ și demonstrăm

$$p(k+1): \left(\frac{1}{4k+5} + \dots + \frac{1}{8k} + \frac{1}{8k+1} + \dots + \frac{1}{8k+8} \right) > \frac{5}{8}.$$

Trebuie să verificăm diferența dintre suma din $p(k+1)$ și suma din $p(k)$. Sunt 8 termeni care apar în plus în $p(k+1)$ față de $p(k): \frac{1}{8k+1}, \dots, \frac{1}{8k+8}$. De asemenea, sunt 4 termeni care apar în plus în $p(k)$ față de $p(k+1): \frac{1}{4k+1}, \frac{1}{4k+2}, \frac{1}{4k+3}, \frac{1}{4k+4}$. Raționamentul se reduce la a demonstra că diferența dintre suma termenilor suplimentari în $p(k+1)$ și suma termenilor suplimentari în $p(k)$ este mai mare sau egală cu 0. Verifică prin calcul algebric inegalitatea, folosind și gruparea termenilor! În concluzie, am obținut adevăr pentru ambele etape I și II, deci propoziția universală din enunț este adevărată.

**OBSERVAȚII**

1. *Importanța etapei I:* chiar dacă această etapă se reduce, de regulă, la o verificare simplă, aceasta este la fel de importantă ca etapa a II-a. Dacă omitem etapa I putem obține contradicții (nu poți iniția urcarea pe scară dacă prima treaptă lipsește!)

● *Exemplu:* Fie predicatul $p(n): \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} < n-1, n \in \mathbb{N}$.

Prin verificare, vei obține că $p(k) \rightarrow p(k+1)$ este adevărată, dar propoziția universală (cerința de demonstrat) este falsă pentru că $p(1)$ este falsă.

2. *Cazuri particulare:* nu orice propoziție matematică în care se face referire la un număr natural oarecare poate fi demonstrată prin inducție. Este cazul unor inegalități.

● *Exemplu:* $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Această inegalitate nu poate fi demonstrată direct prin inducție, deși este adevărată. Se caută o inegalitate mai „tare” (de tranzit) pentru a face pasul inductiv!

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**Variantă a inducției matematice**

Există și alte variante ale inducției matematice. Una dintre ele se enunță astfel:

Se consideră $m \in \mathbb{N}$ fixat și $p(n)$ un predicat, $n \geq m$, care verifică ambele condiții:

1. $p(m)$ adevărată;

2. $(p(m) \wedge p(m+1) \wedge \dots \wedge p(k)) \rightarrow p(k+1)$ pentru $k \geq m$.

În aceste condiții, $(\forall)n \geq m, p(n)$ este propoziție adevărată.

Aria de aplicabilitate a variantei este mai restrânsă, varianta fiind utilă atunci când $p(k)$ adevărată este insuficientă pentru a demonstra $p(k+1)$ adevărată.

**EXEMPLU**

Determină mulțimea $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}_+$ astfel încât $a_1 = 1$ și $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} = \frac{n+1}{2} \sqrt{a_n}$.

Rezolvare:

● Pentru $n = 2$, egalitatea devine $1 + \sqrt{a_2} = \frac{3\sqrt{a_2}}{2} \implies \sqrt{a_2} = 2 \implies a_2 = 4$.

● Pentru $n = 3$, $a_3 = 9$.

● Demonstrăm prin inducție că $a_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Utilizăm varianta de inducție.

Ipoteza de inducție se referă la $p(1), p(2), \dots, p(k)$ adevărate, adică $a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, \dots, a_k = k^2$. Calculând, obținem $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_{k+1}} = \frac{k(k+1)}{2} \sqrt{a_{k+1}}$ și, egalând cu membrul drept, obținem ecuația din care rezultă $a_{k+1} = (k+1)^2$.



EXERCITII PROPUSE

Pentru toate cerințele următoare, dacă nu se precizează altfel, utilizează inducția matematică pentru a le rezolva, știind că $n \in \mathbb{N}$.

1. a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1;$ b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1;$
c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, n \geq 1;$ d) $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}, n \geq 1;$
e) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, x \neq 1, n \geq 1.$
2. a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, n \geq 1;$
b) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}, n \geq 1.$
3. a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, n \geq 1;$ b) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}, n \geq 1.$
4. a) $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n}, n \geq 2;$
b) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}, x \text{ real}, x \neq 1, n \geq 1;$
c) $(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)\dots(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}}) = \frac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x+x^2}.$
5. a) $2^n \geq n+1, n \geq 1;$ b) $3^n \geq 1+2n, n \geq 1;$
c) $(1+x)^n \geq 1+nx, x \text{ real}, x > -1$ (Inegalitatea lui Bernoulli).
6. a) $2^n > n^2, n \geq 5;$ b) $2^n > n^3, n \geq 10;$ c) $2^n \geq n^4, n \geq 16.$
7. a) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, n \geq 1;$ b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \geq 2;$
c) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2, n \geq 1.$
8. a) $(5^n - 1) : 4, n \in \mathbb{N};$ b) $(9^{2n+1} + 1) : 10, n \in \mathbb{N};$ c) $(n^3 + 5n) : 6, n \in \mathbb{N};$
d) $n^3 + 3n^2 + 2n : 6, n \in \mathbb{N};$ e) $(9^{n+1} - 2^{n+1}) : 7, n \in \mathbb{N};$ f) $(3^{2n+1} + 2^{n+2}) : 7, n \in \mathbb{N};$
g) $(4^n + 15n - 1) : 9, n \in \mathbb{N};$ h) $10^n + 18n - 28 : 27, n \in \mathbb{N}.$
9. $\sum_{k=1}^n [k^2(n+1-k)] = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}, n \geq 1.$
10. a) $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, n \in \mathbb{N}^*;$
b) $(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$, oricare ar fi $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ (Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz).
11. Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ sunt vârfurile unui poligon convex, atunci:
a) numărul dreptelor determinate de aceste puncte este $\frac{n(n-1)}{2};$
b) numărul triunghiurilor cu vârfurile în aceste puncte este $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$
12. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este egal cu $2^n, n \geq 0.$
13. $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n), \forall a, b \text{ reale}, a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$
14. Dacă $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ demonstrează Identitatea lui Hermite: $\left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{m+1}{n} \right\} + \left\{ \frac{m+2}{n} \right\} + \dots + \left\{ \frac{m+n-1}{n} \right\} = \frac{n-1}{2}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .
15. Se consideră predicatul $p(n)$ definit pe $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$.
a) Enunță propozițiile $p(1), p(2), p(3), p(4)$ și determină valoarea lor de adevăr.
b) Demonstrează prin inducție că $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 1$.

16. a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2;$

b) Arată că: $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*; \prod_{k=2}^{2^n - 1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n}{2^n - 1}, n \geq 2.$

17. a) Demonstrează că, dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$, atunci $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}, \forall n \geq 1.$

b) Justifică faptul că, dacă $a + b = c + d$ și $ab = cd$, atunci $a^n + b^n = c^n + d^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

c) Determină numerele $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ pentru care avem: $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

18. Demonstrează că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \leq n$. Dedu că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \geq 1.$

19. Identitatea lui Abel: Dacă $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, unde n natural nenul, demonstrează că

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (b_1 - b_2) S_1 + (b_2 - b_3) S_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n) S_{n-1} + b_n S_n$, unde $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Calculează apoi sumele:

i) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k};$ ii) $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot 2^k.$

20. Alexandra lansează o provocare ecologică pe o rețea de socializare numită „Ziua Verde”. Regulile sunt simple:

1. În prima zi (Etapa 1), doar Alexandra plantează un copac.

2. În ziua următoare, ea trebuie să provoace exact două persoane noi să facă la fel.

3. În fiecare zi ulterioară, fiecare persoană nouă care a intrat în provocare în ziua precedentă trebuie să provoace alte două persoane noi.

Nimeni nu iese din joc, dar doar cei nou recrutați trimit provocarea mai departe.

Alexandra vrea să calculeze câți oameni vor fi implicați în total (numărul de copaci plantați) după n zile. Ea observă că:

● Ziua 1: 1 persoană (Alexandra)

● Ziua 2: $1 + 2 = 3$ persoane

● Ziua 3: $1 + 2 + 4 = 7$ persoane

Ea intuiește formula: numărul total de participanți după n zile este $2^n - 1$.

Folosind inducția matematică, demonstrează că formula Alexandrei este corectă pentru orice număr natural $n \geq 1$.



21. Într-un joc de strategie, „Space Tycoon”, dezvoltatorii au o regulă aparte pentru magazinul de resurse: nu poți cumpăra orice cantitate de combustibil. Există doar două tipuri de canistre disponibile:

● canistră mică: 3 credite;

● canistră mare: 5 credite.

Un jucător de pe forum susține că: „Deși pare restrictiv, de fapt poți cheltui exact orice sumă (număr de credite) vrei, atât timp cât suma este mai mare sau egală cu 8 credite.”

Demonstrează, folosind metoda inducției matematice, că orice sumă naturală $S \geq 8$ poate fi achitată folosind doar canistrele de 3 și 5 credite (există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $S = 3a + 5b$, pentru oricare $S \geq 8$).

Indicație: Poți observa că pentru a demonstra $P(k + 1)$ nu vei folosi neapărat doar $P(k)$. Dacă vrei să obții suma $k + 1$, poți adăuga pur și simplu o canistră de 3 credite la o sumă deja existentă? (Sugerează ideea că dacă ai putut forma suma $k - 2$ adăugând o canistră de 3, obții $k + 1$. O astfel de abordare antrenează gândirea logică dincolo de simpla înlocuire în formulă!)



Test de evaluare sumativă

- Se consideră propozițiile: p : „ $\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$ ”, respectiv q : „ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$ ”.
 - (1p) Stabilește valoarea de adevăr a propoziției p .
 - (1p) Stabilește valoarea de adevăr a propoziției q .
 - (1p) Determină valoarea de adevăr a propoziției compuse $p \rightarrow q$.
- Se consideră x și y două numere reale și următoarele propoziții logice:

p : „Suma $x + y$ este un număr irațional.”

q : „Cel puțin unul dintre numerele x și y este irațional.”

 - (1p) Formulează în limbaj natural propoziția $p \rightarrow q$ (implicația) și demonstrează, folosind metoda reducerii la absurd, că aceasta este o propoziție adevărată.
 - (1p) Scrie reciproca implicației de la punctul a). Stabilește valoarea de adevăr a acestei reciproce, justificând răspunsul riguros (printr-o demonstrație sau printr-un contraexemplu).
-  (2p) O companie de securitate cibernetică instalează un centru de date. Pentru a asigura o comunicare instantanee și pentru a preveni căderea rețelei, arhitecții folosesc o topologie de tip „mesh complet”. Acest lucru înseamnă că fiecare server trebuie să fie conectat direct cu absolut toate celelalte servere printr-un cablu distinct de fibră optică.
Un inginer de sistem observă că pentru a conecta 2 servere are nevoie de 1 cablu, pentru 3 servere are nevoie de 3 cabluri, iar pentru 4 servere are nevoie de 6 cabluri. El deduce următoarea formulă: pentru o rețea de n servere ($n \geq 2$), numărul total de cabluri necesare, notat cu C_n , este dat de relația:

$$C_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$
 Folosind metoda inducției matematice, demonstrează că formula descoperită de inginer este corectă pentru orice număr de servere $n \geq 2$.
- Se consideră numerele reale x și y , precum și următoarea propoziție matematică: „Dacă $xy + 2x + 3y + 6 \neq 0$, atunci $x \neq -3$ sau $y \neq -2$.”
 - (1p) Identifică și scrie ipoteza (p) și concluzia (q) ale implicației date.
 - (1p) Formulează propoziția $\neg q \rightarrow \neg p$ (contrapozitia).
 - (1p) Demonstrează valoarea de adevăr a contrapozității, justificând, și apoi, pe baza echivalenței logice, formulează concluzia finală cu privire la propoziția inițială.

Timp de lucru: 50 de minute

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.





ȘIRURI ȘI PROGRESII

2

„Matematica este știința descoperirii
tiparelor.”

— Keith Devlin (n. 1947), profesor la
Stanford University și autor al multor cărți
de popularizare a matematicii.

În natură, tehnologie și societate apar
adesea succesiuni de valori care urmează
reguli precise. Șirurile și progresiile ne ajută
să descriem aceste modele și să anticipăm
evoluția lor.

Introducere

În multe situații din viața reală apar **liste ordonate de numere** care nu sunt alese întâmplător. Aceste numere descriu evoluția unei cantități în timp sau în raport cu un anumit pas: lună după lună, nivel după nivel, etapă după etapă.



Fig. 1

Suma economisită la sfârșitul unei luni

Fig. 2

Numărul de locuri într-o sală de spectacole

Fig. 3

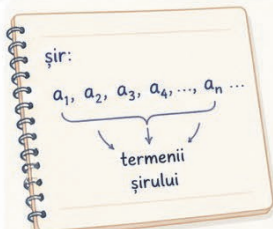
Distanța parcursă de un obiect în etape succesive

Fig. 4

Nivelurile de dificultate ale unui joc



NE AMINTIM



Un **șir** este caracterizat de **regula** după care se obțin termenii săi.

Uneori, această regulă este foarte simplă și ușor de recunoscut; alteori, ea descrie o creștere constantă sau o multiplicare repetată.



Dintre toate șirurile, un interes deosebit îl prezintă cele în care relația dintre termenii consecutivi este aceeași, deoarece acestea apar frecvent în matematică și în aplicații practice.

Ele poartă numele de **progresii**.

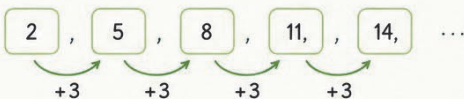


O **progresie** este un șir în care fiecare termen se obține din termenul precedent prin aceeași regulă.

EXEMPLE DE REGULI DE FORMARE A UNOR ȘIRURI

PROGRESIE ARITMETICĂ

Termenii consecutivi diferă cu același număr: d (diferența).



Regula:

$$a_1 = 2, d = 3$$

$$a_n = a_{n-1} + 3 \text{ (pentru } n \geq 2 \text{)}$$

Alte exemple:

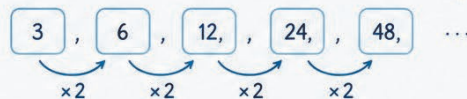
- 7, 10, 13, 16, ... ($d = 3$)
- -4, -1, 2, 5, ... ($d = 3$)
- 20, 15, 10, 5, ... ($d = -5$)



Fiecare termen se obține adunând (sau scăzând) același număr.

PROGRESIE GEOMETRICĂ

Fiecare termen se obține înmulțind cu același număr: q (rația).



Regula:

$$a_1 = 3, q = 2$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 \text{ (pentru } n \geq 2 \text{)}$$

Alte exemple:

- 2, 4, 8, 16, ... ($q = 2$)
- 5, 15, 45, 135, ... ($q = 3$)
- 81, 27, 9, 3, ... ($q = \frac{1}{3}$)



Fiecare termen se obține înmulțind (sau împărțind) cu același număr.

APLICAȚII PRACTICE

Interese bancare



Depozit care crește cu o rată constantă în fiecare an. (progresie geometrică)



Economii lunare

Economisești aceeași sumă în fiecare lună. Suma totală crește aritmetic. (progresie aritmetică)



Populația bacteriilor

Se dublează la fiecare oră în condiții ideale. (progresie geometrică)



Scări, trepte, etaje

Înălțimea fiecărei trepte este aceeași. (progresie aritmetică)

► Ai completat termeni lipsă.

Exercițiu: Descoperă regula de formare a termenilor următori și continuă lista cu încă 3 numere care respectă regula: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \dots$

► Ai descoperit reguli de formare și ai anticipat continuarea unei liste de numere.

Exercițiu: Completează termenii lipsă din șirul următor: $0^2, 1^2, 2^2, ?, 4^2, 5^2, ?, 7^2, \dots$



EXEMPLE DE ȘIRURI DIN VIAȚA REALĂ

Exemplul 1

Un elev citește „Cel mai iubit dintre pământeni”, de Marin Preda, publicată de o editură într-un singur volum de 1 050 de pagini. Numărul de pagini citite în primele zile este: 15, 20, 25, 30, ... În câte zile termină de citit cartea, dacă regula „+5” se păstrează pe tot parcursul lecturii?

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie făcut un calcul simplu respectând regula de „+5” la fiecare zi, până când suma paginilor citite este de cel puțin 1 050. Încearcă să introduci în Excel formulele potrivite pentru a obține rezultatul dorit. Dacă ai introdus comenzi corecte de calcul, tabelul arată ca în imaginea alăturată.

Caseta galbenă conține o sumă de pagini care depășește 1 050, ceea ce înseamnă că elevul va termina cartea în ziua 19. De remarcat este faptul că în ultima zi citește doar 15 pagini (cele rămase), chiar dacă și-a îmbunătățit substanțial capacitatea de lectură.

Se observă că:

- fiecare număr de pe prima linie, începând cu al doilea, se obține din precedentul adunat cu 5:

$$z_{X+1} = z_X + 5;$$

- diferența dintre două numere consecutive de pe a doua linie nu este mereu aceeași, dar se identifică relația: $p_{X+1} - p_X = z_{X+1}$.

Ambele secvențe de numere, citite pe liniile tabelului, sunt niște **regularități numerice**.

Exemplul 2

O cultură de bacterii se dezvoltă astfel:

- inițial sunt 100 de bacterii;
- la fiecare oră, numărul lor se dublează.

Numărul de bacterii la sfârșitul fiecărei ore formează șirul: 100, 200, 400, 800, ...

În acest caz:

- fiecare termen se obține prin **înmulțirea** termenului anterior cu același număr;
- raportul dintre doi termeni consecutivi este constant.

Un astfel de șir se numește **progresie geometrică**.

Exemplul 3

Un elev economisește bani astfel:

- în prima lună economisește 60 de lei;
- în fiecare lună următoare economisește cu 20 de lei mai mult decât în luna precedentă.

Sumele economisite lunar formează șirul: 60, 80, 100, 120, ...

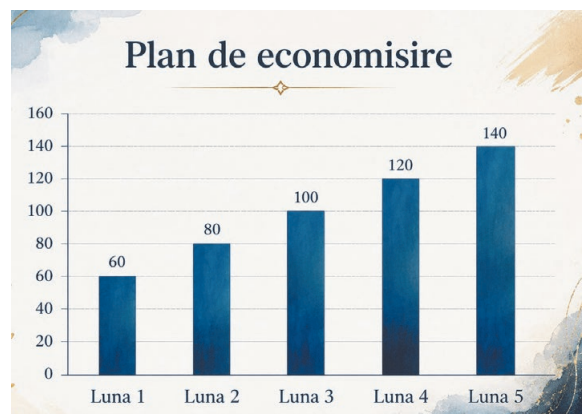
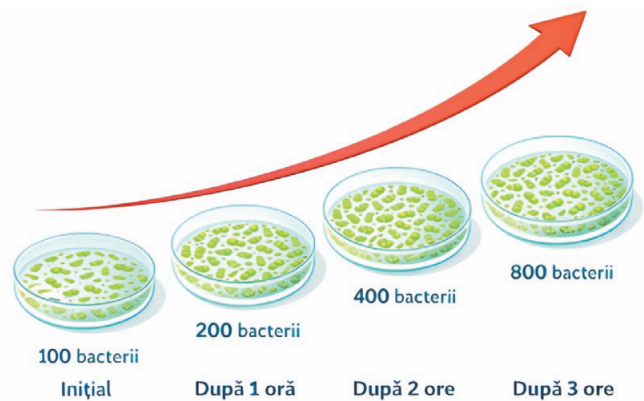
În acest caz:

- fiecare termen se obține adunând **aceeași valoare** la termenul anterior;
- diferența dintre doi termeni consecutivi este constantă.

Un astfel de șir se numește **progresie aritmetică**.

Ziua X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pagini citite în Ziua X	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Total pagini citite la finalul zilei X	15	35	60	90	125	165	210	260	315	375

Ziua X	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Pagini citite în Ziua X	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
Total pagini citite la finalul zilei X	440	510	585	665	750	840	935	1035	1140	1250

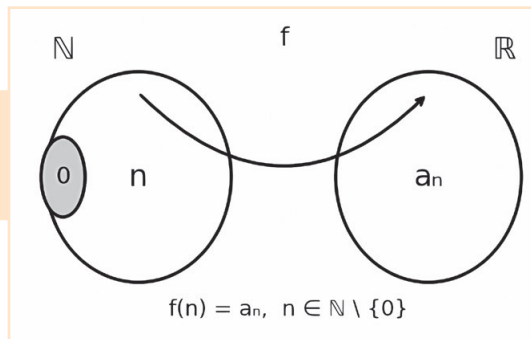


Șiruri de numere reale

O listă ordonată și infinită de numere, indexată după mulțimea numerelor naturale și construită după o anumită regulă descrie un **șir de numere reale**. Regula de formare a numerelor din șir se intuiește, sau se deduce ca o dependență a valorii fiecărui număr din șir de poziția acestuia în enumerare, ceea ce conduce la definirea unui șir de numere reale ca funcție.

DEFINIȚIE

Un **șir de numere reale** este o funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ care atribuie fiecărui număr natural din domeniu un unic număr real.



Notății și observații

► $f(1) = x_1 \in \mathbb{R}, f(2) = x_2 \in \mathbb{R}, \dots$;
► domeniul de definiție al funcției este infinit, deci și enumerarea anterioară conține o infinitate de termeni.

► în locul codomeniului $\mathbb{R}$ din definiția șirului poate apărea o submulțime nevidă A a acestuia, sau chiar o mulțime de elemente care nu sunt numere, caz în care șirul va fi „șir de elemente din A ”:

- dacă $A = \mathbb{N}$, va fi șir de numere naturale: 1, 0, 2, 1, 0, 0, 3, ...
- dacă $A = \mathbb{Z}$, va fi șir de numere întregi: 1, -2, 3, -4, 5, ...
- dacă $A = \mathbb{Q}$, va fi șir de numere raționale: $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$
- dacă A este totalitatea „cuvintelor” formate din semnele reprezentând cifrele arabe,

dar și din imaginile acestora în oglindă, unde prin „cuvânt” se înțelege orice succesiune de astfel de semne, enumerarea următoare poate reprezenta un șir de „cuvinte” din A :

11 2S 3E 4A 5Z ...
 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad \dots$

• o simplă succesiune de numere (de exemplu: 4, 5, 10, -2, ...) sau de elemente ca în imaginea de mai sus) nu definește în mod unic un șir; fără o regularitate precizată, nu se poate specifica ce urmează în enumerare.

Notății consacrate pentru șir

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sau $(x_n)_{n \geq 1}$, înțelegând: $\underbrace{x_1}_{\text{primul termen}}, \underbrace{x_2}_{\text{al doilea termen}}, \underbrace{x_3}_{\text{al treilea termen}}, \dots, \underbrace{x_n}_{\text{al } n\text{-lea termen}}, \dots$

Chiar dacă în matematică există și șiruri care au primul termen x_0 , sau $x_k, k \geq 2$, în lecții vom utiliza doar notația $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sau $(a_n)_{n \geq 1}$, dat fiind că stabilește o legătură firească între *indicele* termenului șirului și *poziția* lui în enumerare: x_1 (primul termen/termenul de rang 1); x_2 (al doilea termen/termenul de rang 2); ...; x_n (al n -lea termen/termenul de rang n); ...

x_n – se numește **termen general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exemplul 4 (evoluția unei mărimi în timp)

Un telefon mobil este încărcat 100%. El devine nefuncțional dacă nivelul de încărcare a bateriei scade sub 1%. În fiecare oră, nivelul bateriei scade la 90% din valoarea pe care o avea cu o oră înainte.

$$b_1 = 100, \quad b_2 = 90, \quad b_3 = 81, \\ b_4 = 72,9, \quad b_5 = 65,61, \dots$$

Se formează astfel șirul valorilor nivelului de încărcare a bateriei, pe care îl putem nota $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

De remarcat este faptul că, în acest exemplu, conform modelului matematic, nivelul de încărcare a bateriei nu ajunge niciodată la 0. Șirul are o infinitate de termeni, toți nenuli, dar, în realitate, telefonul nu va funcționa la infinit.

Temă:

1. Demonstrează că, după 20 de ore, nivelul de încărcare a bateriei este

$$b_{21} = \frac{81^{10}}{100^9}.$$

2. Utilizează **inteligența artificială** pentru compararea numerelor 81^{10} și 100^9 . Mai poate fi utilizat telefonul după 20 de ore?

3. Utilizează **inteligența artificială** pentru a răspunde la întrebarea: După câte ore întregi telefonul nu mai poate fi utilizat?
(rezolvarea acestei chestiuni necesită cunoștințe despre logaritmi, care vor fi introduse în clasa a X-a).



REȚINEM

O listă ordonată și *finită* de numere, construită după o anumită regulă, se numește **secvență finită a unui șir de numere reale**.

Exemplul 5 (creșterea unei populații bacteriene într-un timp determinat):

Într-un laborator de biologie, cercetătorii observă numărul de bacterii dintr-o cultură timp de 5 ore. În condiții controlate, se constată că, în fiecare oră, numărul de bacterii crește cu aproximativ 200. Obținem secvența finită: 1 000, 1 200, 1 400, 1 600, 1 800.

Chiar dacă observația este limitată în timp (secvență finită), *modelul matematic* poate fi extins dacă fenomenul continuă în aceleași condiții.

Ora	1	2	3	4	5
Număr de bacterii	1 000	1 200	1 400	1 600	1 800



ATENȚIE!

● Prin șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ înțelegem o succesiune infinită de numere reale: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$, chiar dacă unele dintre aceste valori sunt egale.

● Un șir are totdeauna un prim termen, dar nu are un ultim termen, căci mulțimea $\mathbb{N}^*$ după care se indexează termenii șirului are un prim element (1), dar nu are un ultim element.

● *Mulțimea valorilor termenilor șirului*, numită uneori *mulțimea termenilor șirului*, poate fi finită.

De exemplu, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu termenul general $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, are o infinitate de termeni: 0, 1, 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, 0, 1, ..., dar mulțimea valorilor acestor termeni are doar două elemente $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{0, 1\}$.

Moduri de definire a unui șir

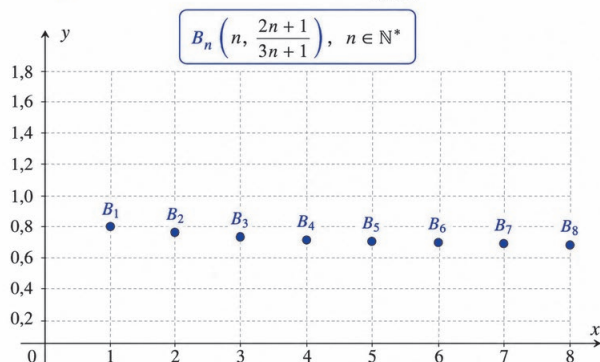
Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se poate defini:

◆ **Sintetic** – prin enumerarea termenilor săi

Observație: În reprezentarea grafică a termenilor șirului, pe axa orizontală sunt afișați indicii termenilor șirului (naturali), iar pe axa verticală valorile acestora, care scad din ce în ce mai mult, apropiindu-se de valoarea 0 fără să o atingă. Această modalitate de definire este mai puțin riguroasă, căci, fără alte precizări suplimentare, nu se poate spune *cu certitudine* ce termeni urmează.

◆ **Analitic** – printr-o formulă de calcul, sau mai multe, pentru termenul general.

Exemplul 7: $(a_n)_{n \geq 1}$, dat prin $x_n = \frac{2n+1}{3n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.



Observație: În reprezentarea grafică a termenilor șirului, valorile scad ușor, dar pare că au tendința de a se stabili la aproape de valoarea $2/3$.

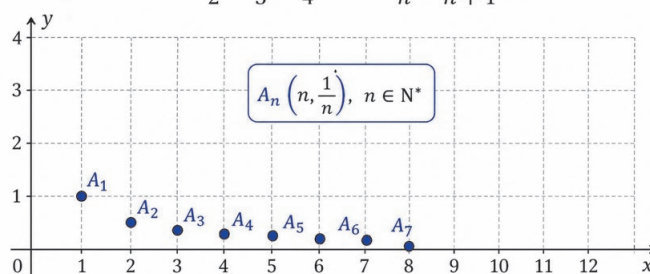
◆ **Recurent** – un termen depinde de un termen anterior sau de mai mulți termeni anteriori.

Relația prin care un termen al șirului se exprimă în funcție de termeni anteriori se numește **relație de recurență**: de ordinul I, dacă un termen depinde doar de predecesorul său; de ordinul II, dacă un termen depinde de cei doi termeni anteriori lui.

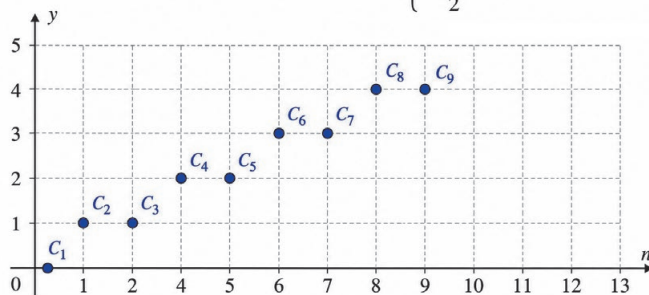
Observație: În reprezentarea grafică a termenilor șirului, valorile acestora cresc din ce în ce mai rapid.

Șirul lui Fibonacci este un model matematic elegant și ușor de recunoscut în arhitectură și artă, în finanțe și economie, în natură și biologie, în informatică și tehnologie. Șirul lui Fibonacci respectă o relație de recurență de ordinul II.

Exemplul 6: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$

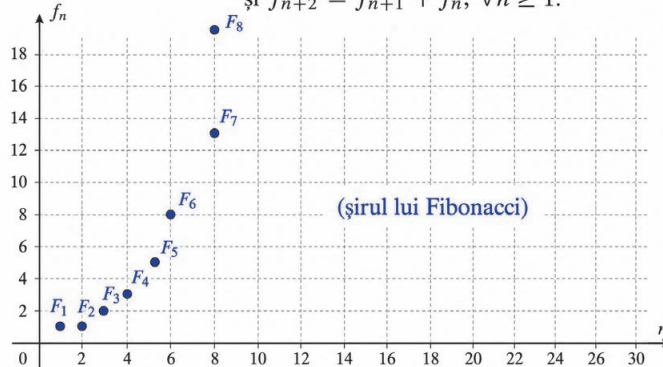


Exemplul 8: $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dat prin $y_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$



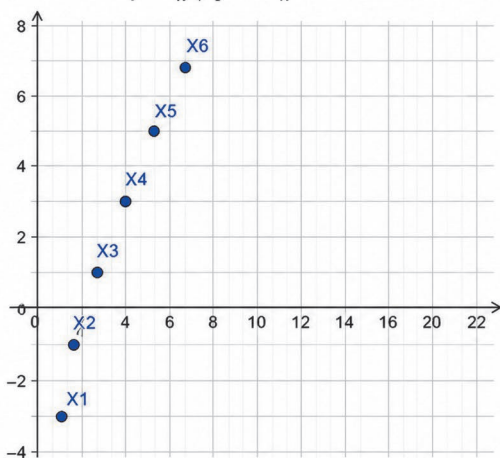
Observație: În reprezentarea grafică a termenilor șirului, valorile unor termeni consecutivi sunt egale, dar în ansamblu acestea cresc la valori din ce în ce mai mari, fără a avea tendința de a se stabili la în jurul unei valori.

Exemplul 9: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $f_1 = 1, f_2 = 1$ și $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \geq 1$.



Exemplul 10: $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = -3$

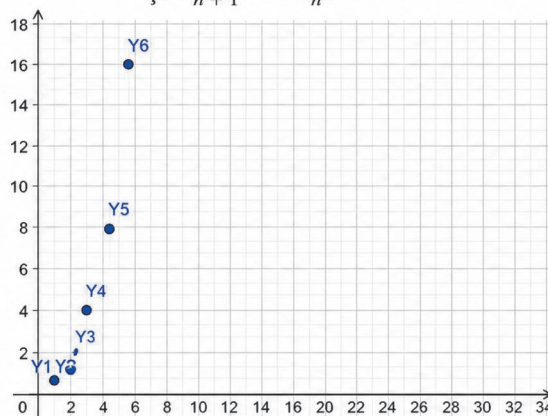
și $a_{n+1} = a_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$.



Observație: De remarcat la reprezentarea grafică a termenilor șirului că punctele sunt coliniare, iar distanța dintre valorile termenilor șirului este aceeași (2). Șirul respectă o relație de recurență de ordinul I.

Exemplul 11: $(z_n)_{n \geq 1}$ cu $z_1 = \frac{1}{2}$

și $z_{n+1} = 2z_n, \forall n \in \mathbb{N}$.



Observație: În reprezentarea grafică a termenilor șirului, se observă că valorile termenilor cresc rapid, iar distanțele dintre acestea se dublează la fiecare pas. Șirul respectă o relație de recurență de ordinul I.



TEMĂ DE PORTOFOLIU

Realizează o temă de cercetare utilizând internetul și inteligența artificială, pentru a descoperi cât mai multe modele oferite de șirul lui Fibonacci în diverse domenii din viața reală.



EXERCIIILE PROPUSE

A.

1. Care dintre funcțiile următoare reprezintă un șir de numere reale?
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = a + 1$;
 - b) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}, f(p) = [p]$, unde $[p]$ reprezintă *partea întreagă* a numărului p ;
 - c) $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$.
2. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descris ca fiind o succesiune infinită a secvenței 0, -1, 1 (adică al patrulea termen este 0, al cincilea este -1, al șaselea este 1 și așa mai departe).
 - a) Ce valoare are termenul de rang 20?
 - b) Care este diferența dintre termenii de rang 100, respectiv 50?
 - c) Află suma primilor 100 de termeni ai șirului.
 - d) Scrie termenul general al șirului.
3. Care dintre următoarele șiruri este șirul lui Fibonacci?
 - a) $(a_n)_{n \geq 1}, a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
 - b) $(x_n)_{n \geq 1}, x_1 = 1, x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
 - c) $(y_n)_{n \geq 1}, a_1 = 1, a_2 = 1, y_{n+2} = y_{n+1} - y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
4. Dacă șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, are termenul general $b_n = \frac{3n-2}{4n+1}, \forall n \geq 1$, scrie funcția care definește șirul.

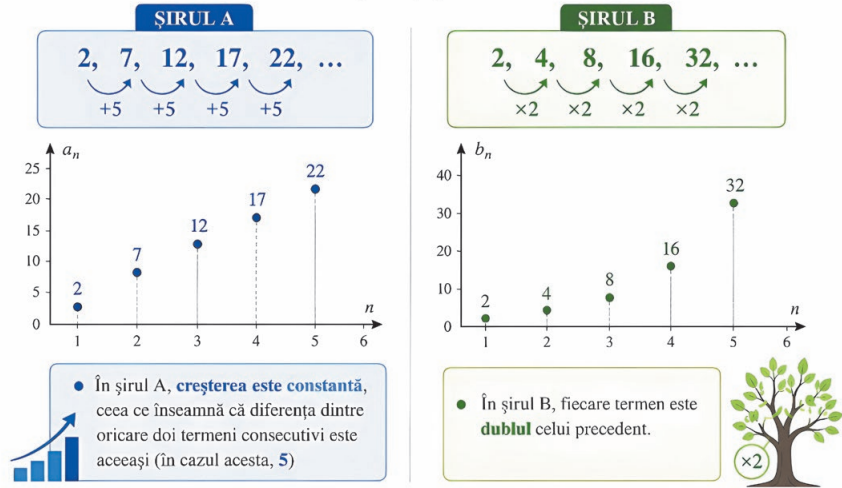
B.

1. a) Urmărind imaginea alăturată, extrage asemănările și deosebirile dintre șirurile prezentate.

b) Utilizând regula de formare indicată în imagine, scrie, pentru fiecare șir în parte, încă cinci termeni.

c) Schimbă modul de definire (sintetic) al șirului în modul de definire analitic, scriind formula termenului general pentru fiecare șir în parte.

Comparați șirurile:



2. a) Reprezintă, într-un reper cartezian, primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 1 \\ (-1)^{n+1} \cdot 2, & \text{dacă } n \geq 2 \end{cases}$ (pe axa orizontală reprezintă rangurile termenilor șirului, iar pe axa verticală valorile termenilor șirului).

b) Notând cu A_k punctul din plan obținut prin reprezentarea termenului a_k , $1 \leq k \leq 5$, demonstrează că patrulaterul convex cu vârfurile în punctele A_2, A_3, A_4 , respectiv A_5 este paralelogram.

c) Demonstrează că aria poligonului convex cu vârfurile în cele 5 puncte reprezentate este $S = 11$ (u^2).

3. Analizează *Exemplul 1* și găsește formula termenului general pentru șirul de numere descris pe linia „Pagini citite în ziua X”.

C.

1. Analizează *Exemplul 1* din lecție și găsește formula termenului general pentru șirul de numere descris pe linia „Total pagini citite la finalul zilei X”.

2. Determină termenul general al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin:

a) $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1, \forall n \geq 1$; b) $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{x_n}{n}, \forall n \geq 1$; d) $x_1 = 0$ și $n \cdot x_{n+1} = n - 1 + x_n, \forall n \geq 1$.

3. Află termenul de rang 2026 din șirul: 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 3, Justifică!

4. Dacă șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are termenul general $a_n = \frac{3n-1}{2n+5}, n \geq 1$, determină $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - \frac{3}{2}| < \frac{1}{10000}, \forall n \geq p$.

5. a) Demonstrează că un număr natural care este pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 2, 3, 7 sau 8.

b) Câte pătrate perfecte sunt termeni ai șirului cu termen general $10^{n-1} + 8, n \in \mathbb{N}^*$? Dar șirul cu termen general $n! + 8, n \in \mathbb{N}^*$, unde $n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}^*$?

Progresii aritmetice și progresii geometrice

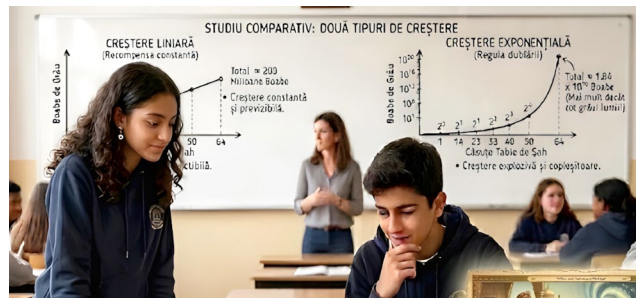
Lecțiile destinate progresiilor vor prezenta aceste două tipuri de șiruri recurente în paralel, cu scopul de a evidenția asemănările și deosebirile dintre acestea.



REFLECȚIE DE ÎNCEPUT: PLANURI ÎNTELEPTE DE ECONOMISIRE

O legendă din India spune că inventatorul jocului „chaturanga”, jucat pe o tablă cu pătrățele 8×8 , predecesorul jocului de șah, i l-a prezentat regelui. Încântat, regele i-a oferit orice recompensă își dorea. Înteleptul a cerut doar boabe de grâu pe tabla de șah: 1 bob pe prima căsuță, 2 pe a doua, 4 pe a treia, 8 pe a patra și așa mai departe, dublând de fiecare dată numărul de boabe. Regele a acceptat imediat, crezând că este o cerere modestă, mai ales că fusese îngrozit de zvonul că inventatorul îi va cere ca, pornind de la o boabă de grâu pe prima căsuță, să primească pe fiecare dintre următoarele câte 100 000 de boabe de grâu în plus.

Cine a fost înteleptul în legenda indiană: regele sau inventatorul?



Progresia aritmetică	Progresia geometrică
Definiții și notații	
Un șir de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește progresie aritmetică dacă orice termen, începând cu al doilea, se obține din precedentul prin adunare cu același număr real, numit rația progresiei. $a_n = a_{n-1} + r, \forall n \geq 2,$ $r \in \mathbb{R}$ este constanta reală numită rația progresiei, iar primul termen, a_1, este un număr real dat. Vom nota progresia aritmetică: $\div (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$	Un șir de numere reale $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește progresie geometrică dacă orice termen, începând cu al doilea, se obține din precedentul prin înmulțire cu același număr real, numit rația progresiei. $b_n = b_{n-1} \cdot q, \forall n \geq 2,$ $q \in \mathbb{R}$ este constanta reală numită rația progresiei, iar primul termen, b_1, este un număr real dat. Vom nota progresia geometrică: $\div (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
Exemple	
0, 2, 4, 6, 8, ... este o progresie aritmetică, de prim termen 0 și cu rația 2.	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ este o progresie geometrică, de prim termen 1 și cu rația $-\frac{1}{2}$.
Observații	
• Dacă $r = 0$, toți termenii șirului au aceeași valoare, iar șirul se numește șir constant. • Dacă $r > 0$, termenii șirului cresc în valoare pe măsură ce indicii/rangurile lor se măresc, iar progresia se va numi crescătoare. • Dacă $r < 0$, termenii șirului scad în valoare pe măsură ce indicii/rangurile lor se măresc, iar progresia se va numi descrescătoare. • O progresie aritmetică este bine/complet determinată dacă i se cunosc primul termen și rația (elementele definitorii).	• Dacă $q = 0$ sau $b_1 = 0$, șirul va avea termenii $b_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$, respectiv $0, 0, 0, \dots$, iar progresia se numește banală. • Dacă $q < 0$, termenii șirului au semne alternante. • Dacă $q > 0$, termenii șirului au același semn. • Dacă $q = 1$, toți termenii șirului au aceeași valoare, iar șirul se numește șir constant. • O progresie geometrică este bine/complet determinată dacă i se cunosc primul termen și rația (elementele definitorii).



Practic: Aplică definiția!

1. Construiește o progresie aritmetică în care al patrulea termen să fie mai mic decât al doilea.
2. Construiește o progresie aritmetică în care toți termenii să aibă același semn.
3. Construiește o progresie aritmetică descrescătoare în care nu toți termenii au același semn.

1. Construiește o progresie geometrică de prim termen pozitiv și rație pozitivă subunitară și o altă progresie geometrică de prim termen pozitiv și rație supraunitară. Analizează comportamentul termenilor celor două șiruri.
2. Construiește o progresie geometrică de prim termen negativ și rație pozitivă subunitară și o altă progresie geometrică de prim termen negativ și rație supraunitară. Analizează comportamentul termenilor șirului.
3. Generalizează concluziile celor două aplicații.

Atenție! Nu orice șir de numere reale este o progresie, așadar pentru a beneficia de avantajele progresiilor va trebui să verifici dacă un șir este sau nu este progresie.

Verificarea progresiei**Progresia aritmetică**

Pentru a verifica dacă un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică, se calculează diferența a doi termeni consecutivi generali:

$$a_{n+1} - a_n$$

Dacă această diferență este constantă (nu depinde de n), atunci șirul este progresie aritmetică.

Dacă această diferență nu este constantă (depinde de n), atunci șirul nu este progresie aritmetică.

Progresia geometrică

Pentru a verifica dacă un șir $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termeni nenuli este progresie geometrică, se calculează raportul a doi termeni consecutivi generali:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}, \text{ unde } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dacă acest raport este constant (nu depinde de n), atunci șirul este progresie geometrică.

Dacă acest raport nu este constant (depinde de n), atunci șirul nu este progresie geometrică.

EXERCITIUL REZOLVAT

Se consideră șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenii generali: $a_n = 1 - 2n$, $b_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$, $c_n = \frac{1}{n}$, $d_n = \sqrt{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Verifică dacă șirurile sunt sau nu sunt progresii.

Rezolvare: Pentru șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avem $a_{n+1} - a_n = 1 - 2(n+1) - 1 + 2n = -2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este progresie aritmetică. Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2n-1}{1-2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, raport care nu este constant, deci șirul NU este progresie geometrică.

Pentru șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avem $b_{n+1} - b_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} - \frac{2^n}{3^{n+1}} = -\frac{2^n}{3^{n+2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, diferență care nu este constantă, deci șirul NU este progresie aritmetică. Avem $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, raport care este constant, deci șirul este progresie geometrică.

Pentru șirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avem $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, diferență care nu este constantă, deci șirul NU este progresie aritmetică. Avem $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{n+1} \cdot n = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, raport care nu este constant, deci șirul NU este progresie geometrică.

Pentru șirul $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avem $d_{n+1} - d_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, diferență care este constantă, deci șirul este progresie aritmetică. Avem $\frac{d_{n+1}}{d_n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, raport care este constant, deci șirul este progresie geometrică.

Proprietăți ale progresiilor

A. Formula termenului general, în funcție de primul termen și de rație

Progresii aritmetice

Teoremă: Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică, cu primul termen a_1 și rația r , atunci:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație:

Pentru $n = 1$, relația devine $a_1 = a_1$, evident adevărată.

Pentru k natural, nenul, fixat, presupunem $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r$ și demonstrăm că $a_{k+1} = a_k + k \cdot r$.

Din definiția progresiei aritmetice,
 $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k - 1) \cdot r + r = a_1 + k \cdot r$.

Așadar, conform principiului inducției matematice, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplul 14

Într-o sală de spectacole cu 15 rânduri de scaune, fiecare rând, începând cu al doilea, conține câte 4 scaune în plus față de rândul anterior (câte două la fiecare capăt). Primul rând are 10 scaune. Ultimul rând este alocat elevilor și studenților care plătesc bilet redus, în valoare de 25 de lei. Un bilet întreg costă 100 de lei. Care este pierderea companiei de spectacole prin acordarea reducerii pentru elevi și studenți?

Rezolvare:

Creșterea constantă a numărului de locuri pe rând, de la al doilea încolo, indică formarea unei progresii aritmetice, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu primul termen $a_1 = 10$ și rația $r = 4$. Numărul de locuri de pe ultimul rând este $a_{15} = a_1 + (15 - 1) \cdot r = 10 + 14 \cdot 4 = 66$. Suma de bani colectată de la elevi și studenți pentru locurile reduse este $S_{red} = 66 \cdot 25 = 1\,650$ lei, față de suma care ar fi fost încasată pentru bilete întregi, $S_d = 66 \cdot 100 = 6\,600$ lei. Așadar, pierderea companiei pentru fiecare spectacol cu ultimul rând ocupat complet este diferența celor două sume: $S_d - S_{red} = 6\,600 - 1\,650 = 4\,950$ lei.

Progresii geometrice

Teoremă: Dacă $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, cu primul termen b_1 și rația q , atunci:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație:

Pentru $n = 1$, relația devine $b_1 = b_1$, evident adevărată.

Pentru k natural, nenul, fixat, presupunem $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$ și demonstrăm că $b_{k+1} = b_k \cdot q$.

Din definiția progresiei geometrice,
 $b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^k$.

Așadar, conform principiului inducției matematice, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplul 15

Recitește enunțul *Exemplului 4* și calculează ce nivel de încărcare are bateria telefonului după 10 ore, apoi după 15 ore. Utilizează instrumente digitale sau inteligența artificială pentru aproximarea numerelor obținute.

Rezolvare:

Enunțul indică un șir de valori, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, obținute recursiv prin $b_{n+1} = \frac{90}{100} \cdot b_n$, iar $b_1 = 100$. Șirul este o progresie geometrică, de prim termen 100, cu rația $q = \frac{9}{10}$.

După 10 ore întregi, nivelul de încărcare a bateriei este dat de $b_{11} = b_1 \cdot q^{10}$, adică $b_{11} = 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \cong 35$ (%).

După 15 ore întregi, nivelul de încărcare a bateriei este dat de $b_{16} = b_1 \cdot q^{15}$, adică $b_{16} = 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{15} \cong 21$ (%). Așadar, după 15 ore, telefonul poate fi încă utilizat cu succes.



B. Relația dintre orice trei termeni consecutivi ai unei progresii

Progresii aritmetice

Teoremă: Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

(orice termen, începând cu al doilea, este media aritmetică a vecinilor săi).

Demonstrație:

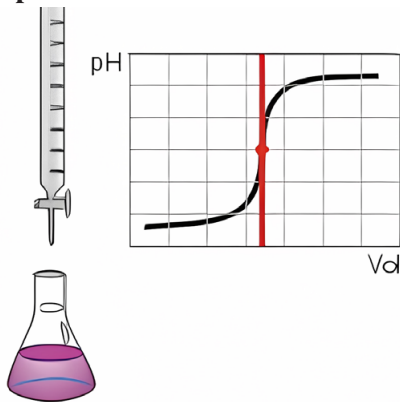
„ $\Rightarrow$ ” $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică, deci

$a_{n-1} = a_n - r$ și $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 2$. Însumând cele două relații, obținem $a_{n-1} + a_{n+1} = 2 \cdot a_n$,

$\forall n \geq 2$, deci $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

„ $\Leftarrow$ ” Dacă între termenii șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are loc egalitatea $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, rezultă că $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, de unde se deduce că $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = \dots = a_2 - a_1$, $\forall n \geq 2$, adică toate diferențele de doi termeni consecutivi au aceeași valoare, însemnând că șirul este progresie aritmetică.

Exemplul 16



Într-un laborator se studiază variația pH-ului unei soluții acide în timpul unei titrări, atunci când se adaugă volume egale dintr-o bază slabă, într-o zonă în care pH-ul crește aproximativ liniar. Se constată experimental că, pentru primele etape ale titrării, pH-ul crește cu 0,4 unități la fiecare pas, după prima adăugare pH-ul fiind 2,6.

Progresii geometrice

Teoremă: Un șir $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu termeni nenuli, este o progresie geometrică dacă și numai dacă

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Dacă șirul are termeni pozitivi, atunci relația se poate scrie: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

(într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi, orice termen, începând cu al doilea, este media geometrică a vecinilor săi).

Demonstrație:

„ $\Rightarrow$ ” $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică cu termeni nenuli, deci rația q este nenulă.

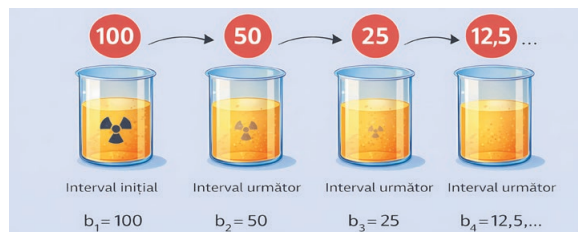
$$b_{n-1} = \frac{b_n}{q}, b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Înmulțind relațiile, obținem $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, cu mențiunea că, dacă toți termenii șirului sunt pozitivi, relația se poate scrie: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

„ $\Leftarrow$ ” Dacă între termenii șirului $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are loc egalitatea $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ și termenii șirului sunt nenuli, relația se scrie $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, de unde deducem $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \dots = \frac{b_2}{b_1}$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, adică toate rapoartele de doi termeni consecutivi au aceeași valoare, însemnând că șirul este progresie geometrică.

Exemplul 17

Se urmărește cantitatea de substanță radioactivă rămasă într-o probă, măsurată la intervale egale de timp. Din cauza procesului de dezintegrare, cantitatea scade la jumătate din valoarea măsurată anterior. Datele experimentale sunt următoarele:



Model matematic:

pH-ul soluției după fiecare adăugare este:

$$a_1 = 2,6; a_2 = 3; a_3 = 3,4; a_4 = 3,8; \dots$$

(termeni ai unei progresii aritmetice cu rația 0,4).

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{2,6 + 3,4}{2} = 3 = a_2; \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{3 + 3,8}{2} = 3,4 = a_3.$$

Model matematic:

După prima măsurătoare, rezultatul este

$$b_1 = 100 \text{ u.m.}, b_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1, b_3 = \frac{1}{2} \cdot b_2, b_4 = \frac{1}{2} \cdot b_3, \dots,$$

adică un șir de valori (pozitive) în progresie geometrică. $b_1 \cdot b_3 = 100 \cdot 25 = 2500 = 50^2 = b_2^2$;

$$\sqrt{b_2 \cdot b_4} = \sqrt{50 \cdot 12,5} = \sqrt{625} = b_3$$



EXERCITIUL REZOLVAT

Determină domeniile de adevăr ale următoarelor predicate:

$p(x)$: Numerele x , $\left[\frac{1-2x}{3}\right]$, $\frac{1}{2}$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică, $x \in \mathbb{R}$ ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a);

$q(x)$: Numerele 2, $3y - 1$, 8 sunt termeni consecutivi într-o progresie geometrică, $y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Domeniul de adevăr al predicatului $p(x)$ este mulțimea $D_p = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left[\frac{1-2x}{3}\right] = \frac{x+\frac{1}{2}}{2} \right\}$. Ecuația se reduce la $\left[\frac{1-2x}{3}\right] = \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = k \in \mathbb{Z}$, de unde $x = \frac{4k-1}{2}$ și $k \leq \frac{1-2x}{3} < k+1$. Înlocuind x în inegalitatea dublă și rezolvând sistemul de inecuații, obținem $-\frac{1}{7} < k \leq \frac{2}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$, deci $k = 0$ și $x = -\frac{1}{2}$. Răspunsul este $D_p = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Domeniul de adevăr al predicatului $q(y)$ este mulțimea $D_q = \{ y \in \mathbb{R} \mid (3y-1)^2 = 2 \cdot 8 \}$. Ecuația se reduce la $(3y-1)^2 = 16$, sau $|3y-1| = 4$, de unde $3y-1 = \pm 4$, cu soluții $y = \frac{5}{3}$ și $y = -1$. Răspunsul este $D_q = \left\{ -1, \frac{5}{3} \right\}$.

C. Condiția pentru ca n numere ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) să fie în progresie aritmetică/geometrică

Spunem că n numere ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) sunt în progresie aritmetică/geometrică dacă ele reprezintă o secvență finită dintr-o progresie aritmetică/geometrică, adică sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice/geometrice.

Progresii aritmetice

Când spunem „numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică” înțelegem că acestea sunt *termeni consecutivi* într-o progresie aritmetică (șir cu o infinitate de termeni), deci $b = \frac{a+c}{2}$ sau

$$\exists r \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } \begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$$

Când spunem „numerele a, b, c sunt termeni într-o progresie aritmetică sau termeni ai unei progresii aritmetice”, atunci nu rezultă că sunt termeni consecutivi. Apartenența acestor numere la o progresie aritmetică se transcrie matematic astfel: dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică, cu rația r și $a, b, c \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, atunci există numerele naturale nenule, diferite, m, k, p astfel încât

$$\begin{cases} a = a_m = a_1 + (m-1) \cdot r \\ b = a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \\ c = a_p = a_1 + (p-1) \cdot r \end{cases}$$

fără ca vreunul dintre numere să fie media aritmetică a celorlalte două.

Progresii geometrice

Când spunem „numerele a, b, c sunt în progresie geometrică” înțelegem că sunt termeni consecutivi într-o progresie geometrică (șir cu o infinitate de termeni), deci $b^2 = a \cdot c$, sau $\exists q \in \mathbb{R}$

$$\text{astfel încât } \begin{cases} b = a \cdot q \\ c = b \cdot q \end{cases}$$

Când spunem „numerele a, b, c sunt termeni într-o progresie geometrică, sau termeni ai unei progresii geometrice”, atunci nu rezultă că sunt termeni consecutivi. Apartenența acestor numere la o progresie geometrică se transcrie matematic astfel: dacă $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie geometrică, cu rația q și $a, b, c \in \{b_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, atunci există numerele naturale nenule, diferite, m, k, p astfel încât

$$\begin{cases} a = b_m = b_1 \cdot q^{m-1} \\ b = b_k = b_1 \cdot q^{k-1} \\ c = b_p = b_1 \cdot q^{p-1} \end{cases} \text{ fără ca}$$

vreunul dintre numere să fie media geometrică a celorlalte două.

D. Proprietatea termenilor egal depărtați de extreme într-o secvență finită dintr-o progresie

Progresii aritmetice

Teoremă: Dacă n numere, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) sunt în progresie aritmetică, atunci suma termenilor egal depărtați de extreme este aceeași.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Demonstrație:

Proprietatea se demonstrează utilizând formula termenului general în funcție de primul termen și de rație.

Pentru $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1) \cdot r + a_1 + (n-k+1) \cdot r$, unde r este rația progresiei. Se obține $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r = a_1 + a_n$. Cum k este un element oarecare din $\{1, 2, \dots, n\}$, rezultă $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, adică toate sumele termenilor egal depărtați de extremele secvenței au aceeași valoare.

Exemplul 18



Într-o săptămână, audiența unei emisiuni TV crește zilnic, constant. Știind că luni și duminică audiența totală a fost de 1 500 000 de telespectatori, care a fost audiența în ziua de joi?

Modelul matematic:

Audiențele zilnice dintr-o săptămână sunt 7 numere în progresie aritmetică: $a_1, a_2, \dots, a_7$, corespunzând zilelor de luni până duminică. Joi este ziua din mijlocul săptămânii, a patra. Dar $a_1 + a_7 = 1\,500\,000$. Cum $a_k + a_{7-k+1} = a_1 + a_7$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, pentru $k = 4$ se obține $a_4 + a_{7-4+1} = a_1 + a_7$, de unde $2a_4 = 1\,500\,000$, adică $a_4 = 750\,000$ (telespectatori)

Progresii geometrice

Teoremă: Dacă n numere, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) sunt în progresie geometrică, atunci produsul termenilor egal depărtați de extreme este același.

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Demonstrație:

Proprietatea se demonstrează utilizând formula termenului general în funcție de primul termen și de rație.

Pentru $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-k} = b_1^2 \cdot q^{n-1}$, unde q este rația progresiei. Se obține $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot b_n$. Cum k este un element oarecare din $\{1, 2, \dots, n\}$, rezultă $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, adică toate produsele termenilor egal depărtați de extremele secvenței au aceeași valoare.

Exemplul 19



O companie reușește să-și multiplice constant profitul în fiecare an. Știind că în primul an profitul a fost de 3 milioane \$, iar în al nouălea an a fost de 27 de milioane \$, care a fost profitul firmei în al cincilea an?

Modelul matematic:

Valorile profitului din cei nouă ani sunt în progresie geometrică: $b_1, b_2, \dots, b_9$. Al cincilea an se află în mijlocul secvenței. Cum $b_k \cdot b_{9-k+1} = b_1 \cdot b_9$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, pentru $k = 5$ se obține $b_5 \cdot b_{9-5+1} = b_1 \cdot b_9 = 81$ (milioane \$), adică $b_5^2 = 81$, de unde $b_5 = 9$ (milioane \$).

E. Suma primilor n termeni ai unei progresii

Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir de numere reale, notăm S_n suma primilor n termeni. $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$.

Progresii aritmetice

Teoremă: Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică, atunci

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde r este rația progresiei.

Demonstrație: Se poate utiliza proprietatea secvenței finite dintr-o progresie aritmetică. Primii n termeni ai progresiei aritmetice au proprietatea $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Scriind aceeași sumă cu termenii în ordine inversă, $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$, apoi adunând cele două relații, se obține $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1) = n \cdot (a_1 + a_n)$, deci $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. Folosind formula termenului general în funcție de primul termen și de rație, și înlocuind a_n în ultima relație obținută, rezultă și a doua formă a sumei primilor n termeni, $S_n = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot r) \cdot n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplul 20

Câte scaune sunt, în total, în sala de spectacole din *Exemplul 14*? Care este câștigul companiei care deține sala când sala este plină, ultimul rând fiind ocupat exclusiv de elevi și studenți?

Modelul matematic:

Deja se cunoaște faptul că totalurile scaunelor de pe cele 15 rânduri sunt în progresie aritmetică, de prim termen 10 și de rație 4: $S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(10 + 66) \cdot 15}{2} = 570$. Pentru calculul câștigului companiei, se ține cont de faptul că locurile din primele 14 rânduri sunt plătite cu 100 lei, iar cele din rândul 15 cu 25 lei. Câștigul total va fi: $C = 100 \cdot S_{14} + 25 \cdot 66$, unde $S_{14} = \frac{(2a_1 + 13 \cdot r) \cdot 14}{2} = (2 \cdot 10 + 13 \cdot 4) \cdot 7 = 504$. Se obține $C = 100 \cdot 504 + 25 \cdot 66 = 52\,050$ lei.

Progresii geometrice

Teoremă: Dacă $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci

$$S_n = \begin{cases} b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n \cdot b_1, & \text{dacă } q = 1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde q este rația progresiei.

Demonstrație: Se separă cazul progresiei constante.

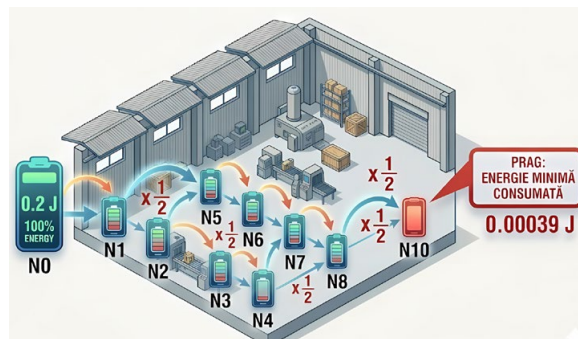
Dacă $q = 1$, atunci $b_k = b_1, \forall k \in \mathbb{N}^*$, iar $S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \dots + b_1}_{\text{de } n \text{ ori } b_1} = n \cdot b_1$.

Dacă $q \neq 1$, egalitatea se poate demonstra fie prin inducție matematică, fie cu ajutorul unor artificii de calcul: $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1}$. Înmulțind relația cu q , se obține $q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^n$, apoi, scăzând cele două relații, $(1 - q) \cdot S_n = b_1 \cdot (1 - q^n)$, deci $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Temă:

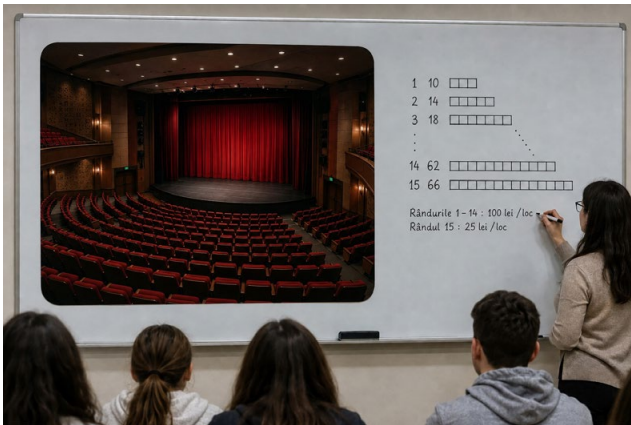
Refă demonstrația pentru $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, dacă $q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, utilizând inducția matematică.

Exemplul 21



Într-o hală industrială se instalează o rețea de senzori wireless pentru monitorizarea temperaturii. Un nod principal transmite un pachet de date către alți senzori. Din motive de economisire a bateriei:

- fiecare retransmisie consumă jumătate din energia celei precedente;
- transmiterea se face pe 10 niveluri (salturi succesive).



Care este energia totală consumată de rețeaua cu cele 10 niveluri de transmitere, dacă senzorul inițial are energia 0,2 J?

Modelul matematic:

Valorile energiei consumate la fiecare nivel sunt în progresie geometrică, de rație $q = \frac{1}{2}$. Energia totală consumată în rețea este suma primilor zece termeni din această progresie geometrică:

$$S_{10} = 0,2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 0,4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right),$$

$$S_{10} = 0,4 \cdot \frac{1023}{1024} \cong 0,399 \text{ J.}$$

Consecință: Dacă a și b sunt două numere reale și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

Demonstrație: Dacă cel puțin unul dintre numere este 0, sau numerele sunt egale, identitatea este evidentă.

Dacă numerele sunt nenule și diferite, atunci $a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}$ este suma primilor n termeni dintr-o progresie geometrică al cărei prim termen este a^{n-1} , iar rația este $\frac{b}{a}$.

Se deduce că $a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1} =$

$$a^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \frac{b}{a}} = a^n \cdot \frac{a^n - b^n}{a^n - a^{n-1}b} = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \text{ de unde } a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}).$$

Exemplul 22

Ai la dispoziție două planuri de economisire pentru $n = 5$ luni, pornind de la aceeași sumă inițială $S = 1\,000$ lei.

Planul A (cu dobândă): în fiecare lună suma se înmulțește cu $a = 1,02$ (o dobândă de 2%).

Planul B (altă dobândă/alt randament): în fiecare lună suma se înmulțește cu $b = 1,01$ (o dobândă de 1%).

Cu cât este mai mare suma economisită prin *planul A* decât cea rezultată din *planul B*?

Modelul matematic:

După n luni, prin *planul A* vei avea suma $S \cdot a^n$, iar prin *planul B* vei avea suma $S \cdot b^n$. Răspunsul la întrebare este $D = S \cdot (a^n - b^n)$. Cum interpretăm aici formula de descompunere?

◆ $a - b$ este diferența de creștere lunară.

◆ $a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}$ arată cât „valorează” această creștere lunară, acumulată pe parcurs, la diverse momente.

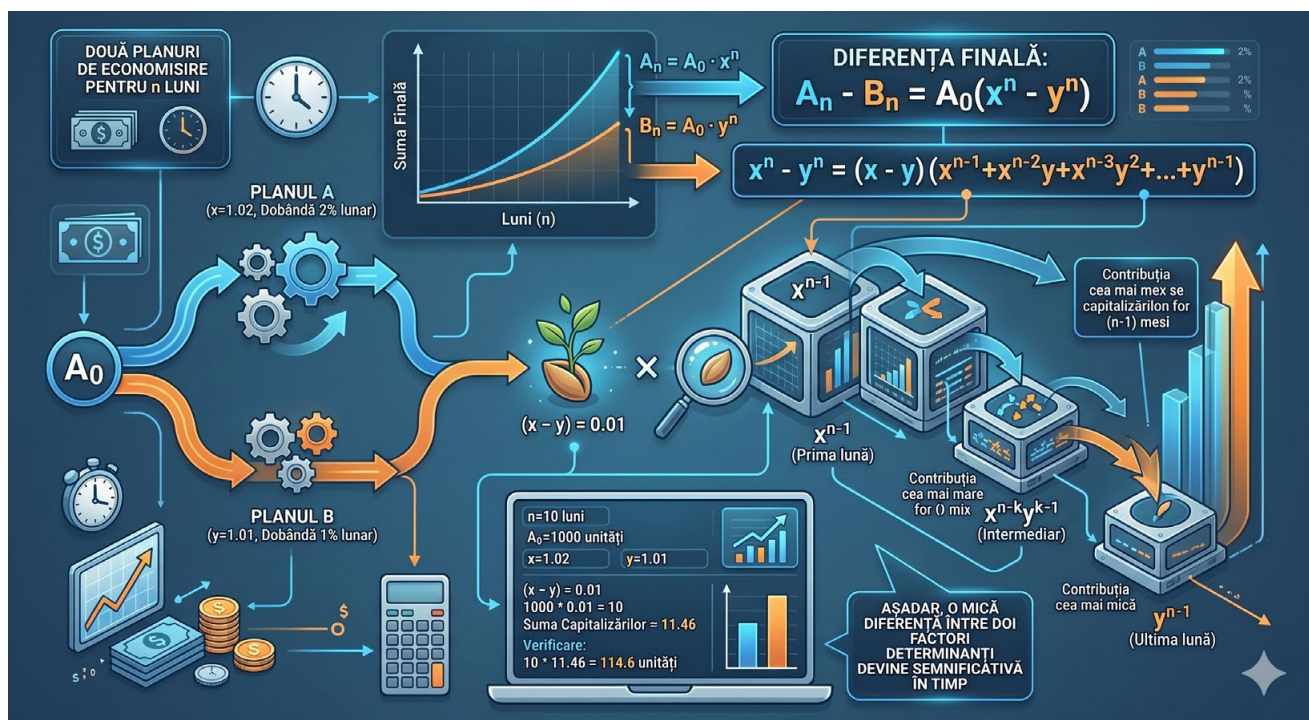
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}), \text{ oricând } n \in \mathbb{N}^*$$

$$n = 2: \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$n = 3: \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$n = 4: \quad a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$n = 5: \quad a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$



◆ Termenul $S \cdot (a - b) \cdot a^{n-1}$ reprezintă diferența de dobândă din prima lună, care se capitalizează în următoarele $n - 1 = 4$ luni. Este contribuția cea mai mare, în exemplul nostru.

◆ Termenul intermediar $S \cdot (a - b) \cdot a^{n-2} \cdot b$ reprezintă diferența de dobândă rezultată în a doua lună, care se capitalizează în următoarele $n - 2 = 3$ luni.

◆ Termenul final $S \cdot (a - b) \cdot b^{n-1}$ reprezintă diferența de dobândă din ultima lună și este contribuția cea mai mică în exemplul nostru.

Pentru datele noastre, $D = S \cdot (a^5 - b^5) = 1000 \cdot (1,02^5 - 1,01^5) \cong 53,0707531$; $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}) = (1,02 - 1,01) \cdot (1,02^4 + 1,02^3 \cdot 1,01 + 1,02^2 \cdot 1,01^2 + 1,02 \cdot 1,01^3 + 1,01^4)$ și are aceeași valoare ca mai sus dacă o înmulțim cu 1 000 (verifică calculele utilizând calculatorul sau inteligența artificială!). Așadar, formula de descompunere $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$ arată că o diferență mică între doi factori determinanți devine semnificativă în timp (mecanismul dobânzii compuse).

Autoevaluare

Bifează ce poți face după parcurgerea acestui capitol:

- ☐ pot să recunosc o progresie aritmetică sau una geometrică dintr-o listă de șiruri date;
- ☐ pot să identific elementele definitorii ale unei progresii aritmetice sau geometrice în diverse contexte;
- ☐ pot să calculez termenul general al unei progresii, sau suma primilor n termeni, cunoscând primul termen și rația progresiei;
- ☐ pot să utilizez proprietăți ale progresiilor pentru efectuarea unor calcule (calcul de sume, rezolvări de ecuații, stabilirea unor relații între diverse numere reale) în diverse contexte;
- ☐ pot să transpun în limbaj matematic situații din viața reală care se pot modela prin progresii aritmetice sau geometrice;
- ☐ pot să analizez și să compar șiruri de numere reale care modelează situații din viața reală

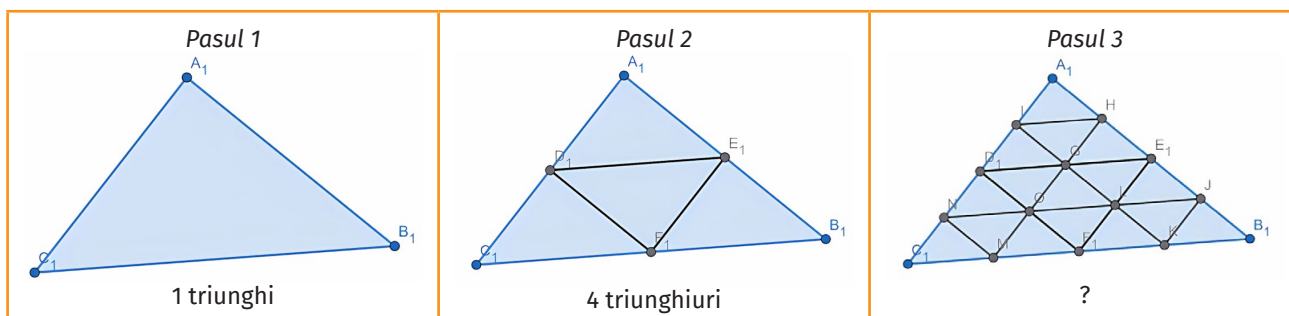


ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE (ÎN PERECHE)

1. Cetățeanul Icsulescu și-a făcut următorul plan de economisire lunară, pentru anul 2027:

Luna	Ian	Feb	Mar	Apr	Mai	Iun	Iul	Aug	Sep	Oct	Noi	Dec
Suma/ lei	50	60	70	80	...	...	...	...	...	...	...	...

- Identificați tipul de progresie format de sumele economisite lunar.
 - Identificați rația progresiei.
 - Explicați ce reprezintă rația în acest context.
 - Calculați suma economisită de cetățeanul Icsulescu în luna decembrie.
 - Calculați suma totală economisită de personajul nostru în anul 2027.
 - Dacă ar continua planul de economisire și în anul 2028, cât ar economisi în total în cei doi ani?
 - Cu același plan de economisire, în ce an și în ce lună domnul Icsulescu ar reuși să strângă din economiile sale, începute în ianuarie 2027, suma de 14 750 lei?
 - Cetățeanul hotărăște ca, în perioada 2027-2031, în doi ani consecutivi din cei patru să economisească în progresie aritmetică cu rația inițială înjumătățită, iar în ceilalți doi, cu rația inițială. Analizați toate situațiile posibile și decideți care este situația cea mai avantajoasă.
2. Liniile mijlocii ale unui triunghi împart suprafața triunghiulară în 4 suprafețe triunghiulare disjuncte. Fiecărui triunghi nou obținut i se aplică același procedeu, împărțindu-l în alte 4 triunghiuri mai mici. În fiecare partiție de acest fel, se numește *piesă* un triunghi dintre toate cele congruente cu cele mai mici laturi.



- Identificați numărul de *piese* obținute la *Pasul 3*.
- Construiți două tipuri de modelare a acestei construcții pentru a număra *piesele* obținute la fiecare pas: 1) cu ajutorul unei progresii aritmetice; 2) cu ajutorul unei progresii geometrice. Identificați, în fiecare caz în parte, rația progresiei.
- Construiți singuri *Pasul 4* și verificați dacă sunt respectate regulile identificate anterior.
- Scrieți termenul general al progresiei geometrice corespunzător *Pasului n*, $n \in \mathbb{N}^*$.
- Analizați relația dintre aria *piesei* de la *Pasul 1* și aria unei singure *piese* obținute la *Pasul 2*, respectiv la *Pasul 3*.
- Dacă notăm s_n aria unei *piese* din partiția de la pasul n (de exemplu, la *Pasul 1*, s_1 este aria suprafeței triunghiulare inițiale, s_2 este aria uneia dintre cele patru suprafețe delimitate de cele 4 triunghiuri congruente etc.), decideți dacă șirul $(s_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică sau geometrică și, în caz afirmativ, determinați rația progresiei.

3. Andrei și Bogdan investesc aceeași sumă inițială, $S = 2\,000$ lei, cu randamente lunare diferite, respectiv 3% și 2%.
- Care sunt factorii de multiplicare pentru *Planul A* (al lui Andrei) și *Planul B* (al lui Bogdan)?
 - Care este suma finală a lui Andrei, respectiv a lui Bogdan, după 4 luni?
 - Calculați diferența dintre cele două sume finale.
 - Fără a calcula numeric, explicați de ce diferența sumelor finale nu este $2000 \cdot 0,1 \cdot 4$?
 - Notând $a = 1,03$ și $b = 1,02$, calculați $S \cdot (a - b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$. Este aceeași cu diferența calculată la punctul c)?
 - Completați tabelul următor:

Termen	Semnificația termenului
$2000 \cdot (a - b) \cdot a^3$	diferența produsă în prima lună, capitalizată în următoarele 3 luni
	diferența produsă în luna a doua, capitalizată în următoarele 2 luni
$2000 \cdot (a - b) \cdot ab^2$	
	diferența produsă în ultima lună

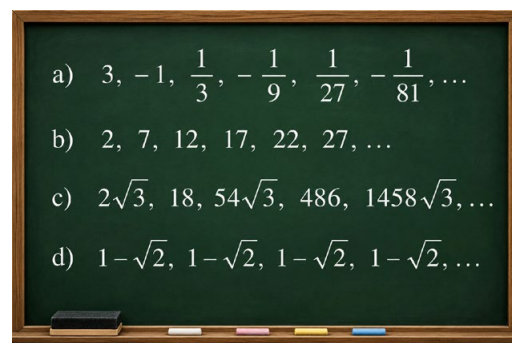
- g) Generalizați, pentru n ani, scriind apoi formula de descompunere a diferenței $a^n - b^n$.



PROBLEME PROPUSE

A.

- Identifică tipul de progresie și rația fiecărei progresii din imagine.
- Scrive termenul general al șirului definit sintetic în fiecare dintre cazurile următoare. Stabilește care dintre aceste șiruri este progresie aritmetică, respectiv progresie geometrică.
a) $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \dots$; b) $0, \sqrt{7}, \sqrt{26}, \sqrt{63}, \dots$; c) $2, -4, 8, -16, 32, \dots$
- Determină primii 5 termeni ai șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și stabilește dacă acesta este progresie aritmetică sau geometrică, în cazurile:
a) $x_n = \frac{n(n-1)}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; b) $x_n = (-1)^{4n+3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; c) $x_n = n \cdot 2^{(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
d) $x_1 = 65\,536, x_{n+1} = \sqrt{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; e) $x_1 = 2, x_n = -2x_{n-1} + 1, \forall n \geq 2$;
f) $x_1 = 1, x_{n+1} = (n+1)x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$; g) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \forall n \geq 3$.
- Determină numerele reale a, b, c știind că șirurile următoare sunt progresii aritmetice:
a) $1, a, 3, b, c, \dots$; b) $a, b, 3, c, 7, \dots$; c) $3, a, b, c, -9, \dots$; d) $a, 2\sqrt{2}, b, 6\sqrt{2}, c, \dots$
- Determină numerele reale x, y, z știind că șirurile următoare sunt progresii geometrice:
a) $2, x, 8, 16, y, z, \dots$; b) $x, 3, y, 9, 9\sqrt{3}, z, \dots$; c) $\frac{1}{x}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, z, \dots$
- Determină termenul general și suma primilor n termeni pentru progresiile aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu rația r , care au:
a) $a_1 = 2, r = 3$; b) $a_1 = 3, r = -2$; c) $r = 10, S_4 = 72$; d) $a_1 = 0, S_3 = -3\sqrt{3}$.
- Determină termenul general și suma primilor n termeni pentru progresiile geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu rația q , care au:
a) $b_1 = 2, q = \frac{1}{2}$; b) $b_3 = 6, b_5 = 24$; c) $b_1 = 1, S_3 = 7$; d) $b_2 - b_1 = 4$ și $b_3 - b_1 = -8$.

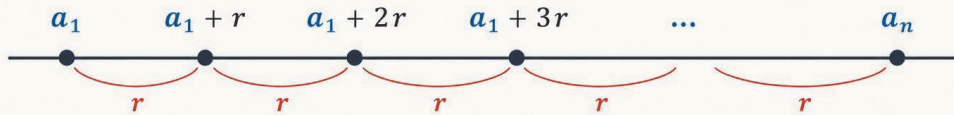


8. Calculează sumele:

- a) $10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 2026$; b) $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2048$;
 c) $20 + 15 + 10 + 5 + \dots + (-500)$; d) $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{243}$;
 e) $(x + 1) + (x + 5) + (x + 9) + \dots + (x + 221)$; f) $3 + 2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^3 + \dots + 2^9 \cdot 3^{10}$;
 g) $\frac{2+3}{6} + \frac{2^2+3^2}{6^2} + \frac{2^3+3^3}{6^3} + \dots + \frac{2^n+3^n}{6^n}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$;
 h) $\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \left(3 + \frac{4}{9}\right) + \left(5 + \frac{8}{27}\right) + \dots + \left(2n - 1 + \frac{2^n}{3^n}\right), n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Progresie aritmetică

O progresie aritmetică are primul termen a_1 și rația r (diferența dintre termeni consecutivi).



Ultimul termen:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_n - a_1 = (n - 1)r$$

$$\frac{a_n - a_1}{r} = n - 1$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

Unde:

a_1 – primul termen

a_n – ultimul termen

r – rația

n – numărul de termeni

Numărul de termeni dintr-o secvență finită a unei progresii aritmetice este

$$\text{egal cu } \frac{\text{ultimul} - \text{primul}}{\text{rație}} + 1$$

9. Demonstrează că:

- a) $x^6 - 64 = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32), \forall x \in \mathbb{R}$;
 b) $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$;
 c) $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1} \cdot y + x^{2n-2} \cdot y^2 - \dots - x \cdot y^{2n-1} + y^{2n}), \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Se poate descompune, asemănător, suma $x^{2n} + y^{2n}, n \in \mathbb{N}$? Justifică.

10. Demonstrează că, dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sunt în progresie aritmetică, atunci triunghiul are un unghi de 60° .

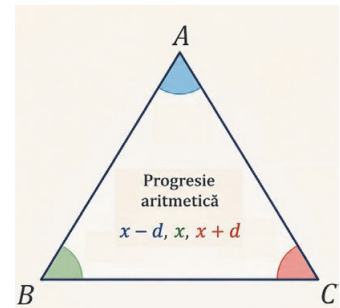
B.

11. Se consideră șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $y_n = \frac{1 - 2n}{3n + 1}, \forall n \geq 1$.

- a) Scrie termenii $y_5, y_{2n-1}, y_{3n+1} (n \geq 1)$.
 b) Demonstrează că $y_{n+1} - y_n < 0, \forall n \geq 1$.
 c) Este șirul progresie aritmetică?

12. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definite prin $a_n = \frac{n}{2}, \forall n \geq 1$, respectiv $b_n = \frac{3n - 1}{2n + 1}, \forall n \geq 1$.

- a) Scrie b_n în funcție de a_n și a_n în funcție de b_n .
 b) Scrie a_{n+1} în funcție de a_n .
 c) Scrie b_{n+1} și b_{n+2} în funcție de b_n .
 d) Stabilește dacă vreunul dintre șirurile date este progresie aritmetică sau geometrică.



13. Se consideră șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit sintetic: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ..., $n, n, \dots$

a) Care este expresia analitică a șirului?

b) Demonstrează că $a_{4n+3} - a_{4n-1} = 2, \forall n \geq 1$. Cum interpretezi acest rezultat?

14. Stabilește dacă numerele $\frac{2}{5}, \frac{13}{7}, \frac{401}{43}$ se află printre termenii șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu termenul general $a_n = \frac{n^2 + 1}{2n + 3}, \forall n \geq 1$. Este acest șir progresie aritmetică sau geometrică?

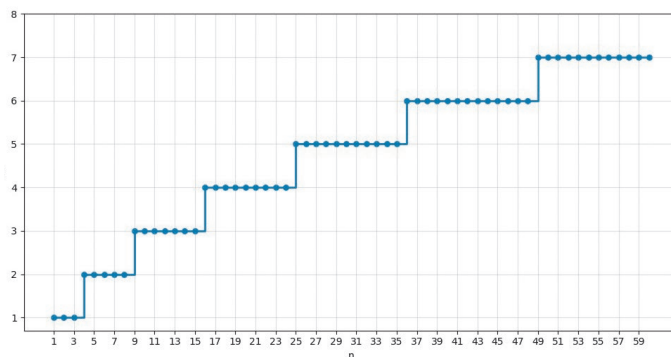
15. Demonstrează că șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $b_1 = 4$ și $b_{n+1} = \sqrt{14 + \sqrt{b_n}}, \forall n \geq 1$, este și progresie aritmetică, dar și progresie geometrică. Precizează rațiile progresiilor.

16. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $x_n = [\sqrt{n}], \forall n \geq 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

a) Scrie primii zece termeni ai șirului și verifică dacă graficul alăturat corespunde reprezentării termenilor șirului.

b) Calculează suma primilor 25 de termeni.

c) Calculează suma primilor n termeni, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.



17. Se consideră șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin

$$z_1 \in [0, 1] \text{ și } z_{n+1} = z_n - z_n^2, \forall n \geq 1.$$

a) Demonstrează că, pentru $z_1 = 0$ sau $z_1 = 1$, șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie geometrică. Precizează, în fiecare caz, rația progresiei.

b) Demonstrează că, dacă $z_1 \in (0, 1)$, atunci $z_n \in (0, 1), \forall n \geq 1$.

c) Demonstrează că $z_{n+1} \leq z_n, \forall n \geq 1$.

18. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $a_1 = 0, a_2 = 1$ și $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 2$.

a) Calculează a_8 . b) Calculează a_{2026} . c) Calculează suma primilor 100 de termeni ai șirului.

19. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este definit prin $x_1 = 5, x_2 = 13$ și $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \forall n \geq 3$. Demonstrează că $x_n = 2^n + 3^n, \forall n \geq 1$.

20. Stabilește dacă șirurile cu termeni generali $3n + 2, n^2 + n + 1, 2^n + 1, 3^{-n}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, sunt progresii aritmetice, respectiv geometrice.

21. Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

$$a) \begin{cases} a_2 + a_4 - a_7 = -1 \\ a_3 + a_4 = 7 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 2a_3 + 3a_4 - a_5 = 2 \\ a_2 + a_4 = 2 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} a_3 \cdot a_7 = 133 \\ a_4 + a_6 = 26 \end{cases}.$$

22. Determină primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

$$a) \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = \frac{3}{4} \\ b_3 + b_4 + b_5 = \frac{3}{16} \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} b_1 \cdot b_3 = 36 \\ b_2 + b_4 = 60 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} b_{10} = 3\sqrt{3} \cdot b_7 \\ S_3 = 4 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

23. Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât cele trei numere să fie în progresie aritmetică, în ordinea dată, în fiecare caz în parte:

a) $2x + 3, 3x - 5, 10x + 9$;

b) $x^2 + 5x + 7, x^2 + 1, 1 - x - x^2$;

c) $1 + \sqrt{x}, 2 - \sqrt{x}, 1 + 2\sqrt{x} \ (x \geq 0)$; d) $2, \left[\frac{1-3x}{2}\right], -10$;

e) $\left[\frac{2x+1}{3}\right], \frac{x+2}{5}, 3$, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

24. Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât cele trei numere să fie în progresie geometrică, în ordinea dată, în fiecare caz în parte:

- a) 1, x , 3; b) $x^2 + 1$, $2x + 6$, 20; c) 2 , $\left[\frac{1-x}{3}\right]$, 8; d) $\left[\frac{3x-1}{5}\right]$, $\sqrt{x}$, 3 ($x \geq 0$).

25. Pe fiecare stradă, casele au numere pare pe dreapta străzii și numere impare pe stânga străzii, privind din capătul din care începe numerotarea.

a) A câta casă de pe stânga străzii are numărul 21?

b) Câte case se găsesc pe partea dreaptă a străzii, între numărul 12 și numărul 36, incluzându-le și pe acestea?



26. Dobânda acordată de o bancă pentru un cont de economii „cu capitalizare” este de 5% pe an. La finalul fiecărui an, dobânda se adaugă la suma aflată în cont la începutul anului, iar la această sumă se aplică, din nou, aceeași dobândă.

a) Dacă suma inițială din contul de economii este de 10 000 euro, ce sumă va fi în cont după 5 ani?
b) Știind că o persoană are într-un astfel de cont, la finalul unui an, 46 305 euro, ce sumă a depus cu 3 ani în urmă?

27. Se consideră a, b, c trei numere reale nenule și distincte. Demonstrează că, dacă $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b-c}$ sunt în progresie aritmetică, atunci a, b, c sunt în progresie geometrică.

28. Calculează, în funcție de primul termen al progresiei geometrice $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și de rația q a acesteia, produsul $P = \prod_{k=1}^n y_k$.

29. Numerele reale x, y, z au module diferite. Demonstrează că:

- a) expresiile $a = \frac{1}{x+y}$, $b = \frac{1}{z+x}$, $c = \frac{1}{y+z}$ sunt bine definite;
b) x^2, y^2, z^2 sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică.

30. Știind că numerele reale a, b, c sunt, în această ordine, în progresie aritmetică, demonstrează că:

- a) $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică;
b) $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ($a, b, c > 0$) sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.

31. Se consideră progresia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și numerele $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$, $T = a_3 + a_4 + \dots + a_{12}$. Determină, în funcție de S și de T , primul termen și rația progresiei, știind că:

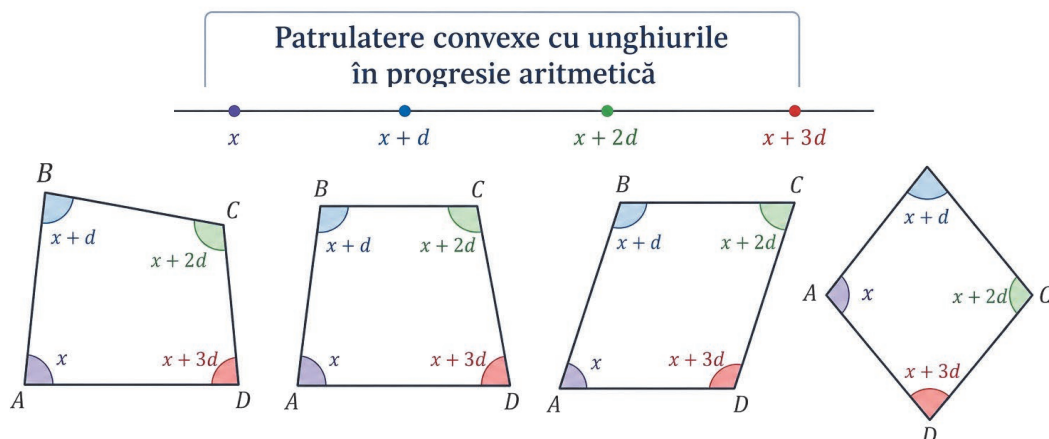
- a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică; b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie geometrică.

32. Stabilește valoarea de adevăr a propoziției: „Numerele a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, în această ordine, dacă și numai dacă $a + b$, $b + c$, $c + d$ sunt în progresie aritmetică, în această ordine.”

33. Rezolvă, în $\mathbb{R}$, ecuațiile:

- a) $\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(x + \frac{5}{2}\right) + \left(x + \frac{9}{2}\right) + \dots + \left(x + \frac{225}{2}\right) = 3306$; b) $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^x = 16^9$, $x \in \mathbb{N}$;
c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;
e) $\left[x + \frac{1}{10}\right] + \left[x + \frac{21}{10}\right] + \left[x + \frac{41}{10}\right] + \dots + \left[x + \frac{201}{10}\right] = 99$, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.
f) $\{x\} + \{x\}^2 + \{x\}^3 + \dots + \{x\}^9 = \frac{1024\{x\} - 1}{1024(1 - \{x\})}$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracționară.

34. Determină toate patrulatele convexe cu măsurile unghiurilor în progresie aritmetică.



35. Demonstrează că numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ nu pot fi termeni ai unei progresii aritmetice și nici termeni ai unei progresii geometrice.

36. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de rație r .

a) Demonstrează că termenii $x_1, x_5, x_9, x_{13}, \dots$ formează o progresie aritmetică și precizează rația acestei progresii.

b) Demonstrează că, dacă $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică de numere naturale, atunci $x_{b_1}, x_{b_2}, x_{b_3}, \dots$ formează o progresie aritmetică.

37. a) Calculează suma $T = 1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{4}{q^3} + \dots + \frac{n}{q^{n-1}}$, $q \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exersează strategia/strategiile de calcul pentru suma

$$1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{4}{q^3} + \dots + \frac{n-1}{q^{n-2}} + \frac{n}{q^{n-1}}$$

1 pentru $q = 2$ și $n = 20$

$$T(20) = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{19}{2^{18}} + \frac{20}{2^{19}} = ?$$

2 pentru $q = -\frac{1}{3}$ și $n = 50$

$$T(50) = 1 + \frac{2}{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{(-\frac{1}{3})^2} + \frac{4}{(-\frac{1}{3})^3} + \dots + \frac{49}{(-\frac{1}{3})^{48}} + \frac{50}{(-\frac{1}{3})^{49}} = ?$$

⚡ Atenție: $q \neq 0$ și $q \neq 1$ (termenii sunt bine definiți și $q^{-k} = \frac{1}{q^k}$ pentru $k \geq 1$).

b) Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică de rație r , iar $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, cu termeni nenuli, de rație q , calculează $S = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}$ în funcție de a_1, b_1, r și q .

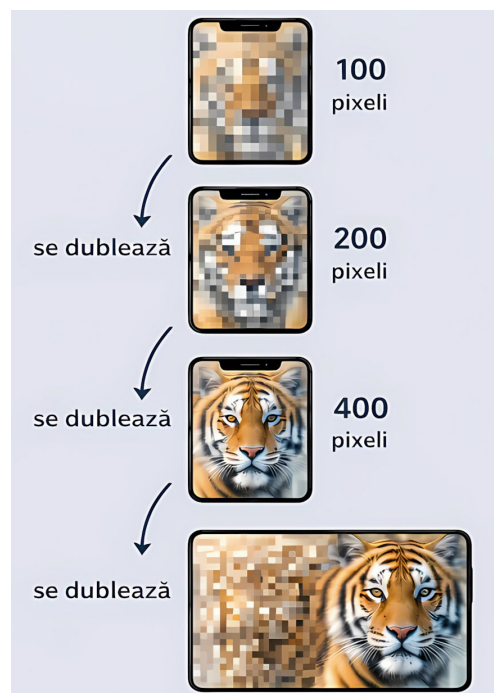


38. În aplicațiile digitale, o imagine poate fi afișată progresiv: inițial cu puțini pixeli, apoi cu un număr din ce în ce mai mare, mărindu-se claritatea progresiv.

Problema pixelilor. Imaginea unui tigru este afișată pe telefon. La început sunt afișați 100 de pixeli, iar la fiecare pas numărul de pixeli se dublează.

a) Modelează matematic situația din imagine și răspunde la întrebarea „Câți pixeli vor fi afișați la pasul al șaptelea?”.

b) Claritatea imaginii pe un ecran este foarte bună pentru minimum 2 milioane de pixeli. Utilizează inteligența artificială pentru a afla după câți pași, în ipotezele posterului alăturat, imaginea devine foarte bună.



Proiect: Cum se propagă un mesaj pe rețelele sociale?

Context

Pe platforme sociale, un mesaj, un videoclip sau o campanie pot deveni *virale*. Studiul impactului propagării unor mesaje este una dintre preocupările lumii în care trăim.

Scop

Proiectul are ca scop investigația modului în care se propagă informația și modelarea matematică a acestui proces. La nivelul clasei, faceți o analiză comparativă a *creșterilor liniare* și a *celor exponențiale*, după ce, în grupe de 8 elevi, veți studia aceste tipuri de creșteri pentru propagarea „informației” în două scenarii posibile: 4 elevi din grupă vor lucra pe un scenariu, ceilalți 4 pe celălalt scenariu, alegându-și o „știre” propagată pe rețelele sociale în momentul începerii proiectului.

● **Scenariul A – creștere liniară:** distribuirea mesajului se face la același număr fix de persoane în fiecare zi (cel puțin 2) → **progresie aritmetică**.

● **Scenariul B – distribuire exponențială (virală):** fiecare persoană, începând din a doua zi, îl trimite la tot atâtea persoane câți receptori au existat în a doua zi (cel puțin 2) → **progresie geometrică**.

Etapele proiectului

1 *Primul termen și rația progresiei:* vor fi aceleași pentru ambele scenarii. Primul termen va reprezenta numărul de persoane care distribuie mesajul la un moment anume de timp, iar rația va fi constanta de **variație liniară**, respectiv **multiplicativă**.

2 *Termen general al progresiei. Suma primilor n termeni:* fiecare echipă va avea un termen de control – după 10 zile de la transmiterea mesajului – și va calcula numărul de receptori din a 10-a zi, precum și numărul total de receptori în cele 10 zile, considerând că, de fiecare dată, receptorii sunt persoane noi.

3 *Aplicații:* Știind că interesul publicului pentru mesaj scade în timp, iar maximul de propagare se atinge în a 10-a zi, elevii vor calcula în cât timp „știrea” nu mai prezintă interes, dacă **scăderea**

interesului publicului – măsurată în număr de receptori – are loc tot progresiv (în scenariul A cu o rație dublată în valoare absolută, iar în scenariul B cu o rație înjumătățită față de cea inițială).

■ **Rezultat așteptat.** Un *portofoliu digital* sau *fizic* (poster) care să conțină:

- reprezentarea grafică a creșterii liniare sau exponențiale a propagării mesajului, pentru fiecare subgrupă;
- analiza comparativă de impact în ziua a 10-a de la propagarea mesajului, în cele două scenarii, pentru aceeași „știre”, având ca suport toate calculele aferente;
- analiza comparativă referitoare la termenul de „stingere” a interesului public pentru mesajul propagat;
- interpretarea rezultatelor calculate, în contextul evenimentului real care a produs „știrea”.

■ **Implicarea membrilor grupului. Evaluare** (cu accent pe proces)

● **Roluri:** fiecare membru al grupului va avea un rol sau mai multe, fără a se suprapune cu cele ale coechipierilor (coordonator de date în contextul dat, designer grafic, auditori de calcule pentru calcule diferite, negociator de concluzii cu subgrupa pereche).

● **Evaluarea.** Se evaluează:

- ▶ **progresul:** cum ați integrat noțiunea nouă din fiecare lecție în proiect?
- ▶ **rigoarea:** sunt calculele corecte și bine justificate?
- ▶ **colaborarea:** cum ați analizat în echipă și cum ați negociat cu subgrupa pereche concluziile analizei comparative?
- ▶ **reflecția:** în ce alte situații poate fi aplicat modelul matematic pe care l-ați furnizat în proiect?

■ Proiectul vizează următoarele competențe și conținuturi:

● **competențe:** identificarea și utilizarea elementelor specifice progresiilor în diverse contexte practice, crearea modelului matematic și analiza rezultatelor acestuia pentru o situație cotidiană.

● **conținuturi:** progresii aritmetice și progresii geometrice; determinarea termenului general al unei progresii, suma primilor n termeni ai unei progresii.

La finalul fiecărei lecții veți găsi informații suplimentare pentru a parcurge etapele de realizare a proiectului!

Adaugă portofoliul digital (printat) sau posterul la PORTOFOLIUL tău de învățare.

Înainte...

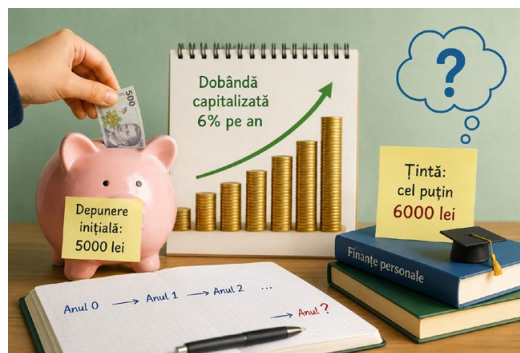


...și după



Test de evaluare sumativă

- Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are termenul general $x_n = \frac{3n+2}{n+1}$, $n \geq 1$.
 - (1p) Calculează suma primilor trei termeni ai șirului.
 - (1p) Demonstrează că șirul nu este nici progresie aritmetică, nici progresie geometrică.
- Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$.
 - (1p) Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică, cu $a_3 = 8$ și rația $r = 3$, determină a_{2026} și suma primilor 50 de termeni ai progresiei.
 - (1p) Dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică, cu $b_2 = q = 2$, unde q este rația progresiei, calculează b_{12} și suma primilor 12 termeni ai progresiei.
 - (1p) Verifică dacă numărul 512 este termen al fiecărei progresii.
- (1p) Află valorile lui $x \in \mathbb{R}$ știind că numerele x^2 , $x^2 + 2$ și $x^2 + 8$ sunt termeni consecutivi într-o progresie geometrică.
 - (1p) Determină $x \in \mathbb{N}$ știind că $1 + 5 + 9 + \dots + x = 780$.
- (1p) Un cont de economii are dobândă capitalizată de 6% pe an, însemnând că dobânda acumulată la finalul unui an se adaugă la suma existentă la începutul anului, iar în anul următor dobânda de 6% se aplică întregii sume. Un elev își depune într-un astfel de cont bursa de merit economisită, în valoare de 5 000 lei. După câți ani elevul va avea în cont cel puțin 6 000 de lei?
- (1p) Determină numărul real a știind că numerele a , $[a]$, $\{a\}$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a , iar $\{a\}$ reprezintă partea lui fracționară).



Timp de lucru: 100 de minute

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.



3

— Keith Devlin (n. 1947), profesor la Stanford University și autor al multor lucrări de popularizare a matematicii.

55

A. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE FUNCȚIILOR

Funcții – Proprietăți generale

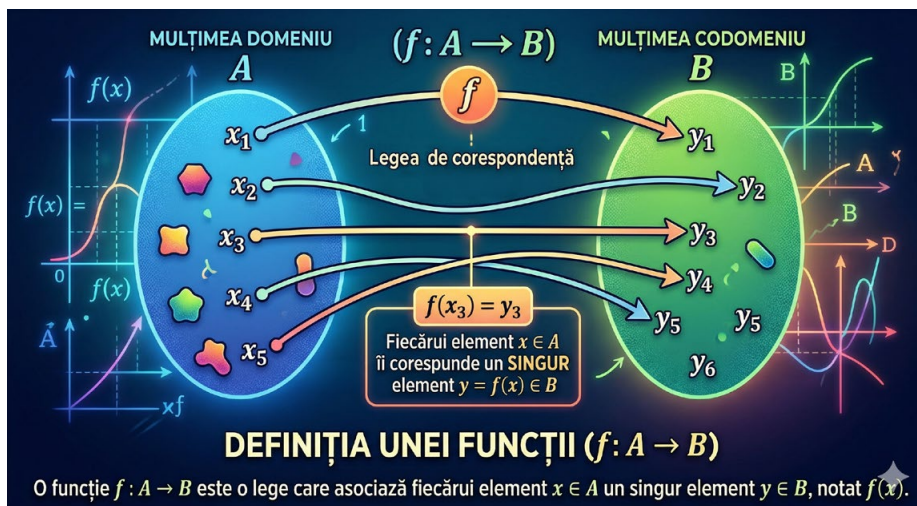
REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

În viața de zi cu zi, procesele și fenomenele se descriu prin *relații de dependență*. De exemplu, costul total al consumului de energie electrică *variază în funcție de* numărul de kilowați-oră înregistrați, aria suprafeței unui disc *depinde strict de* lungimea razei sale, viteza de propagare a unei epidemii *evoluează în funcție de* timp. Chiar și în domenii de vârf, cum ar fi *criptografia* sau *informatica*, conceptul de dependență este esențial. De exemplu, algoritmul care calculează o valoare de *hash* (o amprentă digitală unică a unui fișier) asociază *fiecărui* set de date de intrare o *singură* secvență de ieșire. În esență, toate aceste situații implică o *corespondență* prin care *fiecărui element* dintr-un prim set de valori (*variabila cauză* sau *independentă*) îi este asociat, într-un mod strict determinat, *un singur element* dintr-un al doilea set de valori (*variabila efect* sau *dependentă*).

Nevoia de a descrie, de a analiza, de a modela și de a prezice riguros aceste relații unice și stabile a generat conceptul fundamental și universal valabil în matematică: *funcția*.

DEFINIȚIE

O **funcție** f definită pe o mulțime A cu valori în mulțimea B (notată $f: A \rightarrow B$) este o lege de corespondență care asociază *fiecărui element* x din mulțimea A un *singur element* y din mulțimea B . Acest element y se numește *imagea lui x prin funcția f* și se notează $y = f(x)$; uneori scriem $x \rightarrow f(x)$.



Domeniul de definiție (A): mulțimea elementelor x (variabila independentă, argumentul funcției).

Codomeniul (B): mulțimea în care funcția ia valori y (variabila dependentă, rezultatul corespondenței).

Imagea funcției ($Im(f)$ sau $f(A)$): mulțimea tuturor valorilor efectiv obținute prin funcție (cele care sunt rezultatul direct al corespondenței). Formal, $Im(f) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$.

Imagea unei submulțimi: dacă $C \subset A$, mulțimea $f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}$ este imagea mulțimii C prin funcția f .

Domeniul maxim de definiție al funcției: mulțimea tuturor elementelor x pentru care legea de corespondență $f(x)$ are sens.

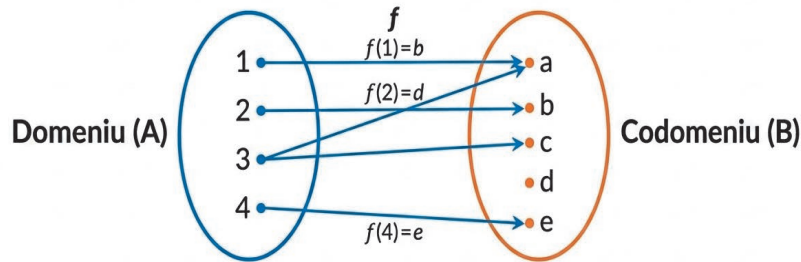


OBSERVAȚII

Nu orice punere în relație (corespondență) a elementelor a două mulțimi este funcție. Astfel, o corespondență *nu este funcție* dacă cel puțin unui element din domeniul de definiție îi sunt asociate două sau mai multe valori în codomeniu sau nu îi corespunde niciun element din codomeniu (nu este respectată condiția de *unicitate* a imaginii).

Toți termenii unui șir $(a_n)_{n \geq 1}$ pot fi priviți ca fiind valorile unei funcții $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(n) = a_n$.

Exemplu de corespondență care NU este FUNCȚIE



DE CE ACEASTĂ CORESPONDENȚĂ NU ESTE O FUNCȚIE?

Definiția Funcției: O corespondență $f: A \rightarrow B$ este o funcție dacă fiecărui element x din Domeniul A îi corespunde un unic element y din Codomeniul B.

! Elementul '3' din Domeniul A are două corespondențe distincte în Codomeniul B ('a' și 'c'). $\{f(3) = \{a, c\}\}$

Modalități de descriere a unei funcții

O funcție poate fi descrisă în mai multe moduri:

- *analitic* (prin formulă): $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$; domeniul maxim de definiție $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$;
- *sintetic* (prin tabel de valori): utilizat frecvent pentru funcțiile definite pe mulțimi finite.

x	1	2	3	4
f(x)	-1	0	3	-5

- *grafic*: prin reprezentarea geometrică a perechilor $(x, f(x))$ într-un reper cartezian xOy , în cazul funcțiilor numerice (al funcțiilor definite pe $\mathbb{R}$ sau submulțimi ale acesteia);
- *descriptiv* (prin descrierea corespondențelor): de exemplu, „Funcția care asociază fiecărui număr real cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu el” (*funcția parte întreagă*, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$);
- *ecuație funcțională*: de exemplu, $f(x) + 2f(1 - x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ sau $y = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Funcții egale. Restricții. Preimagine



DEFINIȚIE

Două funcții $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$ sunt *egale* dacă:

- $A = C$ (au același domeniu de definiție);
- $B = D$ (au același codomeniu);
- $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in A$ (au aceeași lege de corespondență).

Observație: În acest caz, notația utilizată este $f = g$.

REFLECTĂM

Funcțiile $f, g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g(x) = x^4$ sunt egale. Justifică, apoi dă exemple de perechi de funcții care nu sunt egale pentru că nu îndeplinesc exact una dintre egalitățile din definiție. Compară cu exemplele colegilor.

DEFINIȚIE

Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$. Dacă $A' \subset A$, atunci funcția $g: A' \rightarrow B$ definită prin $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A'$ se numește **restricția** funcției f la mulțimea A' .

Exemplu: funcția $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$ este restricția funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

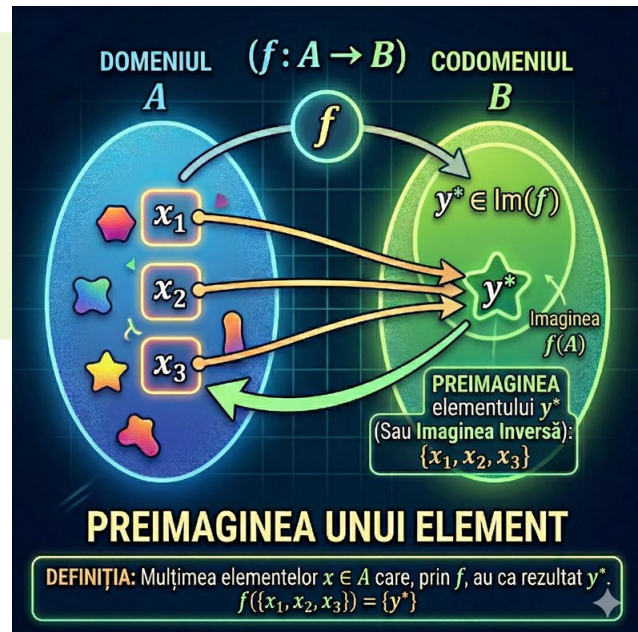
DEFINIȚIE

Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$ și y un element din codomeniul B .

Preimagea (sau **imagea inversă**) elementului y prin funcția f este **mulțimea tuturor elementelor** x din domeniul A care, prin funcția f , sunt puse în corespondență cu elementul y . Preimagea este notată $f^{-1}(\{y\})$ și este definită astfel: $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$.

Observație: Preimagea unui singur element y este întotdeauna o **mulțime**, care poate să nu conțină niciun element sau să conțină unul sau mai multe elemente din domeniul A .

Preimagea unei submulțimii $Y \subset B$ este $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$, adică mulțimea tuturor elementelor din domeniul A care au în corespondență prin funcția f elementele ce formează Y .



EXEMPLU

Se consideră mulțimile $A = \{\text{Alex, Bianca, Cristian, Dora}\}$ (domeniul) și $B = \{7, 8, 9, 10\}$ (codomeniul, reprezentând notele posibile la un test); funcția $f: A \rightarrow B$ asociază fiecărui elev (identificat prin prenumele său) nota obținută la test: $f(\text{Alex}) = 9$, $f(\text{Bianca}) = 8$, $f(\text{Cristian}) = 9$, $f(\text{Dora}) = 10$.

Pentru a determina preimagea notei 9, identificăm elevii x pentru care $f(x) = 9$; cum doar $f(\text{Alex}) = 9$, și $f(\text{Cristian}) = 9$, preimagea notei 9 este mulțimea: $f^{-1}(\{9\}) = \{\text{Alex, Cristian}\}$.

Reflecție: Ce mulțime reprezintă $f^{-1}(\{7\})$? Are sens $f^{-1}(\{6\})$?

SITUAȚIE REALĂ ȘI MODELARE ANALITICĂ – COSTUL ABONAMENTULUI DE DATE MOBILE

Un elev vrea să aleagă un plan tarifar pentru abonamentul de date mobile (internet). Compania X oferă un abonament care include o taxă lunară fixă plus un cost suplimentar pentru fiecare GB (Giga-byte) consumat peste limita inclusă.

Datele abonamentului:

- **taxa fixă** (abonament de bază): 30 lei pe lună.
- **cost suplimentar:** 5 lei pentru fiecare GB consumat **peste** traficul inclus.

Modelul matematic: exprimăm **costul total lunar** C în funcție de **traficul de date suplimentar** x (în GB) consumat.

Variabile:

- x – *variabila independentă*: valorile corespunzătoare traficului suplimentar consumat, în GB; domeniul de definiție (din punct de vedere practic) este $D = [0, \infty)$ (nu se poate consuma un număr negativ de GB);
- $C(x)$ – *variabila dependentă*: costul total lunar, în lei.

Funcția corespunzătoare modelului este $C: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, C(x) = 5x + 30$.

Interpretare:

- Coeficientul lui x ($a = 5$) reprezintă *costul marginal*: 5 lei pentru fiecare GB suplimentar.
- Ordonata la origine ($b = 30$) reprezintă *costul fix* (abonamentul de bază).
- În condițiile unui consum de 10 GB peste limita inclusă în abonament, costul total al lunii în care s-a înregistrat acest consum este $C(10) = 50 + 30 = 80$ (lei).
- Pentru un consum responsabil, elevul solicită companiei să fie atenționat în momentul în care costul total lunar atinge valoarea de 80 de lei; astfel, elevul trebuie să se încadreze într-un trafic suplimentar pentru care $C(x) \leq 80$, atenționarea fiind asociată pragului de 10 GB.

**CONTRAEXEMPLU**

Definim o relație $\mathcal{R}$ între două mulțimi în contextul unei discipline, de exemplu, *Informatică*:

- *domeniu*: $A = \{\text{Elevii clasei a IX-a}\}$
- *codomeniu*: $B = \{\text{Notele posibile}\}$, adică $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Relația $\mathcal{R}$: fiecare element (elev) din mulțimea A este asociat cu *mulțimea tuturor notelor* obținute de elev la Informatică în timpul unui an școlar, $\mathcal{R}: \text{Elev} \rightarrow \text{Note obținute la Informatică}$

Relația $\mathcal{R}$ nu îndeplinește *condiția de unicitate* din definiția funcției (fiecare element din domeniul A trebuie să aibă asociat *un singur* element în codomeniul B), deci nu este o funcție.

Însă, modificând $\text{Elev} \rightarrow \text{Media finală obținută}$, putem obține o funcție.

Exemple de funcții numerice: modulul, partea întreagă și partea fracționară

Funcția modul (sau *valoarea absolută*), definită prin $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = |x|$, măsoară distanța de la origine la punctul x pe axa numerelor, codomeniul putând fi restricționat doar la valori nenegative.

Funcția parte întreagă asociază fiecărui număr real x cel mai mare întreg care nu îl depășește, notat $[x]$ (adică $[x] \leq x < [x] + 1$); astfel, obținem $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = [x]$. În completarea acesteia, **funcția parte fracționară**, $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ este definită prin legea $f(x) = \{x\} = x - [x]$. Împreună, aceste funcții permit descompunerea oricărui număr real x într-o valoare întreagă și una reziduală (subunitară, nenegativă): $x = [x] + \{x\}$, oricare ar fi x . Imaginea funcției parte întreagă este mulțimea $\mathbb{Z}$, iar imaginea funcției parte fracționară este $[0, 1)$.

**EXERCIȚII REZOLVATE**

1. Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

Determină domeniul de definiție, codomeniul și imaginea funcției.

Rezolvare:

Prin *identificare*, domeniul de definiție este $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, iar codomeniul este $\mathbb{R}$.

Pentru imaginea funcției ($Im(f)$), calculăm valorile funcției pentru fiecare element din domeniu: $f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$, $f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$, $f(0) = 2(0) - 1 = -1$, $f(1) = 2(1) - 1 = 1$, $f(2) = 2(2) - 1 = 3$. Imaginea funcției este mulțimea formată din valorile calculate: $Im(f) = \{-5, -3, -1, 1, 3\}$.

2. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$ și $A_1, A_2 \subseteq A$. Atunci $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Demonstrație:

Vom folosi *metoda dublei incluziuni*.

„ $\subseteq$ ” Demonstrăm că $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$; fie $y \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2$ astfel încât $f(x) = y \Rightarrow (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \Rightarrow (f(x) \in f(A_1)) \vee (f(x) \in f(A_2)) \Rightarrow f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$.



„ $\supseteq$ ” Demonstrăm că $f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$; fie $y \in f(A_1) \cup f(A_2) \Rightarrow (y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2))$. Dacă $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x \in A_1$ astfel încât $f(x) = y \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \Rightarrow f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$. Dacă $y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x \in A_2$ astfel încât $f(x) = y \Rightarrow x \in A_1 \cup A_2 \Rightarrow f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ 3x + 2, & x > 0 \end{cases}$. Determină $f([-1, 0]), f((-1, 1])$ și imaginea funcției.

Rezolvare:

Din $2x + 1 = y$ obținem $x = \frac{y-1}{2}$. Cum $x \in [-1, 0]$, obținem $y \in [-1, 1]$, de unde $f([-1, 0]) = [-1, 1]$. Mai departe, $f((-1, 1]) = f((-1, 0] \cup (0, 1]) = f((-1, 0]) \cup f((0, 1]) = [-1, 1] \cup (2, 5]$.

$Im(f) = f((-\infty, 0]) \cup f(0, \infty) = (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 0 \\ -x^2 + 3, & x \geq 0 \end{cases}$. Determină $f((-2, 3])$.

Rezolvare:

$f((-2, 3]) = f((-2, 0)) \cup f([0, 3])$.

Pentru $f((-2, 0))$, considerăm ecuația $3x - 1 = y$, care trebuie să aibă soluție în $(-2, 0)$, așadar $\frac{y+1}{3} \in (-2, 0) \Rightarrow y \in (-7, -1)$.

Pentru $f([0, 3])$, considerăm ecuația $-x^2 + 3 = y$, care trebuie să aibă soluție în $[0, 3]$. Pentru ca ecuația $x^2 = 3 - y$ să admită soluții reale este necesar ca $3 - y \geq 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 3]$. În continuare, $x = \pm\sqrt{3-y} \in [0, 3] \Rightarrow \sqrt{3-y} \in [0, 3] \Rightarrow 3-y \in [0, 9] \Rightarrow y \in [-6, 3]$.

În concluzie, $f((-2, 3]) = f((-2, 0)) \cup f([0, 3]) = (-7, -1) \cup [-6, 3] = (-7, 3]$.



EXERCITII PROPUSE

A.

1. Care dintre asocierile următoare definesc o funcție?

- unei persoane îi asociem vârsta ei;
- unei cărți îi asociem numărul de pagini;
- unei drepte din spațiu îi asociem un plan paralel cu ea;
- unei păsări îi asociem o culoare a penajului;
- unui triunghi îi asociem centrul său de greutate.

În cazurile cu răspuns cert afirmativ, justifică și apoi determină domeniul și codomeniul.

2. Fie funcția $f: \{-3, 0, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 5 - x$. Determină imaginea funcției.

3. Decide care dintre următoarele corespondențe $f: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ reprezintă o funcție și justifică:

- $f(1) = 1, f(2) = 3$; b) $f(1) = 2, f(1) = 3, f(2) = 1$.

4. (**Activitate în pereche**) Se consideră mulțimea $A = \{2, 4, 6, 8\}$ și corespondența $x \rightarrow \frac{x}{3}$. Determinați toate submulțimile $B \subset A$ astfel încât corespondența să corespundă:

- unei funcții $f: B \rightarrow \mathbb{Z}$; b) unei funcții $f: B \rightarrow \mathbb{Q}$.

Comparați răspunsurile la nivelul clasei.

5. Calculează $f(2)$ și $f(-1)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{dacă } x < -1 \\ 1, & \text{dacă } x \in [-1, 2] \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases}$.

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4$. Determină $Im(f)$.

7. Scrie restricția funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| - 2$ la domeniul $A = [0, \infty)$. Reflectează și asupra formulei corespunzătoare legii de corespondență.



8. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a - 1)x^2$ și $g(x) = 0$ să fie egale. Explică de ce nicio altă lege de corespondență aleasă pentru funcția g nu mai poate îndeplini condiția de egalitate a funcțiilor, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
9. Studiezi un model matematic simplu pentru un traseu de *hoverboard*. Înălțimea la care te afli (în metri), descrisă de $f(x)$, este dată de legea $f(x) = 2x - 3$, unde $x \in \mathbb{R}$ este timpul în secunde. Determină preimaginea înălțimii de 7 metri.



B.

10. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$. Demonstrează că dacă $x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$.
11. (**Activitate în pereche**) Determinați domeniul maxim de definiție $A \subset \mathbb{R}$ pentru următoarele funcții:
 a) $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 4}$; b) $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$; c) $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{|x| - 3}$.
 Pentru toate funcțiile de mai sus, definite pe domeniul maxim de definiție, calculați imaginile corespunzătoare valorilor 0 și 2. Sunt 0 și 2 imagini ale vreuneia dintre funcțiile de mai sus?
12. Se consideră funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^2 - x + 1$. Verifică dacă elementul $y = 1$ aparține imaginii funcției, iar în caz afirmativ determină preimaginea acesteia. Aceeași cerință pentru $y = 0$.
13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ 3x + a, & x > 0 \end{cases}$. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = f(1)$. Precizează mulțimea de valori reale ale lui a pentru care, oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ reprezintă o mulțime cu cel mult un element.
14. Se dau funcțiile $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ și $g: [1, 2] \rightarrow [2, 3], g(x) = x + 1$. Sunt funcțiile f și g egale? Justifică.
15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Justifică faptul că $1 \notin \text{Im}(f)$.
16. Determină imaginea funcției: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$; b) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$.
17. Se consideră funcția $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x + 2$. Dă exemple de restricții ale acestei funcții, apoi determină restricția care să aibă imaginea $\{1, 3\}$.
18. O colegă modelează traiectoria mingii aruncate la un coș de baschet, unde $f(x)$ este înălțimea (în metri) la care se află mingea în funcție de distanța orizontală x (în metri) față de punctul de aruncare. Funcția este: $f(x) = -x^2 + 4x$, domeniul de definiție este $D = [0, 4]$. Determină preimaginea înălțimii de 3 metri.
19. Andrei folosește autobuzul pentru a ajunge la liceu. El are un card de transport reîncărcabil. Costul inițial al cardului este de 15 lei (taxă pe care o plătește o singură dată la început, contravaloarea cardului), iar costul unei călătorii este de 3 lei. Andrei și-a propus să nu cheltuie mai mult de 105 lei pe transport, incluzând și costul inițial al cardului.
 a) Definește o lege $f(x)$ care exprimă *costul total* pentru transport (în lei) necesar lui Andrei, în funcție de *numărul de călătorii efectuate* (x).
 b) Stabilește domeniul de definiție D al funcției, ținând cont de bugetul maxim propus de Andrei (105 lei) și de faptul că numărul de călătorii este un număr întreg și pozitiv.
 c) Determină imaginea funcției, $\text{Im}(f)$, adică mulțimea tuturor costurilor totale posibile pe care le poate avea Andrei, respectând bugetul propus.

C.

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care verifică relația $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$ și pentru care $f(1) = 3$. Demonstrează prin inducție că, pentru orice numere naturale $x_1, x_2, \dots, x_n$, $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$. Calculează $f(2030)$.



21. (**Activitate în pereche**) Determinați imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Comparați strategia voastră cu a altor perechi.
22. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și pentru care $f(0) = 0$. Demonstrează că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) < 0$ sau $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
23. Determină toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x^2) = x \cdot f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
24. Un dezvoltator de aplicații pentru telefoane folosește o funcție pentru a modela *scorul de popularitate* $f(x)$ al unei noi aplicații, în funcție de numărul de zile x de la lansare. Scorul este influențat de recenzii și promoții. Funcția este definită pe ramuri pe domeniul $D = [0, \infty)$: $f(x) = \begin{cases} 4x + 10, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 5 \\ -2x + 40, & \text{dacă } x > 5 \end{cases}$. Determină toate momentele x la care scorul aplicației a fost egal cu 30.
25. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care verifică relația: $x \cdot f(x) + 2 \cdot f(1 - x) = x^2 + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Determină expresia analitică a funcției f .
26. Determină toate mulțimile finite $A \subset \mathbb{Z}$ pe care poate fi definită o funcție $f: A \rightarrow A$ care verifică proprietatea $f(f(x)) = x$ pentru orice $x \in A$.
27. Alina vrea să se aboneze la o platforma de streaming. Compania care deține platforma are un sistem de tarificare pe bază de consum lunar, structurat pe două trepte: *până la 10 ore de vizionare (inclusiv)* – costul este de 15 lei (un tarif fix, indiferent de timpul de utilizare a platformei), respectiv *peste 10 ore de vizionare* aplicându-se, pentru fiecare oră suplimentară care depășește limita de 10 ore, un cost de 2 lei pe oră.
- a) Definește legea $f(x)$ care exprimă *costul total lunar* (în lei) plătit de Alina în funcție de *numărul de ore vizionate* (x).
- b) Stabilește domeniul de definiție D al funcției, presupunând că, din motive practice (somn, școală, teme), Alina nu poate viziona mai mult de 80 de ore pe lună.
- c) Determină imaginea funcției $Im(f)$, adică mulțimea tuturor costurilor totale posibile pe care le poate plăti Alina.
28. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b\}$.
- a) Câte elemente conține produsul cartezian $A \times B$?
- b) Dacă $f: A \rightarrow B$ este o funcție, câte elemente conține G_f ?
- c) Câte funcții $f: A \rightarrow B$ există?
29. Determină imaginile următoarelor funcții: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$; c) $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$; d) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x$.
30. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ -2x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$. Determină imaginile mulțimilor prin funcția f : a) $\{-2, 3\}$; b) $[2, 4)$; c) $(-3, 5)$; d) $(-\infty, -2]$; e) $(-5, 0)$; f) $\mathbb{R}$.
31. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ \sqrt{x + 3}, & x \geq 0 \end{cases}$.
- a) Determină $f([0, 2))$ și $f^{-1}(\{3\})$; b) Este 1 o valoare a lui f ? c) Verifică faptul că $Im(f) \subset (1, \infty)$.
32. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ -\frac{1}{n}, & x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right), n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{n}, & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}^* \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.
- Determină valorile funcției în punctele: $2, 3, -4, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{7}, \sqrt{2}, \sqrt{3} - 2$.



Graficul unei funcții. Drepte remarcabile și interpretare geometrică



REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

În lecția anterioară, funcția a fost introdusă ca fiind o corespondență ce modelează dependența dintre două mărimi, în anumite condiții. Deși o formulă analitică (precum $f(x) = 2x + 1$) ne oferă precizie, ea nu ne dezvăluie imediat *comportamentul* funcției – cum variază valoarea pe măsură ce argumentul se schimbă.

Graficul unei funcții este instrumentul esențial care ne permite să transpunem relațiile algebrice în imagini geometrice, facilitând interpretarea rapidă a datelor.



DEFINIȚIE

Se consideră $f: A \rightarrow B$ o funcție, unde $A, B \subset \mathbb{R}$.

Graficul funcției f , notat G_f , este mulțimea tuturor perechilor (x, y) care satisfac relația $y = f(x)$, unde x aparține domeniului A .

$$G_f = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ și } y = f(x) \} = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}.$$

Este important de reținut că G_f este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Exemplu:

Mulțimea care reprezintă graficul funcției $f: \{-2, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ este: $G_f = \{(-2, 4), (0, 0), (2, 4)\}$.



OBSERVAȚIE

Graficul unei funcții numerice se poate reprezenta geometric într-un sistem de axe xOy : pentru o pereche ordonată $(x, y) \in G_f$, primul element al perechii este *abscisa* (x – poziția pe orizontală), iar al doilea element este *ordonata* ($y = f(x)$ – poziția pe verticală, înălțimea). Fiecărui element din mulțimea G_f îi corespunde un unic *punct geometric* $M(x, y)$ în plan, iar mulțimea punctelor M este reprezentarea geometrică a graficului funcției. Convenim să identificăm graficul cu reprezentarea sa geometrică.

Intersecția graficului cu axele de coordonate

Atunci când există, punctele de intersecție cu axele de coordonate sunt primele repere în trasarea unui grafic:

Intersecția cu axa Oy (axa ordonatelor)	Intersecția cu axa Ox (axa absciselor)
Dacă $0 \in A$ (domeniul de definiție), punctul de intersecție este $P(0, f(0))$. Dacă $0 \notin A$, nu există intersecție cu axa Oy .	Se rezolvă ecuația $f(x) = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt abscisele punctelor de intersecție. Fiecărei soluții reale x_0 a ecuației $f(x) = 0$ îi corespunde câte un punct de intersecție, $P(x_0, 0)$.
$G_f \cap O_y$ poate fi vidă sau formată dintr-un singur element.	$G_f \cap O_x$ poate fi vidă, poate conține un singur element sau mai multe.

Drepte remarcabile în planul în care este fixat un reper cartezian

Studiem intersecția graficului cu două tipuri de drepte:

● **drepte verticale** (de forma $x = m, m \in \mathbb{R}$): reprezintă toate punctele din plan care au aceeași abscisă m ; dacă m aparține domeniului de definiție, intersecția dreptei $x = m$ cu graficul G_f corespunde unui unic punct $(m, f(m))$;

● **drepte orizontale** (de forma $y = m, m \in \mathbb{R}$): reprezintă toate punctele din plan care au aceeași ordonată m ; intersecția dreptei $y = m$ cu graficul se obține rezolvând **ecuația** $f(x) = m$.

Interpretarea geometrică a soluțiilor ecuațiilor $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$

- Ecuația $f(x) = m$ – Soluțiile acestei ecuații sunt abscisele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și dreapta orizontală $y = m$. Numărul de soluții reale distincte ale ecuației este egal cu numărul punctelor de intersecție.
- Ecuația $f(x) = g(x)$ – Soluțiile acestei ecuații sunt abscisele punctelor de intersecție dintre cele două grafice: G_f și G_g .

Semnul unei funcții numerice

Determinarea *semnului unei funcții numerice* (mulțimile de numere reale pe care $f(x) > 0$ sau $f(x) < 0$) se bazează pe poziția graficului față de axa Ox .

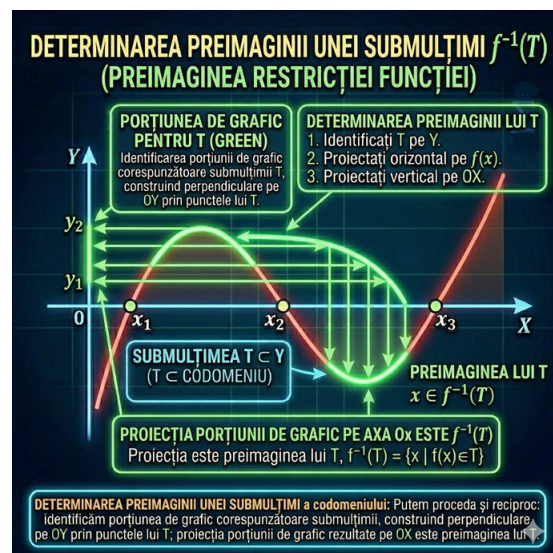
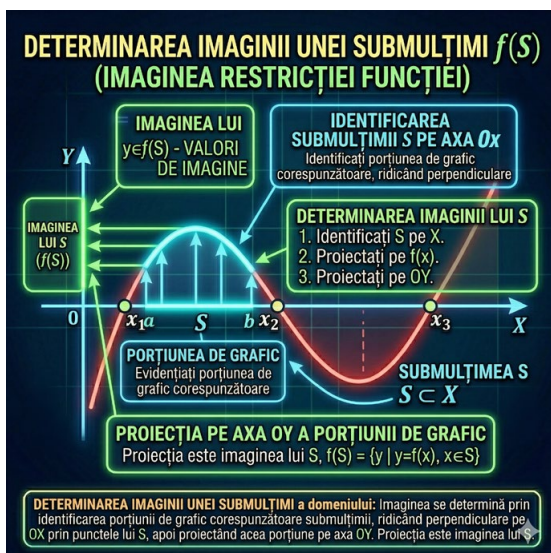
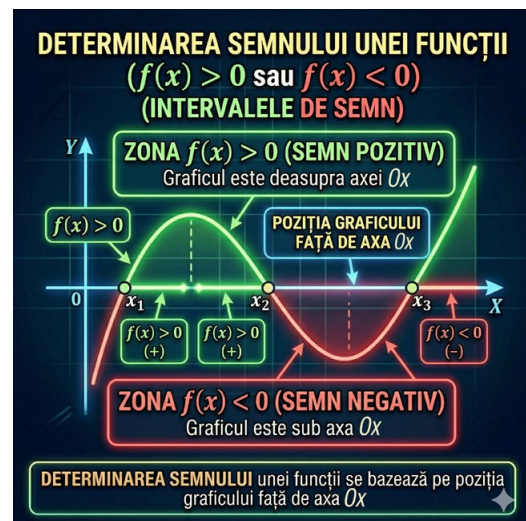
- în cazul $f(x) > 0$, graficul G_f se află *deasupra* axei Ox ;
- în cazul $f(x) < 0$, graficul G_f se află *sub* axa Ox .

Punctele în care graficul intersectează axa Ox (adică soluțiile ecuației $f(x) = 0$) marchează schimbarea de semn a funcției.

Interpretare grafică

Imaginea unei submulțimi A_1 a domeniului (imaginea unei restricții a funcției) se determină grafic astfel:

- se identifică porțiunea de grafic corespunzătoare submulțimii respective, ridicând perpendiculare pe Ox prin punctele lui A_1 ;
- proiecția pe axa Oy a porțiunii de grafic obținute este imaginea lui A_1 .



Putem proceda și reciproc, pentru determinarea *preimaginei* unei submulțimi B_1 a codomeniului, astfel:

- identificăm porțiunea de grafic corespunzătoare submulțimii respective, construind perpendiculare pe Oy prin punctele lui B_1 ;
- proiecția porțiunii de grafic rezultate este $f^{-1}(B_1)$.



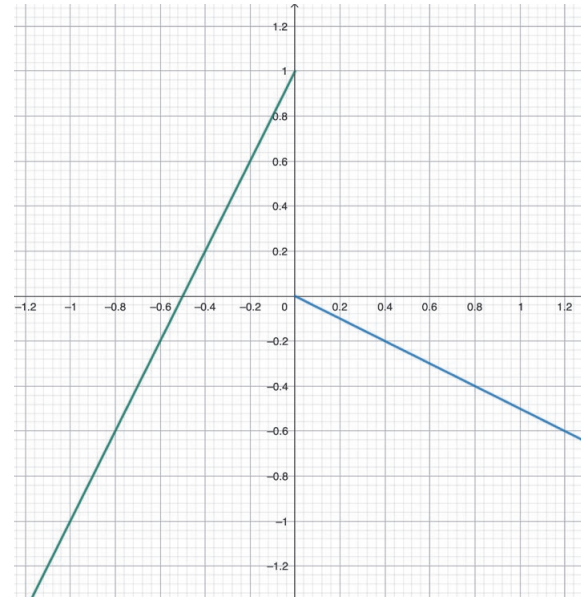
EXEMPLU

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x, & x \geq 0 \end{cases}$.

$G_f \cap Ox = \{(-1, 0)\}; G_f \cap Oy = \{(0, 1)\};$

$f((-1, 2]) = f((-1, 0]) \cup f((0, 2]) = (0, 1] \cup [-1, 1) = [-1, 1] \setminus \{0\};$

$f^{-1}((-1, 0)) = (-2, -1) \cup (0, 2).$



SITUAȚIE REALĂ ȘI MODELARE ANALITICĂ

În contul său de economii, elevul are o sumă inițială de 100 de lei, din care decide să cheltuiască câte 10 lei în fiecare săptămână (gustări, transport suplimentar etc.).

Modelul matematic pentru suma de bani $f(x)$ rămasă în contul de economii al elevului, în funcție de numărul de săptămâni trecute x ; legea care descrie economiile elevului este: $f(x) = -10x + 100$.

Variabile: x – numărul de săptămâni trecute ($x \geq 0$); $f(x)$ – suma rămasă în cont (în lei) la momentul x .

Intersecția cu axa Oy : se obține pentru $x = 0$; $f(0) = -10(0) + 100 = 100$; punctul de intersecție este $(0, 100)$. *Semnificație:* la momentul inițial ($x = 0$ săptămâni), elevul are 100 de lei în cont.

Intersecția cu axa Ox : se obține prin rezolvarea ecuației $f(x) = 0$; $-10x + 100 = 0$, de unde $x = 10$; ecuația admite o unică soluție, deci obținem un unic punct de intersecție, $(10, 0)$. *Semnificație:* după 10 săptămâni, suma rămasă în cont devine 0 lei. La acest moment, banii elevului s-au terminat complet.

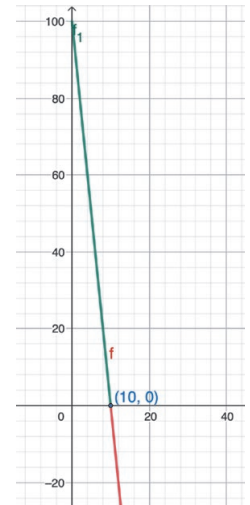
Semnul funcției: semnalează când suma de bani este *pozitivă*, *zero* sau *negativă* (deși o sumă negativă nu este realistă în acest caz, ea ne arată când elevul „iese pe minus” sau ar avea nevoie de credit).

- pentru $f(x) > 0$ (suma disponibilă este pozitivă): $-10x + 100 > 0$, de unde $x < 10$ (schimbăm sensul inegalității la împărțirea cu un număr negativ!). *Concluzie:* pe parcursul *primelor 10 săptămâni* ($x \in [0, 10)$), elevul *dispune de bani* în cont (suma rămasă este pozitivă).

- pentru $f(x) = 0$ (suma disponibilă este zero): se întâmplă exact la 10 săptămâni (intersecția cu Ox).

- pentru $f(x) < 0$ (sumă negativă – *datorie/credit*): $-10x + 100 < 0$, de unde $x > 10$. *Concluzie:* după *săptămâna a 10-a* ($x \in (10, \infty)$), suma inițială a fost cheltuită integral, iar elevul ar trebui să se *împrumute* pentru a continua să cheltuie la fel.

Acest exemplu arată că graficul pornește din punctul de coordonate $(0, 100)$, care semnifică economiile inițiale și traversează axa Ox la $(10, 0)$, punctul critic unde suma inițială de bani a fost cheltuită integral.





EXERCITII REZOLVATE

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6$.

- Determină intersecțiile cu axele.
- Determină semnul funcției $f(x)$.
- Rezolvă grafic ecuația $f(x) = 3$.

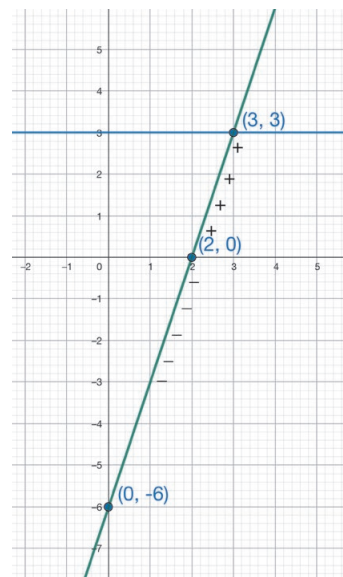
Rezolvare:

a) Intersecția cu Oy ($x = 0$): $f(0) = -6$. Punctul este $A(0, -6)$.

Intersecția cu Ox ($f(x) = 0$): $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$. Punctul este $B(2, 0)$.

b) Rezolvăm inecuațiile: $f(x) > 0 \Rightarrow 3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$ și $f(x) < 0 \Rightarrow 3x - 6 < 0 \Rightarrow x < 2$. **Concluzie:** $f(x) < 0$ pe intervalul $(-\infty, 2)$ (graficul este sub Ox) și $f(x) > 0$ pe intervalul $(2, \infty)$ (graficul este deasupra lui Ox).

c) Rezolvarea grafică a ecuației $f(x) = 3$ echivalează cu a identifica abscisa punctului de intersecție dintre G_f și dreapta orizontală $y = 3$; punctul de intersecție pe axa Ox are abscisa $x = 3$. **Probă (rezolvare algebrică):** $3x - 6 = 3 \Rightarrow x = 3$ este unica soluție a ecuației, iar punctul de intersecție este $(3, 3)$.



2. Nadia are spațiu de stocare de 100 GB liber pe laptop. Ea începe să descarce o aplicație nouă, care are o anumită mărime (în GB), cu viteza de descărcare constantă (20 GB/oră). Putem modela matematic spațiul liber rămas pe laptop, $f(x)$, în funcție de timpul de descărcare x (în ore): $f(x) = -20x + 100$.

Reprezentarea grafică: Legea $f(x) = -20x + 100$ corespunde unei funcții de gradul I ($a = -20, b = 100$), al cărei grafic este o dreaptă. Vom considera $x \geq 0$ (timpul nu e negativ) și $f(x) \geq 0$ (spațiul liber nu e negativ).



Pentru a trasa graficul, folosim punctele de intersecție cu axele de coordonate:

● pentru intersecția cu axa Oy ($x = 0$), $f(0) = -20(0) + 100 = 100$; punctul de intersecție este $A(0, 100)$. **Interpretare:** la momentul inițial ($x = 0$), Nadia avea 100 GB spațiu liber pe laptop; acesta este *ordonat la origine*.

● pentru intersecția cu axa Ox , rezolvăm ecuația $f(x) = 0 \Rightarrow -20x + 100 = 0 \Rightarrow x = 5$; punctul de intersecție este $B(5, 0)$. **Interpretare:** după 5 ore de descărcare, spațiul liber rămas devine 0 GB; acesta este momentul în care hard-diskul se umple complet.

Reprezentarea graficului se obține prin trasarea segmentului care unește punctele $A(0, 100)$ și $B(5, 0)$, considerând ca domeniu de definiție intervalul $[0, 5]$ (ore) și drept codomeniu intervalul $[0, 100]$ (spațiu de stocare, GB).

Semnul funcției: este determinat de soluția $x = 5$ a ecuației $f(x) = 0$ (punctul de intersecție cu Ox); deoarece $f(x) > 0 \Leftrightarrow -20x + 100 > 0 \Leftrightarrow x < 5$ și, ținând cont că $x \geq 0$, funcția este pozitivă pentru orice $x \in [0, 5)$; asemănător, se obține că funcția ar fi negativă pe intervalul $(5, \infty)$.

Putem întocmi următorul tabel:

x	0	...	5	...
$f(x)$	100	++++	0	---

Semnificație în contextul real

- $f(x) > 0$ pentru $x \in [0, 5)$: spațiul de stocare este disponibil (funcție pozitivă); descărcarea poate continua;
- $f(x) = 0$ pentru $x = 5$: spațiul de stocare epuizat;
- $f(x) < 0$ pentru $x > 5$: este nevoie de o suplimentare a spațiului de stocare (funcție negativă); instalarea aplicației nu se poate finaliza sau trebuie eliberat spațiu prin ștergerea altor fișiere.

Interpretarea geometrică și în context a soluției ecuației $f(x) = m$ (caz particular $m = 60$)

Pentru ecuația $f(x) = 60$ putem formula următoarea întrebare: După cât timp de la începerea procesului de descărcare a aplicației, spațiul liber rămas pe laptop va fi de 60 GB?

Rezolvare algebrică: $-20x + 100 = 60 \Rightarrow x = 2$ (ore)

Interpretare geometrică: soluția ecuației $f(x) = 60$ este abscisa punctului de intersecție dintre graficul funcției G_f și dreapta orizontală de forma $y = 60$; punctul de intersecție este $P(2, 60)$.

Interpretarea geometrică și în context a soluției ecuației $f(x) = g(x)$

a) *Definirea funcției g :* colega Nadiei, Bianca, descarcă simultan un fișier pe propriul laptop, având deja 20 GB ocupați; rata de descărcare este de 10 GB/oră. Funcția g descrie variația spațiului liber rămas pe laptopul Biancăi, presupunând un spațiu total de 100 GB. În condițiile date, legea este $g(x) = -10x + 80$.

Cele două colege doresc să stabilească momentul în care spațiul liber rămas pe cele două laptopuri este egal ($f(x) = g(x)$), folosind interpretarea geometrică.

b) *Rezolvarea ecuației $f(x) = g(x)$* (momentul x în care *spațiul de stocare disponibil devine egal* pe cele două laptopuri).

● *rezolvare algebrică:* $-20x + 100 = -10x + 80 \Rightarrow 100 - 80 = -10x + 20x \Rightarrow x = 2$;

● *interpretare geometrică:* soluția ecuației $f(x) = g(x)$ este *abscisa* punctului de intersecție dintre graficele celor două funcții, G_f și G_g ; ambele grafice sunt drepte; proiecția punctului de intersecție pe axa Ox corespunde lui $x = 2$. *Probă:* pentru $x = 2$: $f(2) = -20 \cdot 2 + 100 = 60$ GB; $g(2) = -10 \cdot 2 + 80 = 60$ GB; punctul de intersecție este $Q(2, 60)$.

c) *Concluzie:* după 2 ore de la începerea descărcării, amândouă elevele vor avea exact 60 GB spațiu de stocare liber rămas.



EXERCITII PROPUSE

A.

- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x + 8$. Determină intersecțiile cu axele Ox și Oy . Trasează graficele dreptelor $x = 3$ și $y = 3$ în același reper cartezian xOy , apoi determină coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu fiecare dintre cele două drepte.
- Determină semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5 - x$, folosind reprezentarea grafică a funcției.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7$. Determină intersecția dintre graficul funcției f și axa Ox .
- Reprezintă grafic funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x$. Asociază cel puțin două afirmații prin care să caracterizezi mulțimea punctelor care corespund graficului funcției. Compară-le cu cele ale colegilor tăi.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Determină ordonata punctului de pe grafic care are abscisa $x = 10$, apoi determină abscisa punctului de pe grafic care are ordonata $y = 10$. Diferă tipul de raționament în rezolvarea celor două cerințe? Explică diferențele.

B.

- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$. Stabilește intervalul pe care graficul funcției se află *deasupra* axei Ox .
- (Activitate în pereche)** Determinați numerele reale a și b știind că graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax - 12$ se intersectează cu axa Oy în același punct în care o intersectează și funcția $g(x) = 3x + b$. Ce tip de raționament a funcționat în acest caz: algebric sau geometric? Efectuați proba rezultatului obținut pe baza interpretării geometrice. Modelați situația-problemă și cu ajutorul unei aplicații digitale. Comparați rezolvarea voastră cu rezolvarea dată de un asistent digital IA.
- Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(-1, 5)$ să aparțină graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2ax + 7$.
- Determină punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 7$ și $g(x) = 2x + 8$. Interpretează geometric soluția ecuației $f(x) = g(x)$.

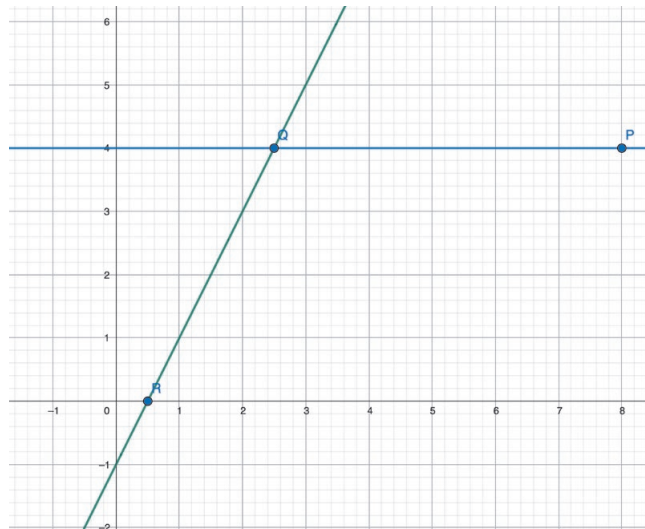


10. Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$. Determină intersecțiile acesteia cu axele de coordonate.

11. (**Activitate în pereche**) Rezolvați, unul algebric și celălalt prin interpretare geometrică, ecuația $f(x) = 2$, în cazul în care $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x$. Comparați rezultatele obținute.

12. Calculează aria triunghiului determinat de axele de coordonate și graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 4$.

13. În figura alăturată, observă dreapta RQ ca reprezentare grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și punctul $P(8, 4)$, unde punctele R și Q sunt astfel încât $R \in Ox$ și $PQ \parallel Ox$. Află lungimile segmentelor QP și RQ .



14. Un contor inteligent monitorizează consumul de electricitate al unui calculator. La începutul lunii, contorul înregistra 40 kWh (kilowatt-oră). Știind că, în medie, consumul zilnic al calculatorului este de 5 kWh, considerăm funcția f care redă indicația totală a contorului (în kWh) după x zile.

a) Determină expresia legii $f(x)$.

b) Stabilește după câte zile contorul va indica 180 kWh și interpretează geometric soluția obținută.

c) Determină imaginea funcției f pentru o lună întreagă (30 de zile).

15. Bateria telefonului unui elev este încărcată la 100%. În timp ce elevul stă conectat la un curs online, nivelul de încărcare a bateriei scade cu o rată constantă de 12% pe oră. Funcția f descrie procentajul de încărcare a bateriei după x ore de vizionare.

a) Descrie analitic funcția f (domeniu, codomeniu și lege).

b) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre graficul funcției și axa Ox . Ce semnificație are acesta?

c) Stabilește intervalul de timp (domeniul de definiție) pentru care funcția are sens în contextul real ($f(x) \geq 0$).

16. Mihai vrea să cumpere o pizza care costă 55 de lei. El deja are 10 lei puși deoparte și plănuiește să economisească câte 5 lei în fiecare zi lucrătoare.

a) Formulează funcția f care exprimă suma totală economisită de Mihai după x zile lucrătoare;

b) Rezolvă ecuația $f(x) = 55$. Interpretează această ecuație pentru a valida rezultatul algebric și precizează ce semnificație în context real este implicată.

c) Reprezintă grafic funcția pentru primele 10 zile lucrătoare ($x \in [0, 10]$).

17. (**Activitate în pereche**) Raisa și Matei compară două oferte de cartele preplătite pentru internet mobil. *Oferta lui Matei*: cost inițial de 50 de lei, la care se adaugă un cost de 2 lei pentru fiecare GB suplimentar consumat. *Oferta lui Raisa*: cost inițial de 30 de lei, la care se adaugă un cost de 4 lei pentru fiecare GB suplimentar consumat. Fie f și g funcțiile care exprimă costul total pentru Matei, respectiv Raisa, în funcție de numărul de GB suplimentari consumați (x).

a) Scrieți expresiile analitice ale legilor $f(x)$ și $g(x)$.

b) Rezolvați ecuația $f(x) = g(x)$. Interpretați geometric și explicați ce reprezintă soluția obținută, în contextul ofertelor.

c) Ce ofertă ați alege, ca fiind mai avantajoasă din punct de vedere al costurilor, în condițiile unui consum de peste 15 GB suplimentari?

C.

18. Există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) + f(2 - x) = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$?
19. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Știind că graficul lui f trece prin $A(2, 0)$ și este o dreaptă, determină expresia analitică a funcției f .
20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Determină valorile reale pentru coeficienții a și b , știind că punctul de intersecție dintre graficul funcției și axa Oy este $(0, -5)$, iar $f(2) = 1$.
21. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$ și $g(x) = 2$. Rezolvă ecuația $f(x) = g(x)$ și interpretează geometric soluțiile.
22. Determină numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = 0$, știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = ||x - 1| - 2| - 3$.
23. Determină toate funcțiile $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ care verifică $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, pentru care $f(1) = -4$.
24. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - m + 1$. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze axa Ox .
25. (**Activitate pe grupe**) Un dezvoltator de jocuri video modelează *dificultatea unui nivel de joc* printr-o funcție f pentru care argumentul reprezintă timpul petrecut de jucător în acel nivel (x , în minute). Dificultatea este măsurată pe o scară de la 0 la 100. Funcția este definită pe ramuri:
- $$f(x) = \begin{cases} 10x + 10, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 5 \text{ (faza de învățare)} \\ -5x + 85, & \text{dacă } x > 5 \text{ (faza de oboseală)} \end{cases}$$
- a) Determinați intersecția graficului funcției f cu axa Oy . Ce semnificație putem asocia lui $f(5)$?
- b) Determinați intersecția cu Ox , apoi stabiliți semnul funcției în *faza de oboseală* ($x > 5$). Ce înseamnă, din punct de vedere al jocului, când $f(x) < 0$?
- c) Dacă nivelul este considerat *perfect calibrat* când dificultatea este fixată la $m = 40$, rezolvați ecuația $f(x) = 40$, acordând atenție faptului că veți obține două soluții. Interpretați geometric cele două soluții ca intersecții cu dreapta $y = 40$. Ce reprezintă cele două momente din joc?
- d) Determinați valoarea maximă a funcției (*dificultatea maximă*) și minutul în care este atinsă.



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII (PORTOFOLIU DE GÂNDIRE CRITICĂ)

Uneori cea mai importantă parte a matematicii nu este răspunsul, ci întrebarea pe care alegem să o punem. Vei dezvolta acest portofoliu prin cerințe asociate la finalul unora dintre lecțiile din manual.

Prima provocare: O funcție poate minți?

Un dezvoltator de jocuri afirmă: „Graficul funcției mele este perfect. Funcția este definită corect și toate calculele sunt exacte. Prin urmare, modelul descrie perfect experiența oricărui jucător.” Ai încredere în această concluzie?

Reflectează și răspunde:

- Este posibil ca o funcție să fie matematic corectă, dar să descrie slab realitatea?
- Pot exista doi jucători care au aceeași valoare a funcției, dar experiențe complet diferite?
- Care este diferența dintre:
 - un model corect;
 - un model util?

Compară răspunsurile tale cu cele ale colegilor tăi.

Susține-ți punctul de vedere cu argumente!

Ideea mare: Un model poate fi matematic corect și totuși insuficient pentru a descrie realitatea.



Proprietăți fundamentale ale funcțiilor numerice.

Lecturi grafice

1. Monotonia funcțiilor

Monotonia descrie modul în care se schimbă valoarea funcției f pe axa Oy în timp ce argumentul x crește pe axa Ox .

DEFINIȚII ȘI PROPRIETĂȚI

Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $D \subseteq \mathbb{R}$ este un interval.

Proprietate	Definiție formală	Interpretare grafică
f strict crescătoare (crescătoare)	$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$)	Graficul <i>urcă</i> pe măsură ce-l parcurgem de la stânga la dreapta.
f strict descrescătoare (descrescătoare)	$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)	Graficul <i>coboară</i> pe măsură ce-l parcurgem de la stânga la dreapta.
f constantă	$\forall x_1, x_2 \in D \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$	Graficul este poziționat pe o <i>dreaptă orizontală</i> (segment, semidreaptă sau întreaga dreaptă).

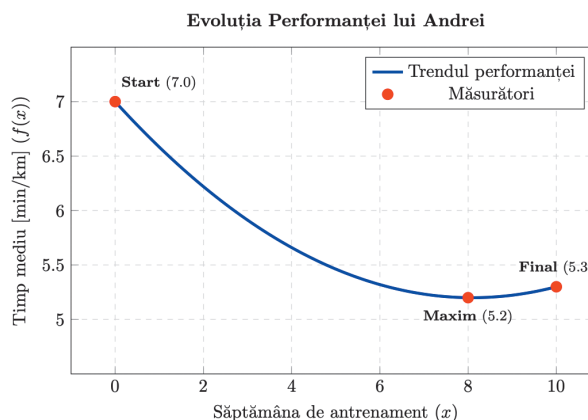
În cazul în care funcția este **strict crescătoare (crescătoare)** pe domeniul D sau **strict descrescătoare (descrescătoare)** pe domeniul D , vom spune că f este **strict monotonă (monotonă)**; în caz contrar, vom spune că f este **nemonotonă**.

Observație: Pentru studiul monotoniei se poate folosi și **raportul de variație** R_f ; pentru $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, $R_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Dacă $R_f(x_1, x_2) > 0$, funcția f este strict crescătoare, iar dacă $R_f(x_1, x_2) < 0$, funcția f este strict descrescătoare.

EXEMPLU

Andrei își monitorizează zilnic performanța la antrenamentele sportive. Graficul prezintă timpul mediu necesar ($f(x)$, în minute pe kilometru, pe axa Oy) pentru a parcurge un kilometru, în funcție de numărul de săptămâni de antrenament (x , pe axa Ox).

Datele colectate în procesul de monitorizare evidențiază următorul comportament al funcției $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$:



Săptămâna (x)	Timpul/km ($f(x)$)	Observație
0 (inițial)	7,0 min/km	Timpul inițial.
8 (performanță maximă)	5,2 min/km	Cel mai bun timp atins.
10 (final)	5,3 min/km	Timpul crește ușor la final.

A. Descrierea graficului (lectură grafică)

Pe grafic, curba *coboară* de la $x = 0$ la $x = 8$, apoi *urcă* ușor de la $x = 8$ la $x = 10$. Pe măsură ce numărul de săptămâni x crește (de la 0 la 8), valoarea funcției $f(x)$ (timpul/km) scade (de la 7,0 la 5,2). Funcția este strict descrescătoare pe $[0, 8]$. Pe măsură ce numărul de săptămâni x crește (de la 8 la 10), valoarea funcției f (timpul/km) crește (de la 5,2 la 5,3). Funcția este strict crescătoare pe $[8, 10]$.

Reținem! Într-un astfel de caz, intervalele obținute se numesc **intervale de monotonie**. Pe domeniul $[0, 10]$ **funcția își schimbă monotonia**, deci este *nemonotonă*, dar spunem că **funcția este monotonă pe intervale**.

B. Interpretare

● Timpul/km scade pe măsură ce antrenamentul avansează, deci *ritmul de alergare se îmbunătățește*, ajungând la performanța maximă (optimă). Atenție, performanța este maximă în condițiile în care timpul/km este minim! Performanța se îmbunătățește pe întreaga perioadă în care funcția este strict descrescătoare.

● Timpul/km crește ușor spre final, ceea ce *poate indica oboseală sau o strategie greșită de antrenament în ultimele săptămâni*. Performanța scade corespunzător perioadei în care funcția este crescătoare.

C. Identificarea punctului de extrem (minim)

Punctul de minim al funcției (cel mai bun timp/km) este atins acolo unde funcția își schimbă monotonia, trecând de la descrescătoare la crescătoare.

Minimul funcției: valoarea minimă (cea mai mică valoare) a funcției este $f(8) = 5,2$ min/km. **Interpretare:** Andrei a atins eficiența maximă de alergare (timpul cel mai scurt pe kilometru, 5,2) în săptămâna a 8-a: pentru $x = 8$, $f(8) = 5,2$ și $f(x) \geq 5,2$, pentru orice $x \in [0, 8]$.



PROBLEME REZOLVATE

1. a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq a \\ f_2(x), & x > a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$.

Demonstrează că dacă f_1, f_2 sunt crescătoare și $f_1(a) \leq f_2(a)$ pentru orice $x > a$, atunci f este crescătoare.

- b) Justifică faptul că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ x + 2, & x > -1 \end{cases}$ este strict crescătoare.

Rezolvare:

- a) Fie $x_1 \leq x_2$. Arătăm că $f(x_1) \leq f(x_2)$. Într-adevăr:

- dacă $x_1, x_2 \leq a \Rightarrow f_1(x_1) \leq f_1(x_2)$, deoarece f_1 este crescătoare;
- dacă $x_1, x_2 > a \Rightarrow f_2(x_1) \leq f_2(x_2)$, deoarece f_2 este crescătoare;
- dacă $x_1 \leq a$ și $x_2 > a \Rightarrow f_1(x_1) \leq f_1(a) \leq f_2(x_2)$.

b) Aplicăm același raționament ca la punctul anterior și, în același timp, putem studia și graficul funcției reprezentat în imaginea alăturată.

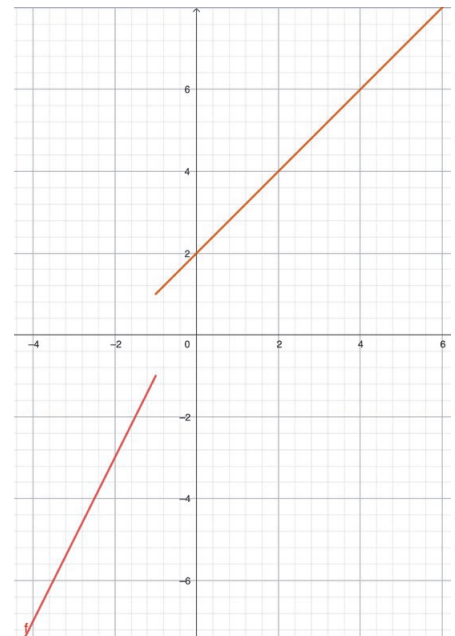
2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- a) Justifică faptul că f este descrescătoare.

- b) Rezolvă inegalitatea: $-x + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq -\frac{7}{2}$.

Rezolvare:

- a) Calculăm raportul de variație R_f pentru oricare $x_1, x_2 \in (0, \infty), x_1 \neq x_2$:



$$R_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}} + x_2 - \frac{1}{\sqrt{x_2}}}{x_1 - x_2} = -1 + \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{(x_1 - x_2)\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} = -1 - \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} =$$

$$= -1 - \frac{1}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} < 0, \text{ deci } f \text{ este strict descrescătoare.}$$

b) Observăm că inecuația se mai scrie $f(x) \leq f(4)$. Cum f este descrescătoare, deducem $x \geq 4$, de unde mulțimea soluțiilor inecuației este $[4, +\infty)$.

3. a) Se consideră $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție numerică strict monotonă. Verifică dacă ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție în D .

b) Verifică faptul că ecuația $2x^3 + x - 3 = 0$ are soluția unică $x = 1$.

Rezolvare:

a) Presupunem prin absurd că ecuația $f(x) = 0$ are două soluții distincte $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$. Dacă f este strict crescătoare, atunci $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce contrazice $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Dacă f este strict descrescătoare, atunci $f(x_1) > f(x_2)$, contradicție. Cum presupunerea s-a dovedit a fi falsă, rezultă că ecuația are cel mult o soluție.

Reflecție: Ce ar trebui să mai cunoști despre comportamentul funcției f pentru a stabili dacă ecuația admite o unică soluție sau nu admite nicio soluție? Ca sprijin, modelează grafic situația în fiecare dintre cazuri.

b) Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + x - 3$. Deoarece

$$R_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1^3 + x_1 - 3 - 2x_2^3 - x_2 + 3}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 1)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 1 > 0,$$

pentru orice numere reale distincte x_1, x_2 , rezultă f strict crescătoare. Conform punctului a), ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție.

Observăm că $f(1) = 0$, deci $x = 1$ este soluția unică a ecuației.

Observație: Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$, respectiv $(0, \infty)$ (demonstrează!), dar nu este monotonă: $-1 = f(-1) > f(-\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{2})$ (nu este monotonă pe $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$).

2. Mărginirea funcțiilor

Mărginirea se referă la limitarea mulțimii valorilor funcției (imaginea $\text{Im}f$).



DEFINIȚII ȘI PROPRIETĂȚI

Se consideră funcția numerică $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Proprietate	Definiție analitică	Interpretare grafică
f mărginită superior	$\exists M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall x \in D, f(x) \leq M$	Graficul este complet <i>sub</i> dreapta orizontală $y = M$ sau cu anumite puncte pe această dreaptă.
f mărginită inferior	$\exists m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall x \in D, f(x) \geq m$	Graficul este complet <i>deasupra</i> unei drepte orizontale $y = m$ sau cu anumite puncte pe această dreaptă.
f mărginită	Este mărginită superior și inferior.	Graficul este cuprins într-o bandă orizontală (delimitată de două drepte paralele).

O funcție care nu este mărginită inferior sau nu este mărginită superior se numește **funcție nemărginită**.



EXEMPLU REZOLVAT

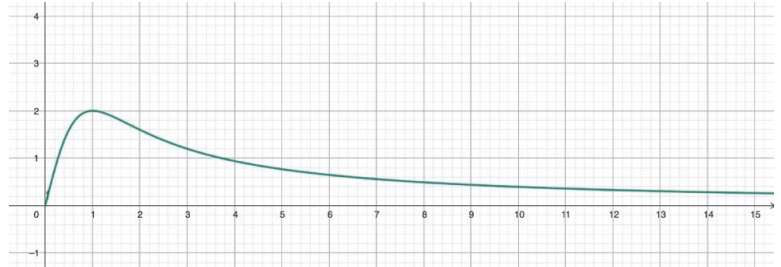
Un medicament este administrat unui pacient. Concentrația sa în sânge ($f(x)$, în mg/L) variază în funcție de timpul x (în ore). Știm că $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ (pentru $x \geq 0$). Stabilește dacă funcția este mărginită pe domeniul $D = [0, \infty)$ și determină cea mai mare valoare (*maximul*) și cea mai mică valoare (*minimul*) ale funcției.

Rezolvare (pe baza lecturii grafice din imaginea alăturată, pe care o poți genera cu o aplicație digitală:

Mărginire inferioară: graficul nu coboară sub axa Ox . Valoarea minimă este $f(0) = 0$. Deci $m = 0$ (minimul funcției)

Mărginire superioară: graficul atinge cel mai înalt punct la $M = 2$ (pentru $x = 1$).

Concluzie: funcția este mărginită, deoarece $0 \leq f(x) \leq 2$.



REFLECȚIE

● Prin lectură grafică, valorile de minim și de maxim au putut fi observate ușor. Ce ar presupune probarea rezultatului obținut printr-o abordare algebrică?

● Este adevărată afirmația următoare: „Orice funcție mărginită admite maxim și minim.”? Justifică individual, apoi poți proba corectitudinea raționamentului tău cerând unei aplicații IA să formuleze un răspuns automat sau să furnizeze un contraexemplu (în cazul afirmației false).

Folosind o aplicație digitală, trasează graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Este funcția mărginită?

3. Paritatea și imparitatea funcțiilor (simetria graficului)

Aceste proprietăți descriu **simetria graficului** funcției, dar impun o condiție esențială asupra domeniului.



DEFINIȚII ȘI PROPRIETĂȚI

Se consideră funcția numerică $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Condiție esențială:

Domeniul de definiție $D \subset \mathbb{R}$ trebuie să fie *simetric față de origine* (pentru $\forall x \in D, -x \in D$).

Proprietate	Condiție analitică	Interpretare grafică
f funcție pară	$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$	Graficul este <i>simetric față de axa Oy</i> .
f funcție impară	$\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$	Graficul este <i>simetric față de originea O</i> .

Reflecție: Cum intervine *condiția esențială* asupra domeniului de definiție pentru susținerea proprietăților de paritate/imparitate?



EXEMPLU REZOLVAT

Un elev analizează variația unui voltaj într-un circuit electric ($f(x)$) în jurul unui moment de referință ($x = 0$).

● **Exemplul 1** (voltaj stabil): $f(x) = x^2 + 4$; domeniu: $[-5, 5]$.

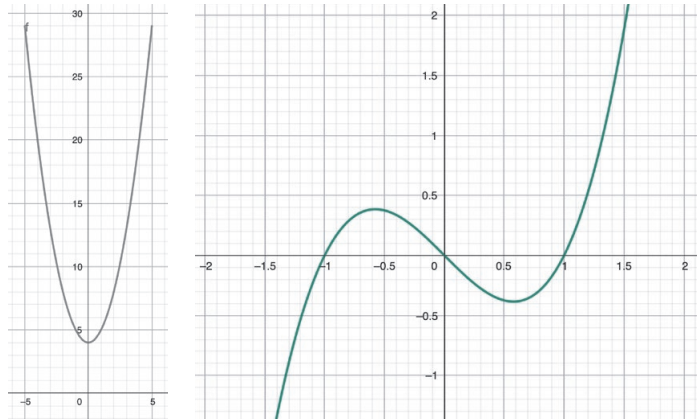
● **Exemplul 2** (voltaj oscilant): $g(x) = x^3 - x$; domeniu: $\mathbb{R}$.

Interpretare analitică: Funcția $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ are domeniul $[-5, 5]$, mulțime simetrică, $f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x), \forall x \in [-5, 5]$.

Concluzie: f este pară. Graficul este simetric

față de axa Oy . Voltajul are aceeași valoare înainte și după momentul $x = 0$, la distanțe egale, deci este caracterizat de stabilitate.

Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are domeniul $\mathbb{R}$, mulțime simetrică, $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. **Concluzie:** $g(x)$ este impară. Graficul este simetric față de origine. Voltajul la x secunde este opusul voltajului la $-x$ secunde.



Exemple de funcții care nu sunt nici pare nici impare: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$; $g: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

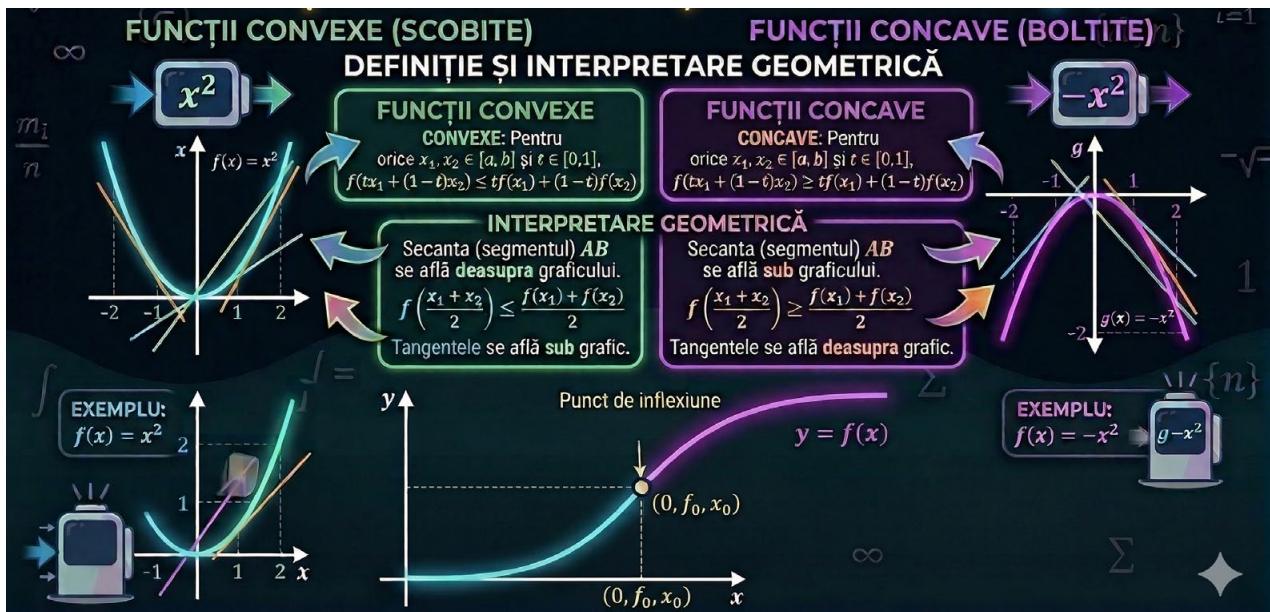
4. Convexitatea și concavitățile funcțiilor

Se consideră funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care I este un interval de numere reale.

DEFINIȚII

● Spunem că funcția f este **convexă** pe intervalul I dacă, pentru orice două puncte A și B de pe graficul funcției, porțiunea de grafic cuprinsă între A și B se situează sub segmentul AB sau pe segmentul AB . Vizual, graficul are formă de „vale” sau forma $\cup$.

● Spunem că funcția f este **concavă** pe intervalul I dacă, pentru orice două puncte A și B de pe grafic, porțiunea de grafic cuprinsă între A și B se situează deasupra segmentului AB sau pe segmentul AB . Vizual, graficul are formă de „munte” sau „boltă” sau forma $\cap$.



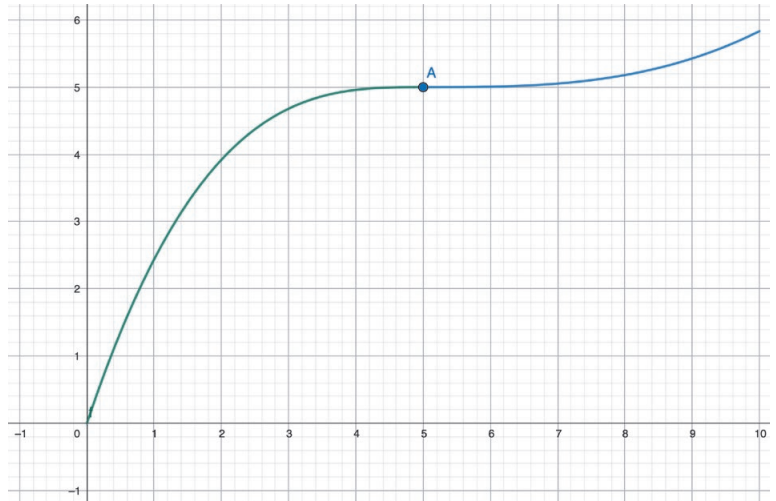


EXEMPLU REZOLVAT

Context real: Graficul reprezentat alături arată numărul de cuvinte noi învățate pe zi ($f(x)$) de o elevă, în funcție de timpul x (în zile) de la începerea unui program intensiv de studiu.

Lectura grafică: Graficul crește, inițial este concav, apoi convex; există un *punct de inflexiune* ce corespunde lui $x = 5$ (punct în care funcția își schimbă curbura).

Interpretare: Pe intervalul $[0, 5]$ f este concavă (inițial, rata de învățare este rapidă, graficul este curbat în jos – *învățare accelerată*); pe intervalul $[5, 10]$ f este convexă (rata de învățare încetinește, posibil din cauza oboselii sau a creșterii în complexitate a cuvintelor; graficul se curbează în sus – *saturația învățării*); la $x = 5$, f schimbă curbura (acesta este momentul critic în care rata de creștere a eficienței începe să scadă).



SITUAȚIE REALĂ ȘI MODELARE ANALITICĂ - PROBLEMA MONITORIZĂRII FLUXULUI DE TRAFIC

Într-un oraș, un sistem inteligent de senzori monitorizează densitatea traficului pe un bulevard principal în timpul orelor de vârf. Inginerii au stabilit un model matematic pentru *indicele de congestie* ($f(t)$), unde t reprezintă timpul măsurat în ore față de momentul de vârf absolut (ora 17:00, considerată $t = 0$).

Funcția este definită pe intervalul $D = [-3, 3]$ (adică intervalul orar 14:00-20:00) astfel:

$$f(t) = \begin{cases} 10t + 70, & \text{dacă } t \in [-3, -2] \text{ (ramura 1)} \\ -5t^2 + 70, & \text{dacă } t \in (-2, 2) \text{ (ramura 2)} \\ -10t + 70, & \text{dacă } t \in [2, 3] \text{ (ramura 3)} \end{cases}$$

Observație: $f(t)$ este măsurat în procente (0% = drum liber, 100% = blocaj total).

1. Analiza simetriei: Demonstrează că funcția f este *pară*. Ce semnificație are această proprietate pentru fluxul de trafic din oraș în intervalul orar dat?

2. Analiza monotoniei: Stabilește intervalele de monotonie ale funcției pe domeniul D . Interpretează comportamentul traficului în intervalul $(-2, 2)$ comparativ cu celelalte intervale.

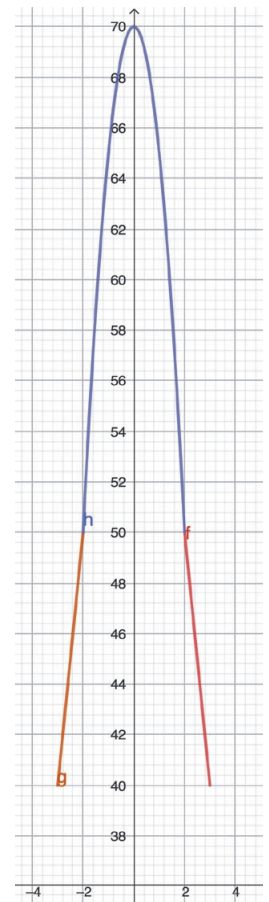
3. Marginare: Determină imaginea funcției Imf . Dacă autoritățile declară „alertă de trafic” atunci când indicele depășește 60% (risc de congestie), există vreun moment în care traficul este sub nivelul de alertă în acest interval de 6 ore?

4. Lectură grafică: Descrie forma graficului pe intervalul $(-2, 2)$ comparativ cu celelalte două intervale. Unde este reprezentarea graficului concavă și ce sugerează acest comportament despre viteza de creștere a aglomerației, pe măsură ce ne apropiem de ora de vârf ($t = 0$)?

Rezolvare:

1. Domeniul $D = [-3, 3]$ este simetric față de origine. Trebuie să verificăm dacă $f(-t) = f(t), \forall t \in D$.

Dacă $t \in (-2, 2)$, atunci $-t \in (-2, 2)$ și $f(-t) = -5(-t)^2 + 70 = -5t^2 + 70 = f(t)$. Dacă $t \in [2, 3]$, atunci $-t \in [-3, -2]$, iar pentru ramura 1 obținem $f(-t) = 10(-t) + 70 = -10t + 70$, care este expresia funcției pentru $t \in [2, 3]$, corespunzător ramurii 3. Funcția este *pară*.



Interpretare: Faptul că funcția este pară înseamnă că traficul evoluează simetric față de ora de vârf (ora 17:00, $t = 0$). Modul în care se aglomerează orașul cu 2 ore înainte de vârf este identic cu modul în care se eliberează la 2 ore după vârf.

2. Analizăm funcția pe fiecare ramură:

- pe $[-3, -2]$, funcția are legea $10t + 70$; $a = 10 > 0$, deci funcția este *strict crescătoare*; traficul crește constant;

- pe $(-2, 0]$, funcția are legea $-5t^2 + 70$; aceasta corespunde unei porțiuni de parabolă cu vârful în $(0, 70)$ și ramurile în jos; pe partea stângă a vârfului funcția este *strict crescătoare*; traficul continuă să se aglomereze;

- pe $[0, 2)$, funcția reprezintă partea dreaptă față de vârful parabolei și este *strict descrescătoare*; traficul se descongesează în același ritm în care s-a aglomerat;

- pe $[2, 3]$, funcția are legea $-10t + 7$; $a = -10 < 0$, funcția este *strict descrescătoare*; traficul descrește constant.

Concluzie: Traficul crește continuu de la ora 14:00 ($t = -3$) până la ora 17:00 ($t = 0$), apoi scade continuu până la ora 20:00 ($t = 3$); schimbarea variației (din liniară în parabolică) la $t = -2$ sugerează că, pe măsură ce se apropie ora de vârf, creșterea nu mai este liniară, ci încetinește ușor înainte de a atinge maximum.

3. Deoarece funcția crește până la $t = 0$ și apoi scade, *maximum* este $f(0) = -5 \cdot 0^2 + 70 = 70$. Valorile minime se ating la capetele domeniului D (datorită simetriei): $f(3) = -10 \cdot 3 + 70 = 40$; $f(-3) = 10 \cdot (-3) + 70 = 40$. Observând prin lectură grafică și parcurgerea continuă a graficului funcției, obținem $Imf = [40, 70]$. În acest context, deoarece valoarea minimă este 40%, care este strict mai mică decât pragul de 60%, există momente în care traficul este sub nivelul de alertă (la începutul și la sfârșitul intervalului). **Verificare suplimentară** (când nivelul este sub 60%?): pentru ramura din dreapta, $t \in [0, 2)$, $-5t^2 + 70 < 60 \Rightarrow t^2 > 2$, deci valorile sub alertă corespund intervalului $[\sqrt{2}, 2)$; folosind și aproximarea valorii $\sqrt{2} \approx 1,5$ (pentru interpretare simplificată), rezultă că traficul este sub nivelul de alertă în intervalul $[1,5, 3)$, corespunzător intervalului de timp 18:30-20:00; ținând cont de paritatea funcției, deci de simetria graficului față de $t = 0$ (ora 17:00), rezultă că și în intervalul orar 14:00-15:30 traficul este sub nivelul de alertă.

4. Prin lectură grafică, cum ramurile 1 și 3, corespunzătoare intervalelor $[-3, -2]$ și $[2, 3]$, sunt reprezentate prin legi de gradul I, graficele sunt segmente de dreaptă. Ramura 2, corespunzătoare intervalului $(-2, 2)$, este reprezentată de legea de gradul al doilea $-5t^2 + 70$ cu coeficientul lui t^2 negativ ($a = -5$), graficul fiind o bucată simetrică de parabolă cu ramurile în jos, concavă.

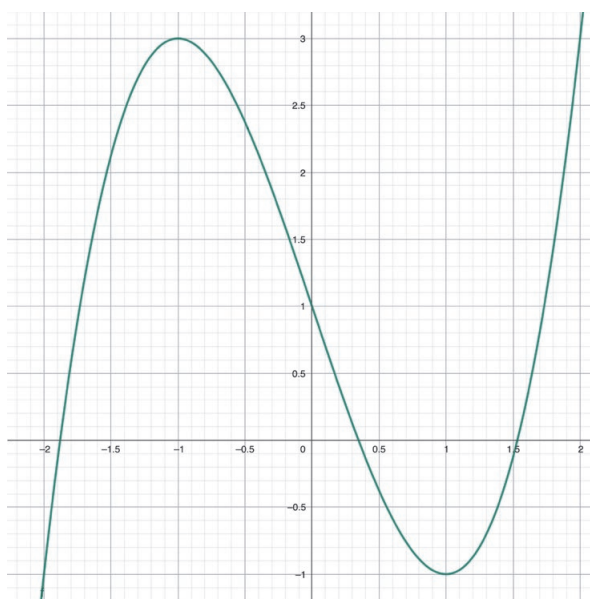
Interpretare: Faptul că în zona centrală a graficului funcția este concavă (în formă de $\cap$), spre deosebire de liniile drepte de la margini, sugerează o *saturație*. Deși traficul continuă să crească până la ora 17:00 ($t = 0$), creșterea este din ce în ce mai redusă pe măsură ce se apropie de vârf (panta tangentei la curbă scade), aplatizându-se la valoarea maximă, apoi inversând monotonia.

Observații:

1. Funcțiile utilizate în exemplele rezolvate anterior vor fi studiate detaliat în lecțiile următoare; rolul lor a fost de a susține introducerea unor proprietăți ale funcțiilor numerice în contexte aplicative, nu doar teoretice.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ este funcție atât convexă, cât și concavă.

3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 1$ nu este nici convexă, nici concavă, dar este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, \infty)$ (vezi figura alăturată).





EXERCITII PROPUSE

Următoarele exerciții sunt concepute pentru a-ți testa abilitatea de a aplica proprietățile prin *lectura unui grafic* dat sau a unui realizat cu instrumente digitale de tine sau în colaborare cu colegii.

A.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 5$. Pe ce intervale este funcția descrescătoare?
2. Se consideră funcția $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$. Determină minimul și maximul funcției.
3. Verifică paritatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 1$.
4. Este graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ simetric față de axa Oy ? Dar față de origine? Există funcții numerice care să fie în același timp și simetrice față de Oy și față de origine? Justifică.
5. Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x$. Este această funcție convexă?
6. Un automobil coboară o pantă cu viteză constantă. Dacă $f(x)$ este distanța parcursă în timpul x , este funcția f crescătoare sau descrescătoare?
7. Dacă G_f este simetric față de Oy și $f(2) = 5$, precizează valoarea lui $f(-2)$.
8. Elena își monitorizează bugetul reprezentat de suma inițială de 1 000 de lei în contul de economii și decide ca la un moment dat să își anuleze un abonament la o platformă de *streaming* care costă 35 de lei pe lună. Funcția f descrie suma rămasă în contul de economii (în lei) după x luni de utilizare a abonamentului (presupunând că suma din cont nu este folosită în alt scop): $f(x) = -35x + 1000$. Stabilește ce tip de monotonie (crescătoare sau descrescătoare) are funcția f pe domeniul de definiție $D = [0, \infty)$. Interpretează rezultatul în contextul dat și determină după câte luni de utilizare trebuie să facă anularea abonamentului, pentru ca în cont să-i rămână cel puțin jumătate din suma inițială?

B.

9. Stabilește intervalele de monotonie pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 8$.
10. Analizează paritatea funcției $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x$.
11. a) Demonstrează că $-x^2 + 4 \leq -2x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Determină imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4$ și stabilește dacă este mărginită inferior sau superior.
12. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție impară și $f(3) = 1$, calculează $f(-3) + f(3)$.
13. Traectoria unei bile aruncate este descrisă de legea $f(x) = -x^2 + 4x$. Determină distanța orizontală x la care bila atinge înălțimea maximă (punctul de extrem).
14. Dă exemplu de interval I pe care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1$ este strict descrescătoare. Prin lectură grafică, stabilește dacă exemplul dat corespunde celui mai „mare” interval J pe care funcția rămâne strict crescătoare (orice exemplu de interval I verifică faptul că $I \subseteq J$).
15. (**Activitate în pereche**) Un operator de telefonie mobilă folosește o schemă de tarifare pe bază de consum suplimentar de internet (după epuizarea pachetului inclus). Costul total suplimentar $f(x)$ (în lei) este în corespondență cu numărul de GB suplimentari consumați (x). Pentru primii 5 GB suplimentari, costul este de 3 lei/GB. Pentru orice consum peste 5 GB suplimentari, costul scade la 2 lei/GB (pentru a încuraja consumul mare). Funcția costului suplimentar este descrisă analitic de legea
$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 5 \\ 2x + 5, & \text{dacă } x > 5 \end{cases}, \text{ în cazul consumului mare (de peste 5 GB) aplicându-se și un tarif fix de 5 lei.}$$
 Studiați monotonia funcției f pe cele două intervale distincte, $I_1 = [0, 5]$ și $I_2 = (5, \infty)$, precum și pe tot domeniul de definiție. De ce, din punct de vedere matematic, ambele ramuri sunt funcții crescătoare, chiar dacă tariful pe GB scade? Interpretați rezultatul.



C.

16. Se consideră o funcție numerică descrisă analitic de legea $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$. Stabilește dacă funcția este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Justifică.

17. (Activitate pe grupe) Studiați dacă funcția descrisă analitic de legea $f(x) = x^2 - 2$ este mărginită pe intervalul $D = [-1, 1]$. În caz afirmativ, folosind eventual și lectura grafică, determinați extremele (minime, maxime) funcției corespunzătoare intervalului dat.

Realizați același studiu în cazul unor intervale $D = [a, b]$ pentru care $|a| \neq |b|$ (module diferite), atât în cazul $0 \in D$, cât și în cazul $0 \notin D$. Ce aspecte diferă de la caz la caz?

Realizați același studiu și pentru intervalul $D = (-1, 1)$. Reflectați asupra asemănărilor și diferențelor de comportament între cazurile studiate.

Pentru toate cazurile studiate legea rămâne cea precizată inițial.

18. Determină numărul real a astfel încât funcția $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax^2 + 5x$ să fie impară.

19. Reprezintă (eventual digital) graficul funcției descrise de legea $f(x) = 5 - |x|$ și definite pe intervalul $[-5, 5]$. Stabilește intervalele de monotonie și maximum funcției.

20. Un pendul oscilează, iar funcția f dă poziția sa. Dacă f este impară și este crescătoare pe $[0, 5]$, ce se poate spune despre monotonia ei pe $[-5, 0]$?

21. Un grup de elevi, pasionați de botanică, folosesc un sistem automat pentru a menține temperatura optimă într-o mini-seră. Sistemul reglează temperatura $f(x)$ ($^{\circ}\text{C}$) în funcție de luminozitatea x (măsurată în unități de la 0 la 10). Pentru luminozitate scăzută temperatura scade, iar pentru luminozitate ridicată temperatura crește, dar sistemul are un punct critic de reglare la $x = 4$, descrierea analitică

$$\text{fiind } f(x) = \begin{cases} -3x + 20, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 4 \\ 5x - 12, & \text{dacă } 4 < x \leq 10 \end{cases}$$

a) Stabilește monotonia funcției f pe fiecare dintre ramurile corespunzătoare intervalelor $I_1 = [0, 4]$ și $I_2 = (4, 10]$.

b) Este funcția crescătoare, descrescătoare sau are punct de extrem? Justifică!

22. Cere unui asistent IA să răspundă argumentat la următoarea întrebare: „Există funcții numerice care sunt și convexe și concave?”. Folosind cele prezentate în această lecție pentru introducerea noțiunilor de convexitate/concavitate, validează sau invalidează răspunsul furnizat de IA, apoi verifică și la nivelul clasei.



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII (PORTOFOLIU DE GÂNDIRE CRITICĂ)

A doua provocare: Dacă totul crește, înseamnă că este bine?

O companie raportează: • profitul crește; • numărul clienților crește; • veniturile cresc.

Directorul concluzionează: „Compania merge din ce în ce mai bine.” Un analist răspunde:

„Nu sunt convins.” Cine are dreptate?

Reflectează și răspunde:

1. O funcție crescătoare descrie întotdeauna o situație favorabilă?
2. O funcție descrescătoare descrie întotdeauna o situație nefavorabilă?
3. Ce indicatori ai prefera să fie descrescători?
4. Ce indicatori ai prefera să fie crescători?

Exemplu: • număr de accidente; • poluare; • timp de așteptare; • datorii.

Compară răspunsurile tale cu cele ale colegilor tăi. Susține-ți punctul de vedere cu argumente!

Ideea mare: Proprietățile unei funcții descriu comportamente. Interpretarea lor depinde de context.



Operații cu funcții numerice



REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

Plecând de la operațiile cu numere reale, în anumite condiții, putem defini și operații cu funcții numerice.

• Funcția sumă

DEFINIȚIE

Fiind date două funcții numerice $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, funcția $(f + g): D \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D$ se numește **suma funcțiilor** f și g .

Exemplu: Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2, g(x) = x^2 - 3x - 2$. Funcția sumă este $f + g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2$.

• Funcția produs

DEFINIȚIE

Fiind date două funcții numerice $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, funcția $(f \cdot g): D \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in D$ se numește **produsul funcțiilor** f și g .

Exemplu: Fie $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, g(x) = x^2 - 2$. Funcția produs este $f \cdot g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 - 2x$.

OBSERVAȚIE

În cazul în care $a \in \mathbb{R}$ și $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, funcția $af: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, (af)(x) = a \cdot f(x), \forall x \in D$, reprezintă produsul dintre o funcție constantă (a) și funcția f .

• Funcția cât

DEFINIȚIE

Fiind date două funcții numerice $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ și D_1 submulțimea lui D pe care g nu se anulează, atunci funcția $\frac{f}{g}: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D_1$ se numește **câtul funcțiilor** f și g .

Exemplu: Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3, g(x) = x^2 - 4$. Funcția cât este $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 3}{x^2 - 4}$.

OBSERVAȚIE

Dacă f și g nu au același domeniu de definiție, dar cele două domenii de definiție nu sunt disjuncte, putem în continuare să definim funcțiile sumă, produs și cât pe intersecția domeniilor.

• Compunerea funcțiilor

Operațiile cu funcții numerice sunt bazate pe operațiile cu numere reale. În cele ce urmează vei învăța că, în anumite condiții, se poate defini o nouă operație (poate ceva mai importantă) cu funcții.



REFLECTĂM

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{3x+1}{2}\right)^2$. Cum procedăm practic pentru a calcula $f(1)$?



Atribuim valoarea 1 variabilei x și calculăm mai întâi $\frac{3 \cdot 1 + 1}{2} = 2$ (valoarea parantezei), apoi ridicăm rezultatul la pătrat. De fapt, am calculat $f_1(1)$, unde $f_1(x) = \frac{3x+1}{2}$, apoi $f(1) = f_2(f_1(1))$, unde $f_2(x) = x^2$.

Găsirea valorilor unei funcții printr-o astfel de succesiune de calcule o vom numi *compunere de funcții*.



DEFINIȚIE

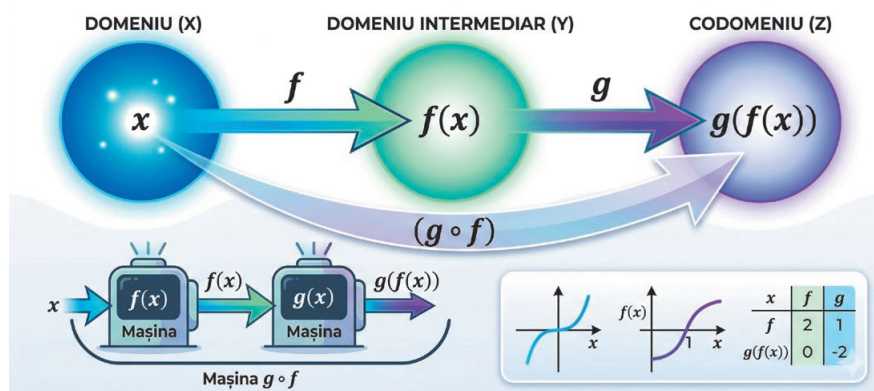
Fie A, B și C trei mulțimi nevide și funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$. Funcția $h: A \rightarrow C$, dată de $h(x) = g(f(x)), \forall x \in A$ se numește **compusa** lui g cu f .



- Compusa lui g cu f se notează $g \circ f$; vom scrie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Operația „ $\circ$ ” prin care din funcțiile f și g obținem o nouă funcție se numește *compunerea funcțiilor*. Compunerea funcțiilor poate fi descrisă cu ajutorul unor diagrame.

COMPUNEREA FUNCȚIILOR: $(g \circ f)$

$g \circ f$ SE CITEȘTE „ g COMPUS CU f ”



Asociativitatea compunerii funcțiilor

Fie A, B, C și D patru mulțimi și funcțiile $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$. Atunci, funcțiile $(h \circ g) \circ f: A \rightarrow D$ și $h \circ (g \circ f): A \rightarrow D$ sunt egale.

Demonstrație:

Funcțiile au domeniile egale, la fel și codomeniile. Rămâne să verificăm că $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x), \forall x \in A$. Într-adevăr, pentru un element x oarecare din A , $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$, iar $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, ceea ce trebuia demonstrat.

Datorită proprietății anterioare, compunerea a trei sau mai multor funcții se va nota fără paranteze, adică $h \circ g \circ f: A \rightarrow D, (h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$.

Exemplu: Fie $f: (0, 1) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{1}{x}$; $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2$. Atunci, $h \circ g \circ f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, (h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = \left(2 \cdot \frac{1}{x} + 1\right)^2$.

REFLECTĂM

● Este adevărată afirmația: „Dacă se pot face (au sens) compunerile $g \circ f$ și $f \circ g$, atunci $g \circ f = f \circ g$ ”?

Pentru $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow A$ putem calcula și compusa lui g cu f și compusa lui f cu g . Observăm că $g \circ f: A \rightarrow A$, iar $f \circ g: B \rightarrow B$, așadar afirmația nu este adevărată.

● Pentru $A = B$, funcțiile compuse $g \circ f$ și $f \circ g$ sunt definite pe A cu valori în A . Însă nici în acest caz nu este adevărată afirmația, după cum arată următorul exemplu:

Exemplu: Pentru $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g(x) = 2x + 1$, funcțiile $g \circ f$, $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$ și $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x + 1) + 1 = 2x + 2$. Nu există niciun x pentru care aceste funcții să aibă aceeași valoare, deci $f \circ g \neq g \circ f$ (concluzia se păstrează dacă cel puțin pentru o valoare atribuită variabilei x se obțin rezultate diferite prin cele două compunerii!)

REȚINEM

Compunerea funcțiilor *nu este comutativă*.

DEFINIȚIE

Fie A o mulțime nevidă. Funcția notată $1_A: A \rightarrow A$ cu proprietatea $1_A(x) = x, \forall x \in A$ se numește **funcția identică** a mulțimii A .

Funcția identică a unei mulțimi are câteva *proprietăți* interesante legate de compunerea funcțiilor. Astfel, fiind dată $f: A \rightarrow B$ avem:

a) $f \circ 1_A = f$;

b) $1_B \circ f = f$;

c) Dacă $A = B$, atunci $f \circ 1_A = 1_A \circ f = f$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Determină $g \circ f$ și $f \circ g$, știind că $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de $f(x) = 2x - 3$ și $g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < -1 \\ -3x + 2, & x \geq -1 \end{cases}$. Sunt egale funcțiile obținute prin compunere?

Rezolvare:

Cum $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} f(x) - 1, & \text{dacă } f(x) < -1 \\ -3f(x) + 2, & \text{dacă } f(x) \geq -1 \end{cases}$, rezolvăm inegalitățile: $2x - 3 < -1 \Rightarrow x < 1$;

$2x - 3 \geq -1 \Rightarrow x \geq 1$; deci $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x < 1 \\ -6x + 11, & x \geq 1 \end{cases}$. Cum $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 3 =$

$= \begin{cases} 2(x - 1) - 3, & x < -1 \\ 2(-3x + 2) - 3, & x \geq -1 \end{cases}$, de unde $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x < -1 \\ -6x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$. Deoarece $(g \circ f)(0) = 11$ și $(f \circ g)(0) = 1$,

deci diferite, rezultă că $g \circ f \neq f \circ g$.

2. Demonstrează că în cazul în care funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt monotone (strict), atunci $g \circ f$ și $f \circ g$ sunt monotone (strict). În plus:

● dacă f și g au aceeași monotonie (strictă), compunerile sunt crescătoare (strict crescătoare).

● dacă f și g au monotonii diferite (stricte), compunerile sunt descrescătoare (strict descrescătoare).

Rezolvare: Vom demonstra cazul în care f și g sunt descrescătoare, celelalte cazuri fiind analoge.

Fie $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (f descrescătoare) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ (g descrescătoare), deci $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \leq (g \circ f)(x_2)$, adică $g \circ f$ este crescătoare.





SITUAȚIE REALĂ ȘI MODELARE ANALITICĂ

Imaginează-ți că vrei să îți cumperi o pereche de pantofi care costă x lei. Ai la dispoziție două tipuri de reduceri pe care le poți cumula, dar vânzătorul te întreabă în ce ordine vrei să le aplici.

- a) *reducerea de magazin* (sezonieră): reducere de 20% din preț;
- b) *voucher de fidelitate* (reducere fixă): un bon valoric de 50 de lei.

Contează ordinea în care aplici cele două reduceri? Dacă da, ce situație corespunde unui preț final (după ambele reduceri) mai mic?

Rezolvare:

Modelare matematică: definim cele două funcții pornind de la prețul inițial x :

- funcția f (reducerea procentuală): dacă scădem 20%, rămânem cu 80% din preț; $f(x) = 0,8 \cdot x$;
- funcția g (voucherul fix): scădem 50 de lei din preț, $g(x) = x - 50$.

Analizăm cele două scenarii posibile prin compunerea funcțiilor.

Scenariul A: aplici întâi procentul, apoi voucherul ($g \circ f$); calculăm $f(x)$, apoi $g(f(x))$; obținem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0,8x) = 0,8x - 50$ (se reduce prețul cu 20%, iar din noul preț se mai scad 50 de lei).

Scenariul B: aplici întâi voucherul, apoi procentul ($f \circ g$); calculăm $g(x)$, apoi $f(g(x))$; obținem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 50) = 0,8 \cdot (x - 50) = 0,8x - 40$ (se scad 50 de lei din preț, iar la suma rămasă se aplică reducerea de 20%).

Comparăm cele două prețuri finale, *preț A* ($0,8x - 50$) și *preț B* ($0,8x - 40$). **Concluzie:** varianta A este mai avantajoasă; plătești cu 10 lei mai puțin (indiferent de prețul inițial).

Acest exemplu demonstrează perfect observația: *compunerea funcțiilor nu este comutativă.*



EXERCITII PROPUSE

Operații cu funcții numerice

1. Determină suma, produsul și câtul următoarelor funcții numerice:
 - a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3x - 2$;
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ și $g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x+2}$;
 - c) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3$ și $g: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 9$;
 - d) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ și $g: (-3, 0) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x(x+3)}$.
2. Justifică faptul că produsul dintre o funcție numerică monotonă și un număr $a \in \mathbb{R}^*$ este o funcție monotonă.
3. (**Activitate în pereche**) a) Dați exemplu de sumă a două funcții numerice de aceeași monotonie pentru care funcția sumă este monotonă. Se poate generaliza acest rezultat pentru suma oricăror două funcții de aceeași monotonie?
 - b) Determinați monotonia funcțiilor: i) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} - x^2$; ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + 1$.
 - c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile: i) $1 - x^2 < 0$; ii) $x^3 + x + 1 \leq 3$.
4. a) Demonstrează că produsul a două funcții numerice care iau valori pozitive și au aceeași monotonie este o funcție monotonă. Este valabilă proprietatea și în cazul în care funcțiile:
 - i) iau valori negative; ii) au semne opuse?
 - b) Determină monotonia funcțiilor: i) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(x^2 + 1)$; ii) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x](3x + 2)$.
 - c) Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile: i) $x(x^2 + 1) > 3\sqrt{2}$; ii) $[x](3x + 2) \leq 9\pi + 6, x \geq 1$.
5. (**Activitate pe grupe**) a) Justificați faptul că produsul dintre o funcție numerică mărginită și un scalar $a \in \mathbb{R}$ este o funcție mărginită.
 - b) Justificați că suma și produsul a două funcții numerice mărginite este o funcție mărginită.
 - c) Demonstrați că următoarele funcții sunt mărginite:
 - i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \{x\}$; ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x^3 + x + 1\} + \frac{2x}{x^2 + 1}$,
 unde notația $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a unui număr real x .



Compunerea funcțiilor

6. (**Activitate în pereche**) Individual, determinați $g \circ f$ și $f \circ g$ pentru funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ următoare, apoi comparați și stabiliți dacă există cazuri particulare de comutativitate:
- a) $f(x) = 2x + 3, g(x) = x + 2$; b) $f(x) = -x + 3, g(x) = -x + 3$;
 c) $f(x) = x^2 + 3, g(x) = x + 1$; d) $f(x) = [x], g(x) = \{x\}$;
 e) $f(x) = 2x + 1, g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0; \\ 2x - 5, & x \geq 0; \end{cases}$ f) $f(x) = \frac{2x-1}{3}, g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x < 1 \\ \frac{2x-5}{7}, & x \geq 1 \end{cases}$.
7. Pentru fiecare dintre funcțiile h următoare, determină câte două funcții f și g astfel încât $h = f \circ g$.
- a) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2|x - 1| + 1$; b) $h: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2\sqrt{x+1} + 1$;
 c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2(x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) + 3$; d) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2(x^2)^2 + x^2 + 1$;
 e) $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) + x + \frac{1}{x}$.
8. (**Activitate în pereche**) Determinați $g \circ f$ și $f \circ g$ pentru funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow A$ următoare:
- a) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \sqrt{x-1}, A = [0, \infty), B = [1, \infty)$;
 b) $f(x) = -2x + 3, g(x) = \frac{x+3}{2}, A = B = \mathbb{R}$;
 c) $f(x) = x^2 + 3x + 3, g(x) = \frac{-3 + \sqrt{4x-3}}{2}, A = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right), B = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$.
9. Pentru a-și deschide o afacere de vânzare online de tricouri, Andrei analizează piața și stabilește următoarele funcții pentru venituri și cheltuieli, unde x reprezintă numărul de tricouri vândute lunar:
- funcția venit (R): $R(x) = 60x$ (Andrei vinde un tricou cu 60 de lei);
 - funcția de cost (C): $C(x) = 25x + 350$ (costul de producție este 25 de lei per tricou, iar chiria site-ului și publicitatea costă 350 de lei lunar).
- a) Determină funcția profit, $P(x)$, definită ca diferența dintre venituri și costuri: $P = R - C$.
 b) Calculează $P(20)$ și interpretează rezultatul.
10. Studiază monotonia lui $f \circ g$, unde $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții date prin legile:
- a) $f(x) = x^3, g(x) = 2x + 5$; b) $f(x) = -3x + 2, g(x) = x^3 + 1$.
11. Se consideră funcțiile:
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$;
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.
 Calculează $f \circ f \circ \dots \circ f$ (de n ori), n număr natural, $n \geq 2$.
12. a) Demonstrează că dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită, atunci oricare ar fi $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g$ este mărginită.
 b) Verifică faptul că funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt mărginite:
- i) $f(x) = \{x^3 + x + 3\}$; ii) $f(x) = \frac{2(x+1)^2}{(x+1)^4 + 1}$.
13. a) Demonstrează că dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este monotonă, atunci f este mărginită.
 b) Demonstrează că pentru $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f monotonă și $\text{Im} g = [a, b]$, $f \circ g$ este mărginită.
14. (**Activitate în pereche**) Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții.
- a) Justificați că dacă ambele funcții sunt pare sau ambele impare, compusa lor este o funcție pară.
 b) Verificați dacă în cazul a două funcții cu parități diferite compusa lor este impară.
15. a) Demonstrează că nu există o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile $(f \circ f)(x) = 4x$ și $(f \circ f \circ f)(x) = 3x$ pentru orice x real.
 b) Identifică o relație între a și b astfel încât să existe funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile $(f \circ f)(x) = ax$ și $(f \circ f \circ f)(x) = bx$ pentru orice x real și află apoi funcțiile.
16. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$.
- a) Demonstrează că există o infinitate de funcții $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$.
 b) Există funcții $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$? Justifică.



17. Managerul unui cinematograful observă că numărul de spectatori depinde de prețul biletului. În prezent, prețul este de 20 de lei și vin 100 de spectatori pe seară. Studiile de piață arată că pentru fiecare ieftinire cu 1 leu a biletului, numărul spectatorilor crește cu 10 persoane.

Notăm cu x numărul de lei cu care se reduce prețul biletului ($0 \leq x < 20$). Definim două funcții:

• funcția preț: $p(x) = 20 - x$ (noul preț al biletului);

• funcția număr clienți: $n(x) = 100 + 10x$ (numărul de spectatori după ieftinire).

a) Determină funcția venit total, $V(x)$, definită ca produsul dintre preț și numărul de clienți ($V = p \cdot n$).

b) Calculează venitul total, dacă managerul decide o reducere de 5 lei ($x = 5$).

18. Se consideră funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.

a) Verifică faptul că există o infinitate de funcții $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$.

b) Există funcții $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$?

19. Un lac este poluat de o pată de ulei de formă circulară care se extinde continuu. Raza cercului (în metri) crește în funcție de timp (în secunde) conform funcției $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, r(t) = 0,5t$. Aria suprafeței poluate (în metri pătrați) depinde de rază conform formulei ariei cercului: $A: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, A(r) = 3,14 \cdot r^2$ ($\pi \approx 3,14$).

a) Determină funcția care exprimă aria poluată în funcție de timp, folosind compunerea funcțiilor $(A \circ r)(t)$.

b) Calculează cât de mare este suprafața poluată după 10 secunde de la apariția petei.

20. Într-un grup de drone autonome care monitorizează o pădure, fiecare dronă are un ID unic (număr natural nenul). Pentru a evita coliziunile, dronele trebuie să își actualizeze altitudinea de zbor conform unui algoritm secret, bazat pe ID-ul lor. Funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ reprezintă algoritmul prin care o dronă cu ID-ul n își calculează noua altitudine $f(n)$ (în metri). Algoritmul trebuie să respecte două reguli stricte:

- *păstrarea ordinii*: dacă o dronă are un ID mai mare decât alta, ea va zbura întotdeauna la o altitudine strict mai mare (f este strict crescătoare).

- *feedback-ul de siguranță*: sistemul verifică integritatea datelor printr-o buclă dublă; dacă o dronă își recalculează altitudinea bazându-se pe noua altitudine deja calculată, suma dintre această „dublă procesare” și altitudinea simplă trebuie să respecte o relație liniară fixă, pentru a preveni erorile de calcul.

Determină funcția de altitudine $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, știind că este strict crescătoare și verifică relația: $f(f(n)) + f(n) = 2n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.



MATEMATICĂ SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII (PORTOFOLIU DE GÂNDIRE CRITICĂ)

A treia provocare: Cine este responsabil?

Un sistem de inteligență artificială decide acordarea unei burse.

Întrebare: Cine poartă responsabilitatea pentru rezultat?

• funcția h ? • funcția g ? • funcția f ? • persoana care a construit sistemul?

Reflectează și răspunde:

1. Dacă fiecare etapă este corectă, poate rezultatul final să fie nedrept (respingere)?

2. Poate apărea o eroare care nu este vizibilă într-un singur pas?

3. De ce este important să înțelegem întregul lanț și nu doar rezultatul final?

Compară răspunsurile tale cu cele ale colegilor tăi. Susține-ți punctul de vedere cu argumente!

Ideea mare: Într-un lanț de prelucrări, rezultatul final depinde de fiecare etapă, nu doar de ultima.

Date elev



Funcția f
(prelucrare)



Funcția g
(scor)



Funcția h
(decizie)

Rezultat:
„Bursa respinsă”.

Funcții injective

REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

Înainte de a introduce definiții matematice, gândește-te la următorul context din realitate: ai acces la baza publică de date a populației României, furnizată de Institutul Național de Statistică (INS). Fiecare cetățean are un *Cod Numeric Personal (CNP)*. Putem defini o funcție f având ca domeniu Populația României, drept codomeniu *CNP*, unde $f(x)$ este *CNP*-ul persoanei x .

- Fiecărei persoane îi corespunde un cod unic? Da.
- Este posibil ca două persoane diferite să aibă același *CNP*? Nu.
- Dacă știm codul, știm exact cine este persoana?

Acesta este conceptul de *injectivitate*: nu există două elemente diferite în domeniul de definiție care să corespundă unei aceleiași valori din codomeniu.

DEFINIȚIE

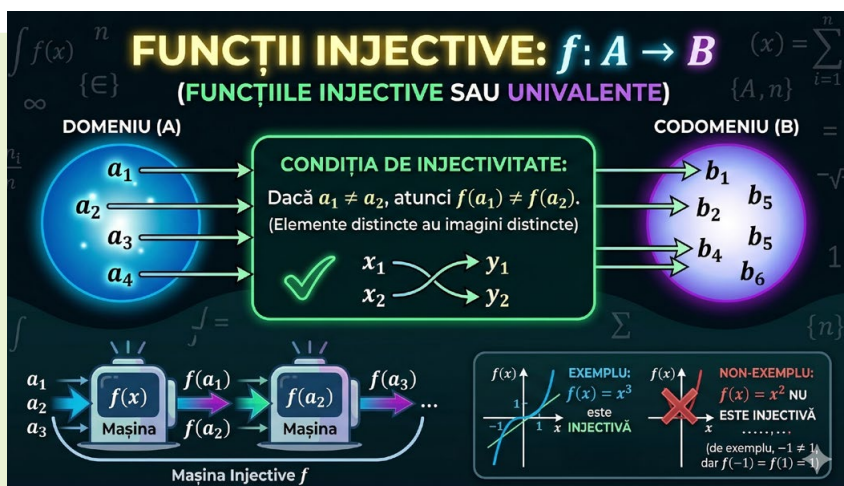
Funcția $f: A \rightarrow B$ este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Din punct de vedere logic, afirmația din definiție este echivalentă cu următoarea propoziție:

Funcția $f: A \rightarrow B$ este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, avem $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Negând definiția dată, avem:

Funcția $f: A \rightarrow B$ **nu este injectivă (neinjectivă)** dacă există $x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 \neq x_2$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$.



Interpretare geometrică

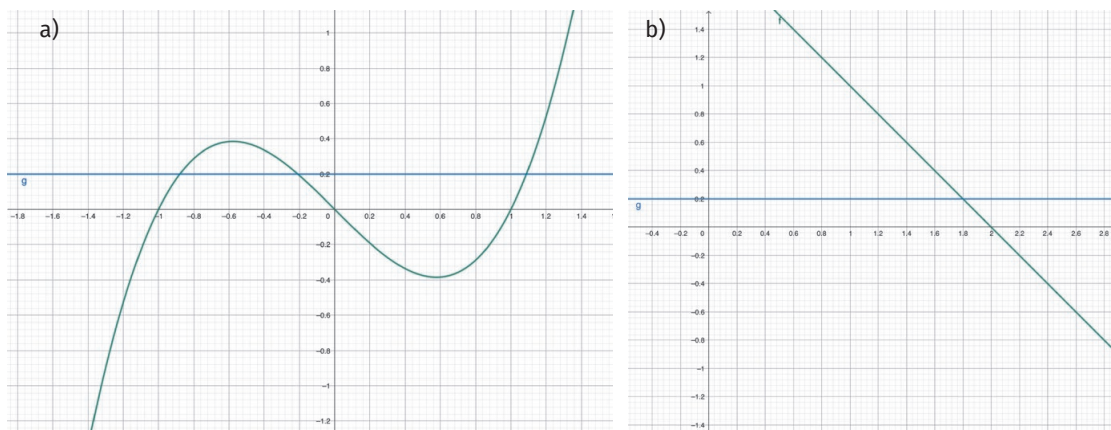
Într-un reper cartezian, putem verifica prin lectură grafică injectivitatea unei funcții astfel: o funcție este injectivă dacă *dreapta orizontală construită prin orice punct al codomeniului intersectează graficul funcției în cel mult un punct*.

OBSERVAȚIE

Orice funcție *strict monotonă* (*strict crescătoare* sau *strict descrescătoare*) pe domeniul său este injectivă.

Atenție! Reciproca nu este adevărată!





Exemplu: În figurile de mai sus, funcția de la a) *nu este injectivă*, deci *nici strict monotonă*, iar cea de la b) este injectivă, în acest caz și strict monotonă. Dreptele orizontale din fiecare reprezentare sunt evidențiate pentru a marca testarea proprietății.



REFLECTĂM

Unde întâlnim conceptul de injectivitate în viața de zi cu zi?

- **Amprenta digitală:** funcția care asociază fiecărui om amprenta sa (a degetelor de la mână) este considerată, teoretic, injectivă; dacă poliția identifică într-o situație o amprentă, știe că aparține unei singure persoane; dacă amprenta este în baza de date a poliției, înseamnă că a descoperit și cărei persoane aparține.

- **Adresa IP:** într-o rețea locală de net corect configurată, funcția care asociază fiecărui dispozitiv (laptop, telefon) o adresă IP trebuie să fie injectivă; dacă ar avea același IP, rețeaua nu ar ști unde să trimită datele.

- **Criptografia (Hash-uri):** când salvezi o parolă, computerul nu salvează secvența de caractere/simboli, ci un cod rezultat dintr-o funcție matematică complicată. Pentru a evita compromiterea securității, această funcție trebuie să fie injectivă (să nu existe parole diferite care să genereze același cod).



EXEMPLE REZOLVATE

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ este injectivă.

Demonstrație:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Dreapta oblică reprezentând graficul funcției verifică testul liniei orizontale (cel mult o intersecție).

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nu este injectivă.

Demonstrație:

Există $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$ astfel încât $x_1 \neq x_2$, dar $f(-1) = (-1)^2 = 1$ și $f(1) = 1^2 = 1$, deci $f(x_1) = f(x_2)$. Dreapta de ecuație $y = 1$ intersectează reprezentarea graficului funcției în două puncte distincte, suficient pentru a justifica neinjectivitatea.

3. Funcția $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 1$ este injectivă.

Demonstrație:

Vom demonstra $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, pentru orice $x_1, x_2 \in [2, \infty)$.

În acest sens, $x_1^2 - 4x_1 + 1 = x_2^2 - 4x_2 + 1 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = 0$. Cum $x_1, x_2 \in [2, \infty)$, rezultă $x_1 \geq 2$ și $x_2 \geq 2$, deci $x_1 + x_2 \geq 4$, cu egalitate

pentru $x_1 = x_2 = 2$. În orice alt caz a doua paranteză este nenulă, ceea ce implică $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. În oricare dintre cele două situații implicația este verificată, deci funcția este injectivă.



SITUAȚII REALE ȘI MODELARE ANALITICĂ

1. Ești liderul echipei „White Hat Hackers” (hackeri etici) în cadrul unui concurs de securitate cibernetică. Scopul echipei este să transmită un cod secret format din 4 litere colegilor din camera alăturată, pentru a opri un atac simulat asupra serverului școlii. Ai la dispoziție un alfabet numeric simplu, unde literele sunt numerotate astfel: A = 1, B = 2, C = 3, ..., Z = 26. Pentru a nu fi interceptat mesajul de echipa adversă, trebuie să treci numărul fiecărei litere printr-o *funcție de criptare*. Ai de ales între doi algoritmi (funcții) propuși de membrii echipei tale, Bianca și Cristian. Tu trebuie să decizi care funcție este sigură, știind că un algoritm este considerat *sigur* doar dacă mesajul poate fi decriptat corect, fără ambiguități (*unicitatea* mesajului original este păstrată).

Mesajul pe care trebuie să îl transmită grupa ta este cuvântul: JAVA. Indicii literelor sunt: J = 10, A = 1, V = 22, A = 1. Cele două funcții de criptare propuse de membrii echipei tale sunt definite pe mulțimea indicilor literelor $A = \{1, 2, \dots, 26\}$ cu valori în $\mathbb{Z}$; algoritmul Biancăi: $f: A \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 3x - 5$; algoritmul lui Cristian: $g: A \rightarrow \mathbb{Z}, g(x) = x^2 - 26x$. Cerințe:

- Codificați cuvântul JAVA, folosind ambele funcții.
- Studiați care dintre funcții este injectivă și care nu.
- Explicați de ce funcția neinjectivă ar putea duce la un dezastru în decriptarea unui alt mesaj (de exemplu, dacă ați fi avut de transmis literele L și N).

Rezolvare:

Pasul 1: Testarea „pe teren” (calculul valorilor)

Pentru cuvântul JAVA trimitem prin rețea numerele: 10, 1, 22, 1.

- folosind algoritmul Biancăi: $f(10) = 25, f(1) = -2, f(22) = 61$, mesajul criptat este: 25, -2, 61, -2.
- folosind algoritmul lui Cristian: $g(10) = -160, g(1) = -25, g(22) = -88$, mesajul criptat este: -160, -25, -88, -25.

Observație: La prima vedere, ambii algoritmi de criptare par să funcționeze.

Pasul 2: Analiza de securitate (testarea injectivității)

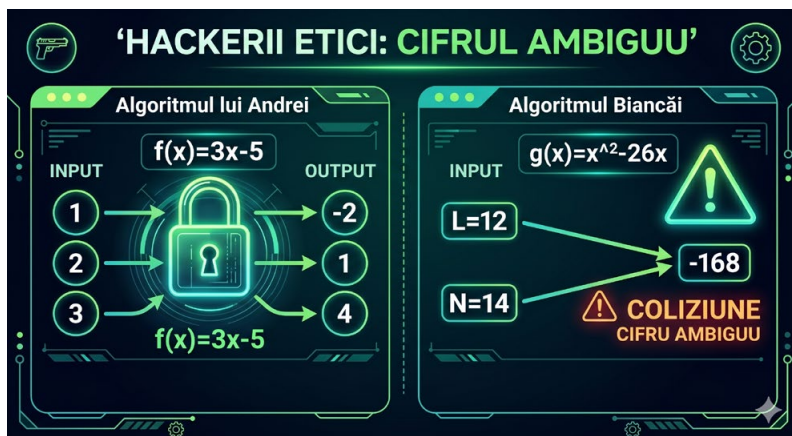
Pentru ca un cod să poată fi decriptat *unic* (fără să existe dubii asupra corespondenței dintre număr și literă), funcția trebuie să fie injectivă.

► Verificăm funcția Biancăi: presupunem că două litere diferite, x_1 și x_2 , produc același cod: $f(x_1) = f(x_2)$; cum $3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$, rezultă că singurul mod să obținem același cod este să plecăm de la aceeași literă; funcția este injectivă, deci este sigură.

► Verificăm funcția lui Cristian: înlocuim cu $g(1) = g(25) = -25$, dar 1 diferit de 25, deci funcția nu este injectivă. Dacă decizia ta este de a alege acest algoritm și trebuie să trimită mesajul LUNA, codul pentru prima literă (L) va fi -168. În acest caz, colegii care primesc mesajul, pentru valoarea -168 vor identifica în tabelul de decriptare corespondența atât cu litera L, cât și cu litera N, deci sistemul este inutilizabil (nesigur).

Așadar, decizia corectă este alegerea algoritmului Biancăi.

Reținem! În matematică, injectivitatea este garanția că informația nu se pierde și nu se confundă. Într-o funcție injectivă, fiecare x are amprenta lui unică și irepetabilă în lumea lui y .



2. Un mare magazin a instalat un sistem automatizat de parcare. Există o mulțime M de mașini care intră în parcare și o mulțime L de locuri de parcare numerotate. Sistemul folosește o funcție $f: M \rightarrow L$ pentru a aloca fiecărei mașini un loc, scanând numărul de înmatriculare. Sistemul informatic are un „bug” (eroare) în algoritmul de alocare. Pentru mașinile cu numerele de înmatriculare x , funcția de alocare a locului este definită simplificat prin legea $f(x) = \text{Cifra}(x) + 10$, unde $\text{Cifra}(x)$ este ultima cifră a numărului de înmatriculare.

a) Verifică dacă funcția este injectivă, considerând două mașini: una cu numărul B-12-345 și alta cu numărul CJ-09-845.

b) Explică, în termeni practici, ce se întâmplă în parcare dacă funcția *nu* este injectivă.

Rezolvare:

a) Notăm cu x_1 mașina de București (cu indicativul terminat în cifra 5) și cu x_2 mașina de Cluj (cu indicativul terminat tot în cifra 5). Obținem $f(x_1) = 5 + 10 = 15$ și $f(x_2) = 5 + 10 = 15$, așadar locul 15 pentru ambele. Avem $x_1 \neq x_2$ (mașini diferite), dar $f(x_1) = f(x_2)$ (distribuite automat pe același loc).

Concluzie: Funcția nu este injectivă, sistemul de parcare este ineficient.

b) Lipsa injectivității înseamnă *conflict*. Sistemul trimite două mașini diferite pe același loc de parcare. Șoferii se vor certa sau, într-un caz extrem, are loc o coliziune.



OBSERVAȚIE

În general, proprietatea de injectivitate nu se conservă la funcții obținute prin operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor. În schimb, *compunerea a două funcții injective este o funcție injectivă*.

Exemple: 1. Pentru funcțiile injective $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = -x$, funcțiile $(f + g)(x) = 0$, $(f \cdot g)(x) = -x^2$ nu sunt injective.

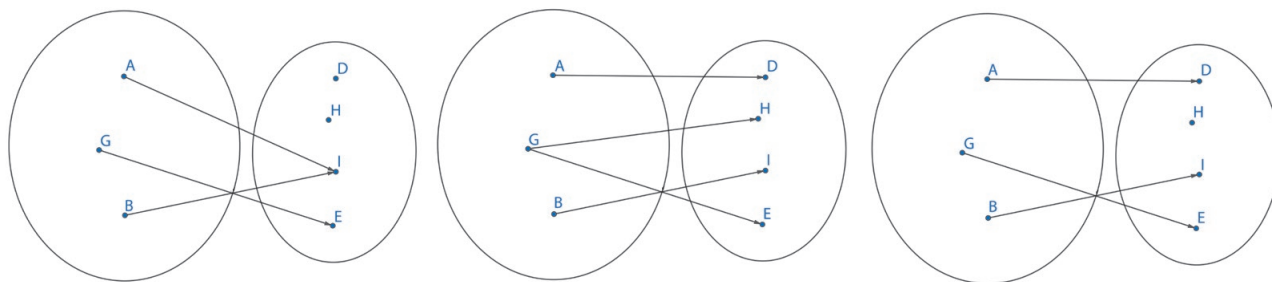
2. Dacă f și g sunt două funcții injective care se pot compune, atunci $f \circ g$ este funcție injectivă.

Într-adevăr, dacă $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$, atunci $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$; ținând cont de injectivitatea funcției $f \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$, de unde, pentru că g este injectivă, obținem $x_1 = x_2$, deci $f \circ g$ este injectivă.



EXERCITII

1. Stabilește care dintre următoarele relații reprezintă funcții și care dintre acestea sunt injective.



2. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{5, 7, 9\}$. Determină toate funcțiile $f: A \rightarrow B$ astfel încât $f(1) \neq 5, f(2) \neq 9$. Care dintre ele sunt injective?

3. Studiază care dintre următoarele funcții sunt injective:

a) $f_1: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sqrt{x-2}$;

b) $f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_2(x) = x + [x]$.

4. (**Activitate în pereche**) Justificați că următoarele funcții nu sunt injective:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 7x^2$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 1$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-1| + |x-2|$;

g) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$.

5. Reprezintă grafic funcțiile și analizează dacă sunt injective prin lectura graficului (testul liniilor horizontale):

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0 \\ x+3, & x < 0 \end{cases}$$

$$b) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 1 \end{cases}$$



6. Studiază injectivitatea funcțiilor:

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1 \\ 3x, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ x^2, & x \geq -1 \end{cases}$$

$$c) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \in \mathbb{Q} \\ 4x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$d) f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x \text{ impar} \\ x+1, & x \text{ par} \end{cases}$$

7. (Activitate pe grupe). Studiați independent injectivitatea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $m \in \mathbb{R}$, apoi comparați strategiile folosite la nivelul grupei:

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \leq 1 \\ 2x+m, & x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \leq 1 \\ mx+2, & x > 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ mx+1, & x > -1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x \leq 0 \\ -mx^2+1, & x > 0 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^3 - 2mx + 2, & x > 1 \end{cases}$$

8. Studiază monotonia și injectivitatea funcțiilor și validează concluziile tale, folosind reprezentarea grafică a acestora cu ajutorul unei aplicații digitale:

$$a) f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x};$$

$$b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2;$$

$$c) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + [x];$$

$$d) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ 2, & x \in (0,1); \\ x+3, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$e) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 2 \end{cases}$$

9. O dronă de livrare trebuie să zboare de la zona de depozitare până la zona de livrare. Pentru siguranță, drona urcă și apoi coboară. Funcția care descrie altitudinea dronei (în metri) în funcție de timp (în minute) este dată de legea: $h: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = -t^2 + 10t$, unde $t = 0$ semnifică momentul decolării și $t = 10$ semnifică momentul aterizării. Operatorul dronei primește o alertă: *Drona se află la înălțimea de 16 metri.*

a) Demonstrează că funcția h nu este injectivă pe intervalul $[0, 10]$.

b) Poate operatorul să știe, doar pe baza acestei alerte, dacă drona este în faza de *urcare* sau de *coborâre*?

c) Restricționează domeniul funcției astfel încât aceasta să devină injectivă (să nu mai existe ambiguitate la interpretarea alertei).

10. Ești administrator de rețea și ai un server care gestionează utilizatorii. Pentru a monitoriza „sarcina” serverului, folosești o funcție a cărei variabilă reprezintă numărul de utilizatori activi (n) după formula $f(n) = \frac{3n}{n+100}$, unde 100 este o constantă de calibrare a serverului. Sistemul automat de securitate este programat să restarteze serverul dacă *indicele de încărcare* f atinge valoarea 2,5. Pentru a fi siguri că sistemul este stabil și predictibil, trebuie să demonstrăm că fiecărui număr de utilizatori n îi corespunde un indice de încărcare *unic*.

a) Demonstrează că funcția de lege f este injectivă pe domeniul $[0, \infty)$.

b) Interpretează următorul rezultat: este posibil ca serverul să confunde un număr mic de utilizatori cu un număr mare și să dea același indice?

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Studiază injectivitatea funcției.

12. (Activitate în pereche) Se consideră funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$. Demonstrați propoziția: *Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.* Este obligatoriu ca și g să fie injectivă? Justificați.

Funcții surjective

REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

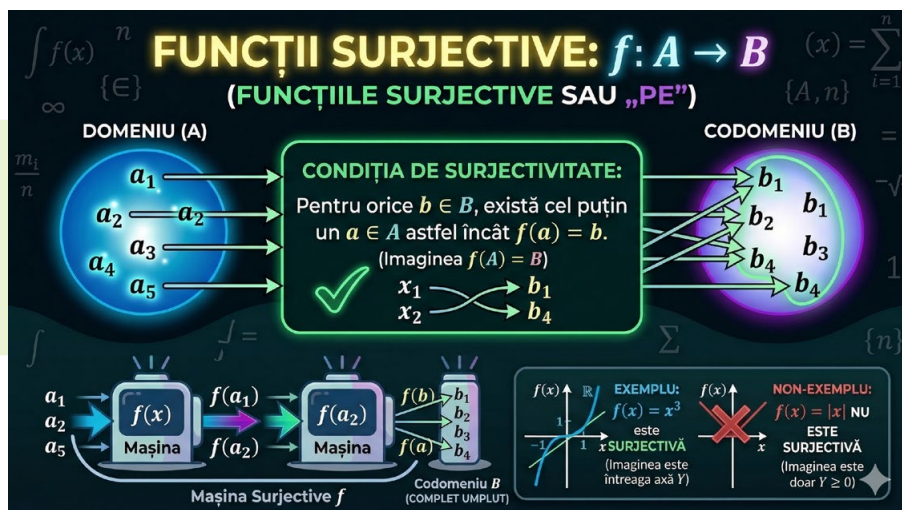
O funcție $f: A \rightarrow B$ are ca scop asocierea fiecărui element din domeniul de definiție A cu un unic element din codomeniul B . Ne interesează situația în care **toate** elementele din codomeniul B sunt imagini pentru o funcție dată.

DEFINIȚIE

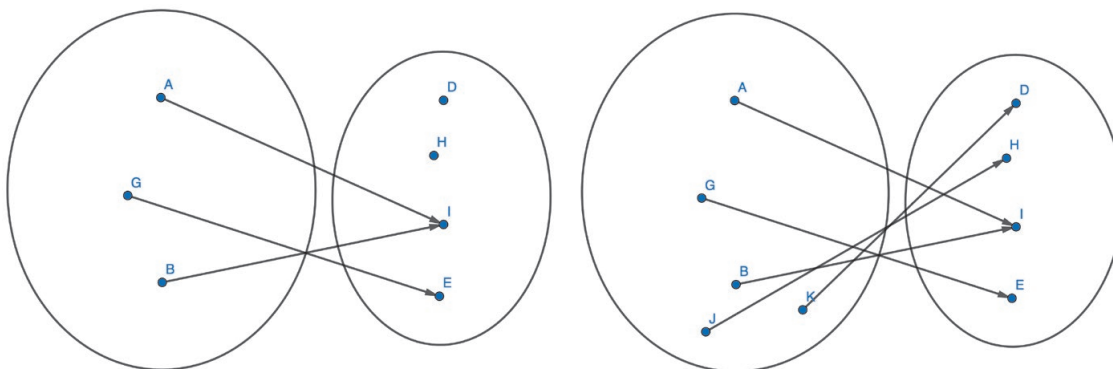
Spunem că $f: A \rightarrow B$ este **surjectivă** dacă, pentru orice element $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție $x \in A$.

OBSERVAȚIE

Formal, proprietatea de surjectivitate a funcției f înseamnă că $\text{Im}f = B \Leftrightarrow f(A) = B \Leftrightarrow B \subset f(A) \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y$.



În diagramele de mai jos, imaginea din stânga corespunde unei funcții care **nu este surjectivă** pentru că **nu toate elementele din codomeniu aparțin imaginii funcției**, iar cea din dreapta corespunde unei funcții surjective.



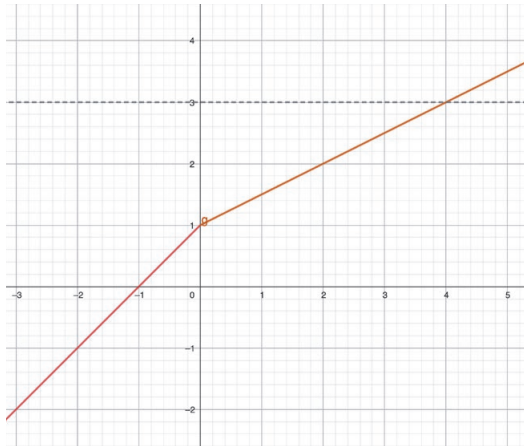
Interpretare geometrică

Pentru o funcție numerică $f: A \rightarrow B$, putem verifica surjectivitatea analizând graficul. Astfel, funcția f este surjectivă dacă orice dreaptă orizontală $y = k$, unde $k \in B$, intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

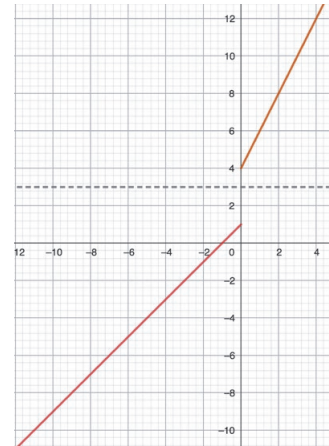


EXEMPLE (LECTURĂ GRAFICĂ):

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Ambele funcții au drept codomeniu mulțimea numerelor reale. Observăm că graficul funcției f reprezentate în imaginea a) este intersectat o dată de orice paralelă dusă printr-un punct oarecare al axei Oy la axa Ox , deci funcția *este surjectivă* ($\text{Im}f = \mathbb{R}$, deci egală cu codomeniul). Graficul funcției g din imaginea b) nu se intersectează cu paralela dusă prin punctul $(0, 3)$ al axei Oy și cum $3 \in \mathbb{R}$ (element al codomeniului), rezultă că funcția *nu este surjectivă*.



PROPRIETĂȚI

1. *Compunerea*: Știind că $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ sunt două funcții surjective, atunci funcția compusă $(g \circ f): A \rightarrow C$ este, de asemenea, surjectivă.
2. *Suma și produsul*: Atenție! Suma sau produsul dintre două funcții surjective **nu** reprezintă neapărat o funcție surjectivă.

Exemplu: $f(x) = x$ și $g(x) = -x$ sunt surjective pe $\mathbb{R}$, dar $(f + g)(x) = 0$ și $(f \cdot g)(x) = -x^2$ nu sunt surjective pe $\mathbb{R}$.



REFLECȚIE

Orice restricție a unei funcții injective este o întotdeauna funcție injectivă (se transmite „ereditar”). Avem proprietatea similară în cazul restricțiilor unei funcții surjective? Justifică!



EXERCIIII REZOLVATE

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (-1, 2)$, $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Să demonstrăm că f este surjectivă.

Rezolvare:

Verificăm dacă există $x \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x) = y$, pentru un $y \in (-1, 2)$ arbitrar: $\frac{2x-1}{x+1} = y \Leftrightarrow 2x - 1 = yx + y \Leftrightarrow x(2 - y) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2-y}$. Cum $y \in (-1, 2)$, rezultă că $y + 1 > 0$ și $2 - y > 0$, deci $x > 0$; adică indiferent de valoarea $y \in (-1, 2)$, există $x \in (0, \infty)$ soluție a ecuației $f(x) = y$, deci f surjectivă.

2. Într-un sistem de calcul, avem o mulțime de procese $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ și o mulțime de servere disponibile $S = \{s_1, s_2\}$. Definim funcția de alocare $a: P \rightarrow S$. Ce înseamnă în acest context ca funcția a să fie surjectivă?

Răspuns: Înseamnă că *fiecare server* disponibil are cel puțin un proces activ alocat. Nu există servere care să nu fie utilizate.

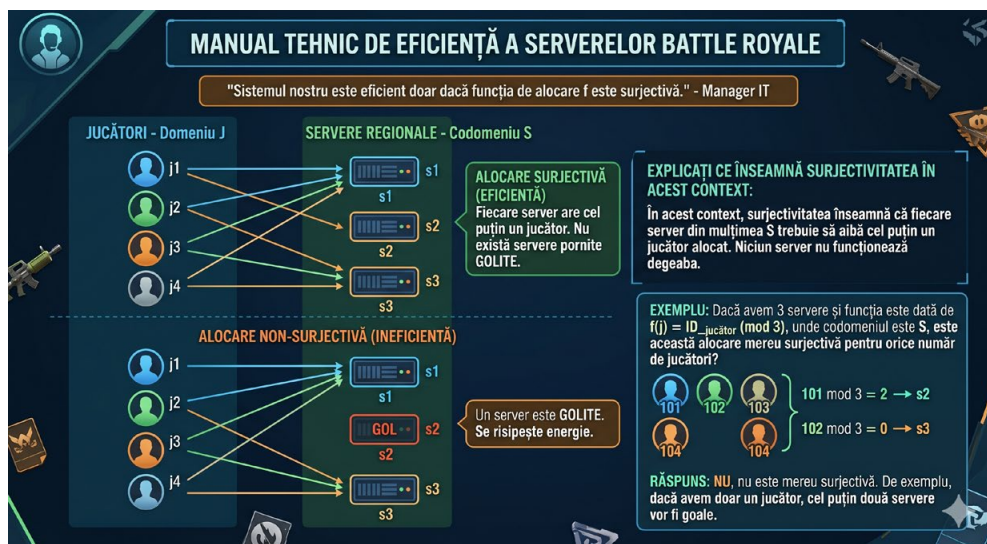
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$. Să determinăm $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie surjectivă.

Rezolvare:

Pentru $x \leq 1$, obținem $f((-\infty, 1]) = (-\infty, 3]$. Justifică! Pentru ca f să fie surjectivă pe $\mathbb{R}$, ramura a doua a funcției, corespunzătoare lui $x > 1$, trebuie să acopere cel puțin intervalul de $(3, +\infty)$: $f((1, +\infty)) \supset (3, +\infty)$. În cazul $a \leq 0$, restricția pe intervalul $(1, +\infty)$ este constantă sau strict descrescătoare; în ambele cazuri nu poate fi acoperit intervalul $(3, +\infty)$, deci nu convine. Dacă $a > 0$, ramura a doua este restricția unei funcții (strict) crescătoare care ia orice valoare mai mare ca $a + 2$; condiția de surjectivitate este ca pragul $a + 2$ să fie mai mic sau egal cu limita superioară a primei ramuri (3), pentru a nu lăsa goluri în codomeniu (să nu existe valori fără să fie imagini), deci $a + 2 \leq 3 \Rightarrow a \leq 1$, așadar obținem $a \in (0, 1]$.

4. O companie de jocuri video are n jucători care vor să intre într-o partidă de tip „Battle Royale”. Pentru ca jocul să ruleze fără latență (*lag*), compania folosește o mulțime de servere regionale $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_m\}$. Definim funcția de alocare $f: J \rightarrow S$, unde J este mulțimea jucătorilor, iar $f(j) = s$ înseamnă

că jucătorul j este trimis pe serverul s . Compania are un protocol de eficiență energetică: un server pornit consumă curent electric indiferent dacă îi sunt atribuiți jucători sau nu. Managerul IT afirmă: „Sistemul nostru este eficient doar dacă funcția de alocare f este surjectivă.”



a) Ce înseamnă surjectivitatea în acest context?

b) Considerăm că avem 3 servere și funcția este dată de $f(j) = ID_j \pmod{3}$, unde ID_j reprezintă un număr natural, de identificare a jucătorului, numerele fiind alocate în ordinea înscrierii în joc, consecutiv, iar codomeniul S este $\{0, 1, 2\}$. Prin $ID_j \pmod{3}$ înțelegem că valorii ID_j îi corespunde restul împărțirii la 3 a acestui număr de identificare. Această formulă de alocare este surjectivă pentru orice număr de jucători?

Rezolvare:

a) *Interpretarea surjectivității.* În limbaj matematic, $f: J \rightarrow S$ este surjectivă dacă $\text{Im}f = S$, adică dacă pentru fiecare server $s \in S$ există cel puțin un jucător $j \in J$ astfel încât $f(j) = s$. **Concluzie:** Surjectivitatea garantează că *nu există servere neutilizate*. Dacă funcția nu ar fi surjectivă, ar însemna că nu ne încădrăm în eficiență energetică (s-ar plăti curent pentru un server pe care nu se joacă nimeni).

b) *Analiza funcției de alocare:* Considerăm mulțimea serverelor $S = \{0, 1, 2\}$ și mulțimea jucătorilor $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$. Legea funcției este $f(j) = ID_j \pmod{3}$.

Dacă avem un singur jucător ($n = 1$) cu $ID_j1 = 10$: $f(j_1) = 10 \pmod{3} = 1$. Imaginea funcției este $\text{Im}f = \{1\}$. Deoarece $\{1\} \neq \{0, 1, 2\}$, funcția nu este surjectivă. Serverele 0 și 2 consumă curent degeaba.

Dacă avem o mulțime mare de jucători cu ID -uri consecutive (de exemplu: 10, 11, 12, 13...): $10 \pmod{3} = 1$; $11 \pmod{3} = 2$; $12 \pmod{3} = 0, \dots$ În acest caz, $\text{Im}f = \{0, 1, 2\}$, deci funcția este surjectivă.

Surjectivitatea înseamnă, de fapt, utilizarea completă a resurselor. În informatică, ne asigurăm că o funcție de distribuție este surjectivă pentru a nu irosi capacitatea hardware.



EXERCITII PROPUSE

- Determină imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$ și stabilește dacă f este surjectivă.
 - Verifică surjectivitatea funcțiilor: $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n + 1$; $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = n + 1$.
 - Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{2x}{x+1}$ este surjectivă. Verifică și cu ajutorul testului dreptelor orizontale (prin lectură grafică, cu ajutorul unei reprezentări digitale).
 - Studiază surjectivitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max(x, 1 - x)$.
 - (Activitate pe grupe)** Calculați independent imaginea câte unei funcții, apoi discutați la nivelul grupeii ce strategii ați utilizat, pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 - $f(x) = -2x + 1$;
 - $f(x) = 3x^2 + x - 2$;
 - $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$;
 - $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
 - $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 0 \\ x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$;
 - $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 3x - 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
- Colaborați pentru a justifica faptul că următoarele funcții sunt surjective:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty), f(x) = x^2 - 2x + 2$;
 - $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{2x}{x+1}$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 3 \\ x^2 - 6x + 13, & x > 3 \end{cases}$.
- Cu ajutorul unor aplicații digitale, reprezintă grafic funcțiile următoare și stabilește prin lectură grafică dacă sunt surjective:
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, \infty), f(x) = x^2 - 1$;
 - $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 0 \\ -2x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ \{x\}, & x > 0 \end{cases}$.
 - Verifică dacă următoarele funcții sunt *nesurjective*:
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = x^4 + x^2 + 1$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = |x - 2| + |x|$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$.
 - (Activitate în pereche)** Studiați surjectivitatea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \geq 1 \\ 2x + m, & x < 1 \end{cases}$;
 - $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq 1 \\ mx + 2, & x > 1 \end{cases}$;
 - $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ mx + 1, & x > -1 \end{cases}$.
 - Dă exemplu de funcție f surjectivă și neinjectivă, în cazul $f: [0, 1] \rightarrow [2, 4]$.
 - Dă exemplu de funcție nesurjectivă și injectivă, în cazul $g: [0, 1] \rightarrow [2, 4]$.
 - Se consideră A și B două mulțimi, $n \in \mathbb{N}^*$ și $|A| = |B| = n$. Justifică faptul că f surjectivă $\Leftrightarrow f$ injectivă.
 - O platformă de livrare de mâncare are într-un cartier 4 curieri disponibili, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, care trebuie să acopere 3 zone distincte, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Aplicația atribuie fiecare curier unei singure zone, prin funcția $a: C \rightarrow Z$. Compania consideră că serviciul este operațional dacă în fiecare zonă există cel puțin un curier pentru a prelua comenzile.
 - Explică de ce starea operațională a serviciului este echivalentă cu surjectivitatea funcției a .
 - Dacă aplicația folosește regula $a(c_i) = z_k$, unde $k = i \pmod{3} + 1$, verifică dacă serviciul este operațional.
 - În securitatea informatică, o funcție de dispersie (hash) simplificată, $h: \{0, 1, \dots, P - 1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, M - 1\}$ distribuie chei de date în „containere” de memorie (buckets). Pentru a evita irosirea memoriei, un inginer dorește ca funcția h să fie surjectivă, astfel încât fiecare container să poată fi utilizat. Considerând funcția $h: \{0, 1, \dots, 11\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}, h(x) = (3x + 2) \pmod{4}$, justifică dacă funcția h este surjectivă. În caz afirmativ, determină câte suprapuneri (chei diferite care merg în același container) există pentru fiecare element din codomeniu.



Funcții bijective

DEFINIȚIE

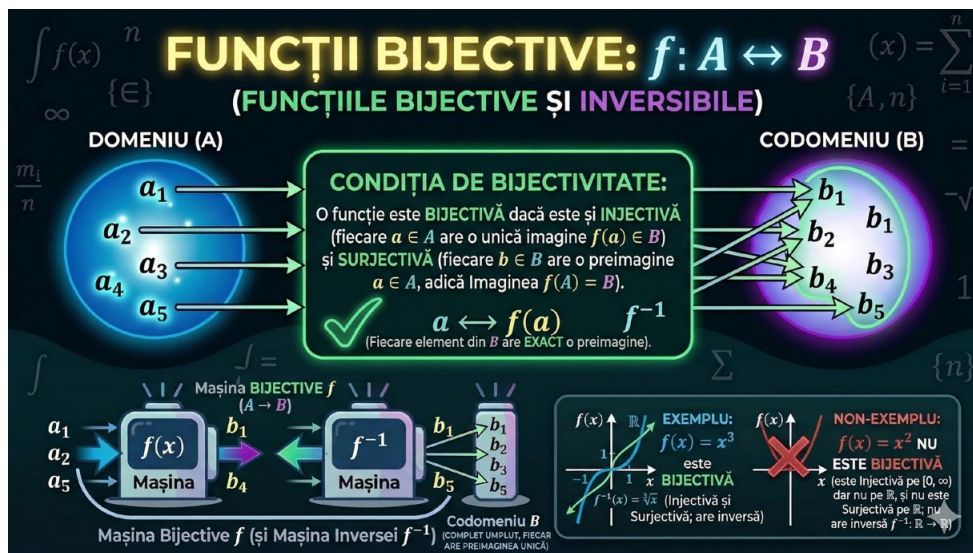
O funcție $f: A \rightarrow B$ se numește **bijectivă** (sau este o *bijecție*) dacă este *injectivă* și *surjectivă*.

Astfel, o funcție este bijectivă dacă realizează o corespondență „perfectă” între elementele mulțimii de plecare (domeniu) și cele ale mulțimii de sosire (codomeniu):

► *f* **injectivă**: fiecare element din B este imaginea a *cel mult* unui element din A .

► *f* **surjectivă**: fiecare element din B este imaginea a *cel puțin* unui element din A .

► *f* **bijectivă**: fiecare element din B este imaginea a *exact unui* element din A .



TEOREMĂ

O funcție $f: A \rightarrow B$ este bijectivă dacă și numai dacă ecuația $f(x) = y$ are o soluție unică $x \in A$ pentru orice $y \in B$.

EXEMPLU ȘI CONTRAEXEMPLU

Exemplul 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$.

● *injectivitate*: $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$, deci funcția este injectivă;

● *surjectivitate*: $2x + 3 = y$ are soluția $x = \frac{y-3}{2}$; deoarece pentru orice $y \in \mathbb{R}$, x este un număr real,

funcția este surjectivă;

● *concluzie*: *f* este bijectivă.

Exemplul 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

● *injectivitate*: $f(-2) = f(2) = 4$ și cum $-2 \neq 2$, rezultă că *f* nu este injectivă;

● *surjectivitate*: ecuația $x^2 = -1$ nu are soluții în $\mathbb{R}$; codomeniul conține numere negative care nu sunt imagini ale funcției, deci *f* nu este surjectivă;

● *concluzie*: funcția *f* nu este bijectivă.

Observație: Prin restrângerea domeniului și a codomeniului, funcția $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g(x) = x^2$ care conservă legea reprezintă o funcție bijectivă.

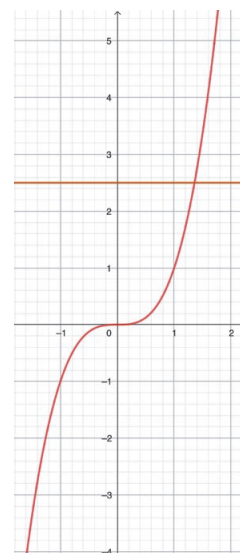


REFLECTĂM

Utilizând cele învățate la capitolul de logică matematică, neagă definiția bijectivității și precizează dacă toate etapele evidențiate la exemplul 2 sunt necesare pentru justificarea concluziei formulate. Fă pereche cu un coleg și construiește câte un exemplu de restricții ale funcției f din exemplul 2 care să fie funcție nebijectivă și care este: a) injectivă; b) surjectivă.

Interpretare geometrică

Din punct de vedere grafic, o funcție este bijectivă dacă orice dreaptă orizontală dusă prin punctele codomeniului intersectează graficul funcției într-un singur punct.



EXERCIȚII REZOLVATE

1. Să demonstrăm că funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ este bijectivă.

Rezolvare:

Studiem existența și unicitatea soluției ecuației $f(x) = y$ pentru un y fixat din codomeniu.

$\frac{2x+1}{x-1} = y \Rightarrow 2x+1 = yx-y \Rightarrow x(2-y) = -y-1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2}$. Deoarece $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y-2 \neq 0$, fracția obținută este bine definită și x este unic determinat. Trebuie să verificăm dacă x aparține domeniului (în acest caz că $x \neq 1$): cum $\frac{y+1}{y-2} = 1 \Rightarrow y+1 = y-2 \Rightarrow 1 = -2$ (imposibil), rezultă că $x \neq 1$. Fiindcă ecuația are o soluție unică în domeniu pentru orice y din codomeniu, funcția este bijectivă.

2. În securitatea cibernetică, o metodă simplă de a cripta mesaje este folosirea unei funcții bijective. Presupunem că alfabetul este reprezentat prin numerele de la 1 la 26. Dacă folosim legea de criptare f care pune în corespondență pe x cu restul împărțirii lui $x+3$ la 26, adică $f(x) = (x+3)(\text{mod } 26)$, aceasta trebuie să fie bijectivă pentru a permite decriptarea: bijectivitatea garantează că fiecărei litere de intrare îi corespunde un cod unic și, mai important, că fiecare cod primit poate fi tradus înapoi într-o singură literă inițială (prin ceea ce vom vedea în lecția următoare că este funcția inversă f^{-1}).

Riscuri: Dacă funcția nu ar fi injectivă, două litere diferite s-ar cripta cu același cod, făcând mesajul imposibil de descifrat corect; dacă funcția nu ar fi surjectivă, nu orice cod ar funcționa.

3. În aviație și meteorologia internațională, este esențială convertirea temperaturilor între scara Celsius (folosită în Europa) și scara Fahrenheit (folosită în SUA). Relația dintre temperatura în grade Celsius (x) și cea în grade Fahrenheit (y) este dată de funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

- Demonstrează că funcția de conversie este bijectivă.
- Explică importanța practică a bijectivității în acest context.
- Determină temperatura la care cele două scări indică aceeași valoare numerică.

Rezolvare:

a) Pentru a fi bijectivă, funcția trebuie să fie atât injectivă, cât și surjectivă. Putem verifica ambele condiții simultan, demonstrând că ecuația $f(x) = y$ are o soluție unică x pentru orice $y \in \mathbb{R}$. Cum $y = \frac{9}{5}x + 32 \Rightarrow x = \frac{5}{9}(y - 32)$ și membrul drept are sens pentru oricare y , rezultă că f este bijectivă.

b) $\square$ f este injectivă, deci nu pot exista două temperaturi Celsius diferite care să corespundă aceleiași temperaturi Fahrenheit; astfel, dacă un termometru indică 100°F , avem certitudinea că aceasta corespunde unei singure valori Celsius (aprox. $37,7^\circ\text{C}$) și nu riscăm să avem două stări termice diferite sub același număr;

$\square$ f este surjectivă, deci orice valoare de pe scara Fahrenheit are un corespondent pe scara Celsius; pentru astfel de legi, putem crea întotdeauna un algoritm de „inversare” a procesului;

$\square$ cunoscând formula de trecere de la grade Celsius la grade Fahrenheit, bijectivitatea ne asigură că putem construi o formulă validă și de trecere de la grade Fahrenheit la grade Celsius.

c) Determinăm x astfel încât $f(x) = x$, deci $x = \frac{9}{5}x + 32$. Valoarea de -40° (soluția ecuației) este singurul punct unde scările Celsius și Fahrenheit coincid.



EXERCITII PROPUSE

- Care dintre următoarele funcții definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$ sunt bijective? Justifică prin reprezentare grafică, folosind o aplicație digitală:
 a) $f(x) = -3x + 5$; b) $g(x) = x^3$; c) $h(x) = |x|$.
- Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m - 1)x + 2$ să fie bijectivă.
- (Activitate în pereche)** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Câte funcții bijective $f: A \rightarrow A$ pot fi construite astfel încât $f(1) = 2$? Reflectați întâi individual asupra strategiei de rezolvare, apoi discutați în pereche și finalizați împreună raționamentul.
- Demonstrează că funcția $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2 - 1$ este bijectivă.
- (Activitate pe grupe)** Abordați întâi individual câte o funcție, prezentați raționamentul și discutați asupra diferențelor de strategie implicate în justificarea faptului că următoarele funcții sunt bijective:
 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 1$; b) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$;
 c) $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;
 e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2; \\ x + 1, & x > 2; \end{cases}$ f) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + (-1)^n$;
 g) $f: [1, \infty) \rightarrow (0, 1], f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- Studiază proprietățile de injectivitate și surjectivitate pentru următoarele funcții și demonstrează că nu sunt bijective:
 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = [x]$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1), f(x) = \{x\}$;
 d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$; e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, x)$;
 f) $f: [0, 1] \times [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x + 1, y + 2)$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ 1 - 3x, & x \in (1, 3) \\ x + 2, & x \in [3, \infty) \end{cases}$.
 a) Reprezintă grafic funcția dată.
 b) Determină numărul soluțiilor ecuației $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$. Discuție după m .
 c) Decide argumentat dacă f este injectivă, surjectivă, bijectivă.
 Aceleași cerințe pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1| + |x + 1|$.
- a) Arată că $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -2n - 1, & n < 0 \end{cases}$ este bijectivă.
 b) Arată că $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ par} \\ -\frac{x-1}{2}, & x \text{ impar} \end{cases}$ este bijectivă.
- Determină toate funcțiile f de gradul I bijective, știind că $f: [0, 1] \rightarrow [1, 4]$.
- Demonstrează că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ ax, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este bijectivă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Se consideră $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime finită și $f: A \rightarrow A$ o funcție strict crescătoare. Arată că f este bijectivă.
- Se consideră funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$. Justifică faptul că:
 a) dacă f și g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă;
 b) dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă și g este surjectivă.

Funcții inversabile



REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

O funcție trebuie să fie „perfect echilibrată” pentru a putea fi inversată: fiecărui element din codomeniu trebuie să îi corespundă **exact un** element din domeniu.



DEFINIȚIE

Spunem că funcția $f: A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există o funcție $g: B \rightarrow A$ astfel încât:

$$(g \circ f)(x) = x, \text{ pentru orice } x \in A$$

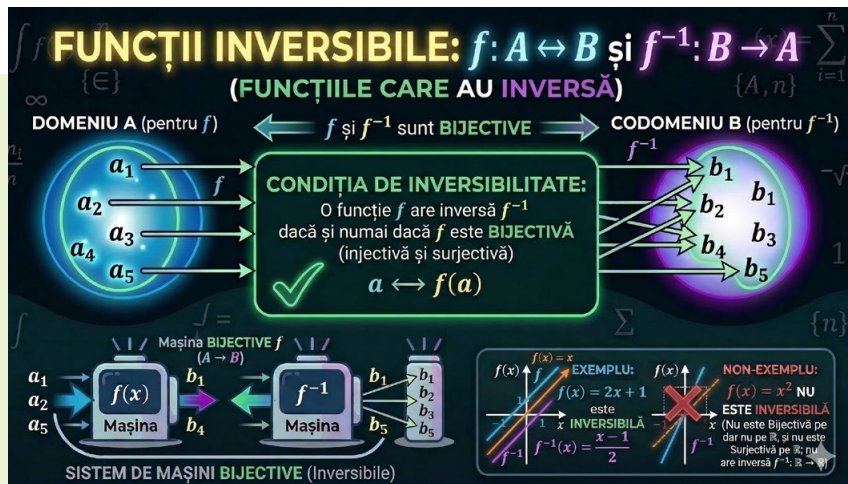
$$(g \circ f = 1_A)$$

$$(f \circ g)(y) = y, \text{ pentru orice } y \in B$$

$$(f \circ g = 1_B)$$

unde $1_A: A \rightarrow A$ și $1_B: B \rightarrow B$ sunt funcțiile identitate pe mulțimile date: $1_A(x) = x$, respectiv $1_B(x) = x$, oricare x din domeniul fiecărei funcții.

Funcția g se notează cu f^{-1} și se numește **inversa** funcției f .



Reținem! Atunci când există, inversa unei funcții „inversează” domeniul și codomeniul funcției inițiale.



TEOREMĂ

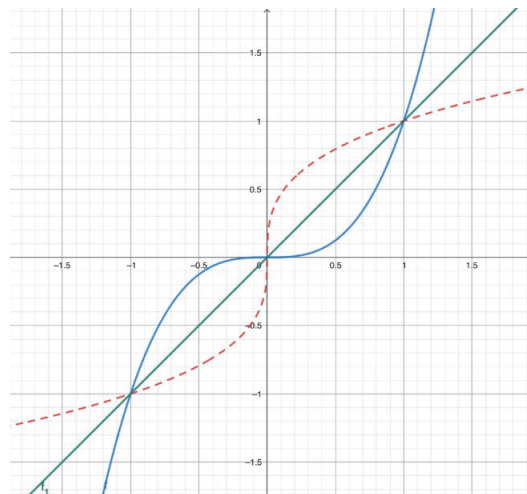
O funcție $f: A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă și numai dacă este **bijectivă**.

Proprietăți și reprezentare grafică

● **Simetria:** pentru funcțiile numerice, graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt **simetrice față de prima bisectoare** (dreapta de ecuație $y = x$).

● **Monotonia:** dacă f este strict monotonă, atunci f este injectivă. Dacă f este și surjectivă, atunci f^{-1} are același tip de monotonie ca f .

● **Calculul inversei:** pentru a obține f^{-1} , rezolvăm ecuația $f(x) = y$ în raport cu x (exprimarea lui x în funcție de y).



EXEMPLU ȘI APLICAȚII PRACTICE

Funcția de gradul I. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 1$. Fiind o funcție de gradul I, este bijectivă. Cum $y = -3x + 1 \Rightarrow x = \frac{1-y}{3}$ (cu soluție unică, oricare y), obținem inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{1-y}{3}$.

Revenind în notația standard a variabilei unei funcții (x), obținem $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$.

Reflecție: Prin acest raționament se obține o funcție care îndeplinește condiția de inversă, fiind unicul răspuns posibil. Această situație nu caracterizează doar exemplul dat: atunci când există, inversa unei funcții este unică!

Aplicație: În informatică, un algoritm de criptare simplu poate fi modelat printr-o lege de tipul $E(p) = c$, unde p este mesajul explicit și c este forma criptată a acestuia. Pentru ca destinatarul să poată citi mesajul, funcția trebuie să fie *inversabilă*, astfel încât $D(c) = E^{-1}(c) = p$.

Inteligența artificială (IA) în activități de învățare

Folosește un asistent IA pentru a explora limitele inversabilității.

● **Cerință:** Introdu următorul prompt (text): *Explică de ce funcția $f(x) = x^2$ nu este inversabilă pe $\mathbb{R}$, dar devine inversabilă dacă restricționăm domeniul la $[0, \infty)$. Generează cod Python pentru a trasa ambele grafice și dreapta $y = x$.*

● **Analiză:** Discută cu colegii dacă explicația oferită de IA respectă interpretarea geometrică (testul dreptelor orizontale).



EXERCITII REZOLVATE

1. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este bijectivă și determină inversa.

Rezolvare:

Pentru orice $x \in \mathbb{Q}, f(x) = x \in \mathbb{Q}$, deci $f(f(x)) = x$; cum $y = x$, rezultă că $x = y$. Pentru orice $x \notin \mathbb{Q}, f(x) = -x \notin \mathbb{Q}$; cum $y = -x$, rezultă că $x = -y$. În concluzie, $f(f(x)) = -(-x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și inversa este $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. În acest caz, în mod particular, rezultă că $f^{-1} = f$ (inversa funcției este funcția însăși)!



2. Aplicație practică

Ești dezvoltatorul unui magazin online internațional. Sistemul tău procesează plăți din România (RON) către un furnizor din Uniunea Europeană (EUR). Pentru a automatiza contabilitatea, ai nevoie de o funcție care să convertească prețul și de inversa ei pentru a procesa returnurile (*refund*). Considerăm funcția de conversie $f: (0, \infty) \rightarrow (5, \infty)$, definită prin formula $f(x) = \frac{x}{5} + 5$, unde x reprezintă suma în RON, iar $f(x)$ reprezintă suma finală în EUR (care include un comision fix de transfer de 5 EUR, unde 1 Euro = 5 RON).

- Demonstrează că funcția f este bijectivă, deci inversabilă.
- Determină legea de corespondență a funcției inverse f^{-1} . Ce reprezintă aceasta în contextul dat?
- Dacă unui client trebuie să i se returneze 105 EUR, folosește inversa pentru a calcula câți RON trebuie să primească acesta ca retur.

Rezolvare:

a) Pentru ca funcția să fie inversabilă, trebuie să fie injectivă și surjectivă. Considerând $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, obținem $\frac{x_1}{5} + 5 = \frac{x_2}{5} + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$, deci f este injectivă. Vom verifica dacă, pentru orice $y \in (5, \infty)$, există un $x \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x) = y$. Avem $y = \frac{x}{5} + 5 \Rightarrow x = 5(y - 5)$; deoarece $y > 5$, rezultă că $y - 5 > 0$, de unde $x > 0$, deci $x \in (0, \infty)$, așadar f este surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă, f este bijectivă, deci inversabilă.

b) Din calculul de la surjectivitate, am exprimat x în funcție de y . Înlocuind notațiile pentru a obține forma standard a funcției, obținem inversa $f^{-1}: (5, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f^{-1}(x) = 5(x - 5)$.

Interpretare: În contextul dat, funcția f^{-1} reprezintă algoritmul care calculează suma originală în RON pornind de la o sumă în EUR, după ce se scade comisionul de transfer.

c) Clientul a plătit/recepționat $y = 105$ EUR. Aplicăm funcția inversă pentru a găsi suma în RON: $f^{-1}(105) = 5(105 - 5) = 500$ RON, așadar banca va returna în contul clientului suma de 500 RON.

Tabelul de corespondență (conversie versus retur) următor ilustrează cum funcția f transformă intrarea (RON) în ieșire (EUR), iar funcția f^{-1} reface drumul invers, de la EUR înapoi la RON.

Suma în RON (x)	Procesare Plată $f(x) = x/5 + 5$	Suma în EUR (y)	Procesare Retur $f^{-1}(y) = 5(y - 5)$	Rezultat Retur (RON)
10	$10/5 + 5$	7	$5(7 - 5)$	10
50	$50/5 + 5$	15	$5(15 - 5)$	50
250	$250/5 + 5$	55	$5(55 - 5)$	250
500	$500/5 + 5$	105	$5(105 - 5)$	500
1000	$1000/5 + 5$	205	$5(205 - 5)$	1000

Activitate suplimentară pentru portofoliu

Încearcă să programezi acest calcul în limbajul studiat la Informatică. Observă cum, în programare, funcția inversă este pur și simplu o altă funcție care „desface” operațiile primei funcții în ordine inversă.

Observații:

● **Punctul de plecare al codomeniului:** Pentru 0 RON, prin legea dată, suma în EUR ar fi 5, dar sumă 0 înseamnă că nu are sens transferul și nici aplicarea de comision; domeniul funcției inverse f^{-1} trebuie să conțină orice valoare mai mare decât 5, deoarece nu poți avea un retur mai mic decât comisionul fix.

● **Proprietatea de reflexie:** Reprezintă cu ajutorul unei aplicații digitale puncte ale graficelor funcției și inversei acesteia într-un reper cartezian. Vei remarca faptul că punctul (50, 15) de pe graficul lui f ar corespunde punctului (15, 50) de pe graficul lui f^{-1} , fiind într-o poziție de simetrie față de dreapta de ecuație $y = x$; această simetrie față de prima bisectoare ($y = x$) este „semnătura” grafică a funcțiilor inversabile. Astfel, prin lectură grafică a reprezentării unei funcții surjective, în situația în care curba simetrică față de graficul funcției în raport cu prima bisectoare verifică testul liniei verticale, atunci avem validarea proprietății de inversabilitate.

● **Implementare algoritmică:** pentru a programa un astfel de sistem, ai putea folosi IA pentru a genera teste unitare (Unit Tests); de exemplu, poți cere: *Generează un test în Python care să verifice dacă pentru orice valoare x , $f^{-1}(f(x)) = x$ pentru funcția de conversie valutară.*

Reflecție: Dacă magazinul decide să schimbe comisionul fix de la 5 EUR la 10 EUR, cum se modifică funcția inversă f^{-1} ?



EXERCITII PROPUSE

- Verifică dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$ este inversabilă.
- Determină inversa funcției $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$.
- Se consideră funcția de lege $f(x) = x + 2$, pentru orice x număr real. Calculează $f^{-1}(5)$.
- Dacă $f(1) = 3$ și f este o funcție bijectivă, care este valoarea lui $f^{-1}(3)$?
- Stabilește dacă $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n + (-1)^n$ este inversabilă.
- Determină inversa funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$.
- Verifică faptul că $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{2x}{x+1}$ este inversabilă și determină f^{-1} .
- Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \geq 1 \\ 2x + m, & x < 1 \end{cases}$ să fie bijectivă.
- Precizează domeniul maxim de definiție și codomeniul pentru ca funcția f de lege $f(x) = \sqrt{x - 1}$ să fie inversabilă.
- Determină funcția de gradul I, știind că $f: [0, 1] \rightarrow [1, 4]$ și că este bijectivă.
- Demonstrează că dacă f și g sunt bijective, atunci $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Reprezintă grafic funcția de lege $f(x) = x^2 - 1$ pe $[0, \infty)$ și inversa sa.
- Verifică inversabilitatea pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$.
- a) Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+1}{3}$. Calculează $f \circ g$ și $g \circ f$. Sunt funcțiile f și g inversabile?
b) Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ n + 1, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$. Calculează $f \circ f$ și justifică faptul că f este inversabilă. Care este inversa sa?



15. (Activitate pe grupe: abordare individuală a câte unei funcții, apoi prezentare și discuții la nivel de grup) Arătați că următoarele funcții sunt inversabile, determinând în fiecare caz funcția inversă:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$;

b) $f: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2 - 4x$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 5x - 1, & x \leq 0 \\ -1 + 3x, & x > 0 \end{cases}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0 \\ 1 - x^2, & x < 0 \end{cases}$;

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x+1}{x-2}$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & x \geq 3 \\ x - 1, & x < 3 \end{cases}$;

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} - 2, & x \geq -4 \\ -\sqrt{-x-4} - 2, & x < -4 \end{cases}$.

16. Folosind reprezentările grafice ale inverselor, reprezintă grafic următoarele funcții:

a) $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = \sqrt{x-1}$;

b) $f: [-3, \infty) \rightarrow (-\infty, 2], f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 3 + \sqrt{x-2}, & x \geq 2 \end{cases}$.

17. (Activitate în pereche) Demonstrați că următoarele funcții **nu** sunt inversabile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ 2x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \pi x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

18. Se consideră $f: A \rightarrow B$ o funcție inversabilă, strict monotonă și $y_1, y_2 \in B, y_1 \neq y_2$. Fie $x_1 = f^{-1}(y_1)$ și $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Demonstrează că: a) $\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$; b) f^{-1} este strict monotonă.

19. (Activitate pe grupe) Studiați inversabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (x + y, 2x - y)$. Diferă raționamentul făcut față de cazul funcțiilor de o singură variabilă? Explicați.

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + 1$. Demonstrează că f este inversabilă, folosind reprezentarea grafică realizată cu ajutorul unei aplicații digitale.

21. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ ax, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este bijectivă.

22. Se consideră $f: A \rightarrow A$ o funcție strict crescătoare pe o mulțime finită. Este f inversabilă? Justifică.

23. Rezolvă ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$ în cazul în care $f(x) = \frac{x+1}{2}$, pentru oricare x număr real.

24. (Activitate în pereche) O companie de software dezvoltă un sistem de autentificare pentru un seif digital. Pentru a proteja PIN-urile numerice ale utilizatorilor în baza de date, acestea nu sunt salvate în forma lor originală, ci sunt trecute printr-un algoritm de criptare reprezentat de o funcție matematică. Algoritmul de criptare este definit de funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 24$, unde x reprezintă PIN-ul original ales de utilizator, iar $f(x)$ reprezintă valoarea criptată care se salvează efectiv în baza de date. Pentru ca sistemul să funcționeze corect, acesta trebuie să fie capabil să recupereze PIN-ul original atunci când verifică identitatea utilizatorului. Asta înseamnă că procesul trebuie să fie reversibil.

a) Demonstrați că funcția de criptare f este bijectivă, justificând astfel faptul că decriptarea este posibilă pentru orice valoare și că nu există două PIN-uri diferite care să aibă aceeași valoare criptată.

b) Determinați funcția de decriptare f^{-1} care permite sistemului să afle PIN-ul original x cunoscând valoarea stocată y .

c) *Caz concret:* un hacker reușește să vadă baza de date și găsește valoarea criptată $y = 1\,206$; folosind funcția inversă determinată la punctul anterior, aflați care este PIN-ul original al utilizatorului.

25. Provocare IA: Scrie un algoritm (pseudocod) care primește o listă de perechi (x, y) și verifică dacă acestea pot reprezenta o funcție inversabilă.

Sugestie pentru portofoliu: Caută cum este utilizată funcția inversă în prelucrarea imaginilor (de exemplu, pentru a anula un filtru de luminozitate).



Proprietăți ale funcțiilor. Aplicații și lectură grafică.

Fixare - consolidare - aprofundare



REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

O imagine face cât o mie de cuvinte, dar un grafic bine interpretat face cât o mie de calcule. În activitățile următoare, vei observa că IA este utilizată nu doar pentru a primi răspunsuri, ci și ca pe un *asistent de laborator* care trebuie ghidat și verificat.

Activitatea 1 (Portofoliu interdisciplinar): Paritate și monotonie

Scop: înțelegerea profundă a definițiilor parității și monotoniei prin descrierea lor în limbaj natural și matematic și prin lectură grafică pentru identificarea intervalelor de monotonie și a simetriei graficelor (pare/impare)

Desfășurare:

Faza 1 (individual): Parcurge cu atenție fișa realizată la nivelul clasei de către profesor, conținând exemple de reprezentări grafice (o funcție definită pe ramuri, care prezintă intervale de creștere, descreștere, un punct de maxim local și simetrie față de axa Oy sau față de originea O).

Faza 2 (interacțiune AI): După lectura grafică pe care ai făcut-o pe fișa primită, scrie un prompt (text) pentru IA care să genereze codul Python (*Matplotlib*) pentru a reproduce acel grafic în format digital.

► *Exemplu de prompt greșit:* „Realizează un grafic care urcă și coboară.”

► *Exemplu de prompt corect:* „Generează cod Python pentru o funcție pară, definită pe $[-5, 5]$. Pe intervalul $[0, 2]$ funcția este strict crescătoare, iar pe $[2, 5]$ este constantă” (*informații deduse de tine din lectura graficului primit*).

Faza 3 (verificare): Rulează codul generat (într-un *Google Colab* sau *IDLE*); dacă graficul rezultat nu îl redă pe cel de pe fișă, identifică ce proprietate matematică nu ai specificat corect în prompt.

Concepte vizate:

- funcție pară $\Leftrightarrow$ grafic simetric față de Oy ;
- funcție impară $\Leftrightarrow$ grafic simetric față de O ;
- intervale de monotonie.

Activitatea 2: Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate

Scop: Vizualizarea conceptelor de injectivitate, surjectivitate și bijectivitate, folosind scanarea grafică

Instrumente: un script Python generat de IA

Desfășurare:

Scenariu: Reflectează la un set de 4 funcții reprezentate grafic (dintre cele nesurjective/neinjective) pus la dispoziție de cadrul didactic.

Sarcină pentru IA: Introdu text pentru conversație cu IA: „Generează o animație în Python care deplasează o dreaptă orizontală $y = m$ de jos în sus peste graficul funcției definite prin legea $f(x) = x^3 - x$, unde x este număr real, numărând punctele de intersecție ale dreptei cu graficul în timp real pentru diferite deplasări.”



Analiză (lectura grafică): Urmărește atent animația pentru a stabili dacă funcția este:

► **injectivă:** în cazul în care contorul de intersecții arată vreodată „ > 1 ”, funcția **nu** este injectivă;

► **surjectivă:** în cazul în care contorul arată vreodată „ $= 0$ ” (pentru o valoare din codomeniu), funcția **nu** este surjectivă.

Provocare: Modifică codomeniul (în script sau pe foaie) astfel încât funcția să devină surjectivă.

Colaborare: Comparați la nivelul clasei propunerile de modificare a codomeniului și analizați ce a permis sau ce eroare a intervenit în cazul diferențelor identificate între voi.

Activitatea 3 – Oglinda magică - inversabilitatea

Scop: Evidențierea legăturii dintre bijectivitate și inversabilitate, prin simetrie grafică.

Concepte: Graficul inversei este simetricul graficului funcției față de prima bisectoare ($y = x$).

Desfășurare:

Independent (individual): desenează pe caiet/tabletă un grafic al unei funcții bijective, de exemplu, o funcție discretă (domeniul de definiție format dintr-un număr finit de puncte) sau o curbă simplă.

Realizează o poză pe care s-o încarci într-o aplicație IA multimodală.

Introducere text pentru conversație IA: „Analizează această imagine. Estimează dacă funcția desenată este inversabilă. Dacă da, descrie cum ar arăta graficul inversei acesteia.”

Verificare: Desenează pe aceeași foaie dreapta $y = x$ și „răstoarnă” foaia (sau folosește o oglindă plasată pe bisectoare) pentru a vedea dacă descrierea IA-ului a fost corectă (verificarea simetriei față de prima bisectoare).

Discuție (la nivelul clasei): De ce funcțiile strict monotone sunt „candidați buni” pentru inversabilitate?



Activitatea 4 (studiu de caz pe date reale): Convexitate, concavitate

Scop: Identificarea pe reprezentări grafice a convexității, folosind definiția cu coarde (segmente).

Desfășurare:

Context: Identifică date accesibile de pe internet sau pagini web de specialitate, care sunt reprezentate grafic, pentru a vizualiza evoluția prețului unei acțiuni sau a unei criptomonede pe o perioadă de o lună (un grafic volatil).

Sarcină de lucru: Identifică intervalele corespunzătoare ale graficului pentru convexitate (*smiley face*, $\cup$) și/sau concavitate (*sad face*, $\cap$).

Validare matematică prin lectură grafică: Alege două puncte A și B pe grafic. Verifică în care situații te afli pentru a decide tipul curbării: dacă segmentul $[AB]$ este situat *deasupra* arcului de grafic, funcția are cu certitudine și zone de *convexitate* pe porțiunea dintre cele două puncte; dacă segmentul $[AB]$ este *sub* grafic, funcția are cu certitudine și zone de *concavitate* pe porțiunea dintre cele două puncte.

Reflecție de grup: De ce dacă ne raportăm doar la o pereche de puncte distincte ale graficului unei funcții, chiar dacă graficul cuprins între acest două puncte se află complet sub segmentul determinat de acestea nu avem certitudinea păstrării convexității pe porțiunea studiată?

Activitatea 5: Compresia datelor

Concepte vizate: injectivitate/neinjectivitate; compunerea funcțiilor

Obiect de analiză: formate de imagini (JPEG vs. PNG), arhivarea datelor

Context: În filmele polițiste, detectivii iau o imagine obținută în format digital de pe o cameră de supraveghere, apasă butonul *Enhance* prin care prelucrează imaginea „îmbunătățind-o” în sensul în care să se vadă detalii (de exemplu, fața celui urmărit). În această activitate, vei justifica matematic de ce acest lucru este imposibil dacă funcția de compresie nu este bijectivă (de această dată fără sprijinul IA).

Desfășurare:

Definirea funcției de compresie (Lossy): Imaginează-ți o imagine alb-negru unde culorile sunt numere de la 0 la 255. Pentru a salva spațiu, se utilizează o funcție de „rotunjire” (quantizare): $f: \{0, 1, \dots, 255\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 25\}$, $f(x) = \lfloor x/10 \rfloor$. Exemplu: culorile 50, 51, ..., 59 devin toate „5”.

Analiza matematică: Este funcția injectivă? Nu. $f(52) = 5$ și $f(58) = 5$. Mai multe nuanțe originale devin aceeași nuanță comprimată. Este funcția inversabilă? Nu.

Provocare: Primești valoarea comprimată $y = 5$. Sarcina este: „Găsește culoarea originală exactă (x).” Răspuns: Imposibil. x poate fi orice număr din $\{50, 51, \dots, 59\}$. Informația s-a pierdut ireversibil.

Comparația cu «Lossless» (PNG/ZIP): Studiază o funcție bijectivă de codificare, de exemplu $g(x) = 255 - x$ (care are ca scop inversarea culorilor). În acest caz, dacă știi rezultatul, poți afla exact intrarea.

Integrare IA și reflecție de grup: Introdu următorul text într-o conversație cu IA: „De ce instrumentele moderne de Upscaling (DLSS, Super Resolution) par să ghicească detaliile? Este matematic corect sau este o halucinație statistică?” (răspunsul leagă probabilitățile de funcțiile surjective). Comparați răspunsurile returnate de IA-urile utilizate și formulați ipoteze asupra eventualelor diferențe de răspuns (de exemplu, ce a condus IA către aceste diferențe).

Activitatea 6: Distorsiunea și mărginirea

Concepte vizate: funcții mărginite, funcții definite pe ramuri (funcții acoladă), continuitate (lectură grafică)

Obiect de analiză: înregistrări audio, concerte (fenomenul de „clipping” sau distorsiune)

Context: Ești inginer de sunet pentru o trupă. Microfonul poate capta semnale doar între -5 și $+5$ decibeli. Dacă solistul țipă prea tare (input 10), echipamentul nu poate scrie «10», ci taie semnalul la maximul posibil. Aceasta este mărginirea.

Desfășurare:

Modelare matematică: Observă legea funcției care modelează un astfel de limitator (Limiter/Clipper):

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x > 5 \\ x, & -5 \leq x \leq 5. \\ -5, & x < -5 \end{cases}$$

Lectură grafică (vizualizarea sunetului): Cu ajutorul unei aplicații digitale, reprezintă graficul dreptei $y = x$ (corespunzătoare situației de *semnal curat*), apoi suprapune graficul funcției f . Observă cum vârfurile graficului lui f sunt „tăiate” (retezate), devenind platouri orizontale. Ce semnificație în context poți asocia acestei situații?

Experiment auditiv: Cu ajutorul unei aplicații digitale sau ca cerință pentru IA, generează o *sinusoidă* (sunet pur) și cere IA să-i aplice această funcție f (distorsiune). Vei auzi cum sunetul devine distorsionat.

Reflecție asupra proprietăților:

Este această funcție surjectivă pe $\mathbb{R}$? Este injectivă?

Atenție la integrarea IA: Nu lăsa IA-ul să rezolve problema (cerându-i direct „Rezolvă exercițiul 5”). Folosește IA ca generator de informație cu rol de sprijin în învățare (exemplu de cerere: „Generează o serie de grafice, unele pentru funcții surjective, altele care nu reprezintă funcții surjective, pentru a mă verifica dacă am înțeles legătura dintre proprietatea exprimată algebric și forma graficului. Le voi alege pe cele corespunzătoare surjectivității pentru a primi validare sau pentru a explica de ce alegerea nu este corectă”). Astfel, devii evaluator al informației, dezvoltându-ți competența de gândire critică.



B. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

Rolul funcției de gradul al doilea în descrierea variației neliniare



REFLECȚIE

Poate o funcție liniară să descrie un fenomen/proces care mai întâi crește, apoi descrește?

În clasele anterioare a fost introdusă noțiunea de funcție și s-a studiat funcția afină, ca prim model matematic potrivit pentru situații în care o mărime păstrează o aceeași rată de creștere sau descreștere. De exemplu, dacă distanța (d) parcursă de un autoturism este direct proporțională cu timpul (t), relația dintre aceste mărimi poate fi descrisă printr-o lege de tipul $d(t) = a \cdot t + b$.

Există numeroase situații reale în care evoluția unei mărimi nu este liniară.



EXEMPLE

1. Mișcarea verticală a unei mingi aruncate în sus, sub acțiunea atracției gravitaționale

Înălțimea la care se situează mingea crește după lansare, atinge o valoare maximă, apoi descrește până la revenirea la sol.

Model matematic (aruncare pe verticală)

Dacă notăm cu t timpul de la lansarea mingii de la nivelul solului până la revenirea sa la sol și cu h înălțimea la care se situează mingea, atunci relația dintre aceste mărimi poate fi scrisă, într-un model simplificat, sub forma $h(t) = at^2 + bt + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a < 0$.

Interpretare

- coeficientul $a < 0$ este caracteristic pentru exemplul reprezentat în imagine și determină caracterul pătratic al dependenței dintre cele două mărimi (timp – distanță); valoarea negativă a coeficientului a reflectă faptul că accelerația gravitațională este orientată în sens opus creșterii înălțimii;

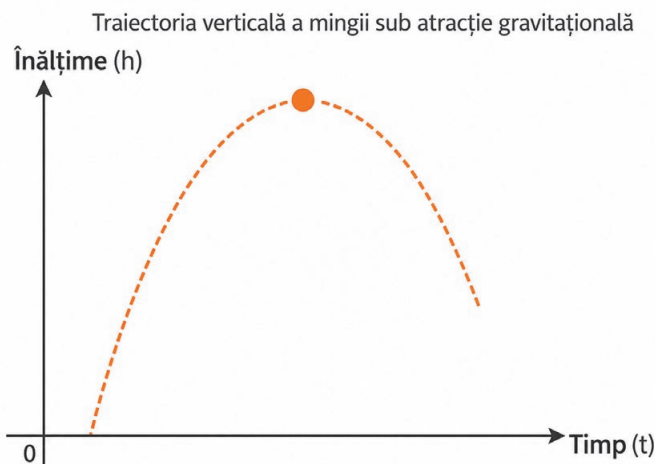
- intervalul de timp pentru care studiem dependența este determinat de momentul lansării mingii de la nivelul solului până la revenirea sa la sol;

- momentele de timp când mingea este la sol corespund soluțiilor ecuației $h(t) = 0$;

- există un moment de timp căruia îi corespunde o valoare maximă a înălțimii, până la acel moment înregistrându-se o evoluție crescătoare a înălțimii, apoi o evoluție descrescătoare a acesteia;

- la momente diferite de timp se poate înregistra o aceeași înălțime la care se va situa mingea pe traiectoria sa.

Reflecție: Dacă mingea ar fi aruncată sub un anumit unghi față de orizontală, mișcarea sa ar putea fi descrisă prin două funcții, una pentru deplasarea pe orizontală și alta pentru deplasarea pe verticală. Eliminând timpul dintre aceste două relații, obținem o nouă relație care descrie traiectoria mingii în plan.



2. Costul unei deplasări în funcție de viteză

Un autoturism parcurge o distanță fixă; costul total al deplasării depinde de viteza medie: la viteze foarte mici, motorul funcționează ineficient → consum mare; la viteze foarte mari, rezistența aerului crește → consum mare; există o viteză optimă la care costul este minim.

Model matematic:

Notăm prin x viteza medie (km/h) și prin C costul deplasării (lei). Într-un model simplificat, dependența dintre cost și viteză poate fi exprimată printr-o funcție de forma $C(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a > 0$. **Caz particular:** $C(x) = 0,02x^2 - 2x + 80$, unde $x \in (0, 100)$.

Observă următorul tabel de valori și formulează trei ipoteze privind comportamentul costului în raport cu valorile vitezei medii:

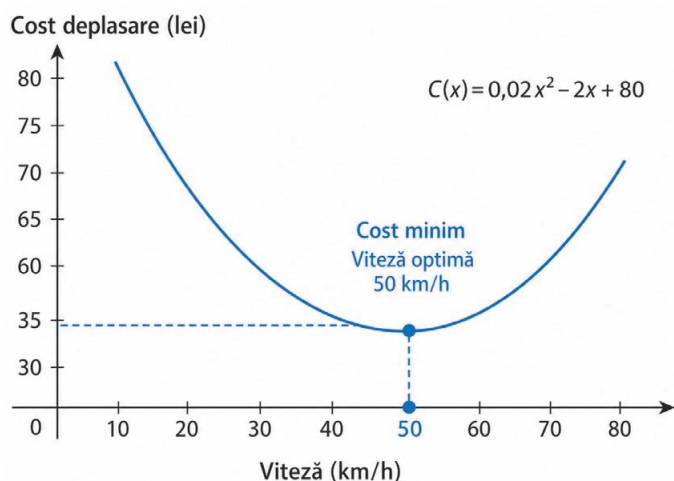
x - viteză (km/h)	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
C - cost deplasare (lei)	48	42,5	38	34,5	32	30,5	30	30,5	32	34,5	38	42,5	48

Interpretare

- $a > 0$ (în particular $a = 0,02$) este propriu unui model de dependență pătratică pentru care se înregistrează punct de minim;
- la viteze medii foarte mici sau foarte mari, costul deplasării este mare;
- există o viteză medie optimă pentru care costul deplasării devine minim și orice viteză medie mai mică sau mai mare conduce la un cost mai ridicat.

Concluzie: Astfel de comportamente descrise în situațiile prezentate anterior nu mai corespund unor dependențe liniare, ci corespund unui nou model matematic, care permite existența unui *punct de maxim* sau de *minim*. Acest model este oferit de **funcția de gradul al doilea**.

În exemplele analizate, relația dintre mărimi a fost descrisă prin *expresii algebrice care conțin variabila ridicată la puterea a doua, aceasta fiind puterea cea mai mare la care este prezentă variabila*. Exemplele studiate au avut forme de tipul $h(t) = at^2 + bt + c$ și $C(x) = 0,02x^2 - 2x + 80$. Toate aceste legi au o structură comună: $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu variabila independentă x , variabila f dependentă de x , cu coeficienții a, b și c , unde $a \neq 0$ (pentru ca termenul de gradul al doilea să fie prezent).



Ecuția de gradul al doilea. Relațiile lui Viète



REFLECTIE

Pe parcursul învățării matematicii, ecuațiile au apărut într-o formă intuitivă încă din primii ani de studiu, ca răspuns la întrebări de tipul „Cât plus 3 ne dă 10?”, care, odată cu apariția calculului cu litere, s-a tradus în relații de tipul „ $x + 3 = 10$ ”. Pornind de la analogia cu balanța, pentru rezolvarea ecuațiilor de *gradul I* sau reducibile la acestea, s-au utilizat proprietăți ale relației de egalitate care, aplicate în contextul de rezolvare, reprezentau *transformări prin echivalență*, de tipul: adunarea/scăderea din ambii membri cu o aceeași valoare, înmulțirea/împărțirea ambilor membri cu o aceeași valoare nenulă.

Astfel, ecuațiile de gradul I, de formă generală $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, admit ca unică soluție $x = -\frac{b}{a}$. Ținând cont de proprietatea produsului de numere reale egal cu 0 și că ecuațiile de forma $x - m = 0$ au soluție unică pe $\mathbb{R}$, poți da exemplu de ecuație care admite două soluții distincte?

În cele ce urmează, pornind de la forma generală sau canonică a funcției de gradul al doilea, ne vom referi la ecuațiile de gradul al doilea folosindu-ne de faptul că nu este prima oară când le întâlnim, dar abordându-le într-un context structurat, mai amplu.

Ecuația de gradul al doilea

Considerăm ecuația de gradul al doilea dată pe forma generală: $ax^2 + bx + c = 0$ (1), cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$. Folosind notația $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ – delta) pentru *discriminantul ecuației*, obținem:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left(\underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

Pentru $a \neq 0$, ecuația (1) este echivalentă cu ecuația $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ (2). Cum membrul stâng este mai mare sau egal cu 0, rezolvarea ecuației (2) necesită o discuție după semnul discriminantului:

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
ecuația nu admite soluții în $\mathbb{R}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ admite o singură soluție reală	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ admite două soluții reale și distincte
-	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$S = \emptyset$	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}, \text{card}S = 1$	$S = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}, \text{card}S = 2$



EXEMPLE ȘI REFLECȚIE

a) $5x^2 + 4x - 33 = 0, x \in \mathbb{R}$. Ecuația este dată pe formă generală, unde $a = 5, b = 4, c = -33$; $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-33) = 4 \cdot 169 = (2 \cdot 13)^2 = 26^2 > 0$, deci ecuația admite două soluții reale și distincte:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 26}{10} = \begin{cases} \frac{-30}{10} = -3 \\ \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \end{cases}; S = \left\{ -3, \frac{11}{5} \right\}.$$

b) $4x^2 + 1, (4)x + 0, (1) = 0, x \in \mathbb{R}$. Ecuația este dată pe formă generală, dar coeficienții sunt numere raționale exprimate în fracții zecimale periodice. Pentru calcul, ca etapă suplimentară, exprimăm coeficienții ca fracții ordinare:

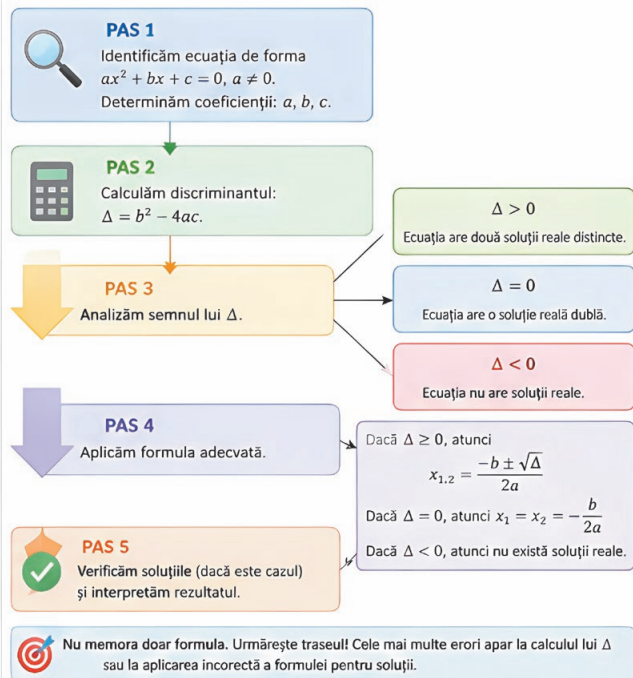
$$4x^2 + \frac{14-2}{9}x + \frac{1}{9} = 0 \cdot 9 \Leftrightarrow 36x^2 + 12x + 1 = 0$$

de unde $a = 36, b = 12, c = 1$; $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1 = 10$,

deci $x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{72} = -\frac{1}{6}$; $S = \left\{ -\frac{1}{6} \right\}$. *Explică de ce!*

Într-un astfel de caz ($\Delta = 0$) putem reține că ecuația se poate reduce la formă pătratică, membrul stâng reprezentând dezvoltarea unui binom la pătrat: $36x^2 + 12x + 1 = (6x)^2 + 2 \cdot (6x) + 1 = (6x + 1)^2$.

STRATEGIA DE REZOLVARE A UNEI ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA



c) $-x - 4 - 3x^2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ecuația nu este dată pe formă generală (*ordinea termenilor!*) și este de preferat să înmulțim ambii membri cu (-1) , pentru a evita posibile erori de calcul, și să reordonăm termenii: $-x - 4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - x - 4 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow 3x^2 + x + 4 = 0$; rezultă $a = 3$, $b = 1$, $c = 4$; $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -47 < 0$; ecuația nu admite soluții reale, deci $S = \emptyset$.

d) $x^2(3 - 2\sqrt{2}) - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ecuația este dată pe forma generală, unde $b = 0$, fiind echivalentă cu $x^2 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$, fiind important pentru calcule să rescriem $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$. Finalizează rezolvarea!

Prin ce diferă rezolvarea ecuației $x^2(3 - 2\sqrt{2}) + 1 = 0$? Justifică.

e) $4052x^2 + 1013 = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Prin factorizare obținem $1013x(4x + 1) = 0$. Finalizează!

f) $\pi x^2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Este aceasta o ecuație de gradul al doilea? Justifică!

Relațiile lui Viète. Forma factorizată a ecuațiilor de gradul al doilea



REFLECȚIE

Cunoaștem o ecuație de gradul al doilea, sub forma sa generală, prin fiecare dintre coeficienții săi și spunem că este *determinată* de aceștia (este unică, în această formă). Pentru o astfel de ecuație, determinată, am prezentat metodele de rezolvare prin care obținem *mulțimea soluțiilor*. Ne întrebăm acum: *știind soluțiile unei ecuații de gradul al doilea, determină aceste ecuația, în sensul în care este unică?*

A ști soluțiile unei ecuații înseamnă a ști valorile (toate) care verifică această ecuație. În cazul ecuațiilor de gradul al doilea, în notația standard a coeficienților și a soluțiilor și admitând că soluțiile există, cum $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ (pentru $\Delta \geq 0$), obținem prin sumarea și produsul lor $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (suma soluțiilor) și $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (produsul soluțiilor), reprezentând *relațiile lui Viète*.



OBSERVAȚII

- Ambele relații ale lui Viète reprezintă legături dintre soluțiile unei ecuații de gradul al doilea și coeficienții acesteia, în cazul $\Delta \geq 0$.
- Pe baza acestor relații, cunoscând coeficienții ecuației de gradul al doilea, în condiția $\Delta \geq 0$, avem informații despre suma și produsul soluțiilor, fără a fi nevoie de a afla fiecare soluție.

Considerăm $ax^2 + bx + c = 0$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0$ și $\Delta \geq 0$. În aceste condiții, prin prelucrare algebrică, obținem:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$



PROPRIETATE

Ecuațiile de gradul al doilea cu coeficienți reali, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, care admit soluțiile reale x_1 și x_2 , sunt de forma $a(x^2 - Sx + P) = 0$, cu $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, unde $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 x_2$.



REȚINEM

- cunoscând soluțiile pentru o ecuație de gradul al doilea, acestea reprezintă soluții nu doar pentru o ecuație, ci pentru o *familie de ecuații* ce depind de un parametru (a);
- ca procedee, știind x_1 și x_2 :
 - fie calculăm $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 x_2$ și obținem o primă ecuație, $x^2 - Sx + P = 0$ (numită și *ecuație monică*), apoi toate ecuațiile care admit aceste soluții, prin înmulțire cu $a \neq 0$, de forma $a(x^2 - Sx + P) = 0$;
 - fie utilizăm *forma factorizată a ecuației*, $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, de unde, prin prelucrare algebrică o aducem la formă generală;

● pentru *orice* două numere reale, există o *infinitate* de ecuații de gradul al doilea pentru care perechea de numere corespunde perechii de soluții a ecuațiilor;

● pentru a determina o *anume* ecuație de gradul al doilea, știind soluțiile sale, este necesar să existe suplimentar încă o informație (condiție) care să permită determinarea valorii lui a .

Atenție: Pentru orice două numere reale au sens S și P , dar nu pentru orice două numere reale S și P există o pereche de numere reale care adunate dau S și înmulțite dau P !

Căruia caz de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea corespund $S = P = 1$?



EXERCITII PROPUSE

A.

1. Stabilește care dintre ecuațiile de gradul al doilea următoare admit ca soluție valoarea 2.

- a) $x^2 + 2x - 8 = 0$; b) $5x^2 - 3x - 2 = 0$;
c) $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$; d) $x^2 + 2x + 3 = 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale, rezolvă ecuațiile de gradul al doilea:

- a) $x^2 - x - 6 = 0$; b) $-2x^2 - x + 1 = 0$; c) $x^2 + x + 1 = 0$; d) $x^2 - x + 0,25 = 0$;
e) $2026x^2 + 2026x - 2026 = 0$; f) $(1 - 2x) \cdot (4x + 1) = 0$;
g) $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 2 + \sqrt{2} = 0$.

3. Determină ecuațiile de gradul al doilea cu coeficienți reali, în fiecare dintre situațiile următoare:

- a) admit soluțiile 1 și -4; b) admit soluțiile 5 și -5; c) admit soluțiile -3 și $-\sqrt{3}$;
d) admit soluțiile $2 - \sqrt{6}$ și $2 + \sqrt{6}$; e) admit soluțiile 3 și $\frac{1}{3}$.

4. În fiecare dintre situațiile următoare, determină ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali, știind că:

- a) admite soluțiile -2 și -3, iar coeficientul dominant este egal cu -1;
b) admite soluții egale cu $1 - \sqrt{7}$ și suma coeficienților este egală cu $\sqrt{7}$.

5. În notațiile S și P asociate relațiilor lui Viète, în contextul rezolvării ecuațiilor de gradul al doilea, interpretează fiecare dintre cazurile: a) $S^2 < 4P$; b) $S^2 = 4P$; c) $S^2 > 4P$.

B.

6. **Activitate pe grupe:** Se consideră $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ și ecuația de gradul al doilea $(m - 1)x^2 + mx + 1 = 0$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$. Discutați și rezolvați următoarele cerințe:

- a) Rezolvați ecuația pentru cazul $m = 2$.
b) Determinați valorile lui m pentru care ecuația admite printre soluții și valoarea $\sqrt{2}$, apoi determinați și cealaltă soluție.
c) Există vreo valoare a lui m pentru care se admite soluție egală cu 0? Justificați.
d) Rezolvați ecuația și discutați în funcție de semnul discriminantului Δ ; în cazul în care există soluții, depind acestea de m ?
e) În cazul în care există soluții, verificați că suma soluțiilor este egală cu $\frac{m}{1 - m}$ și că produsul soluțiilor este egal cu $\frac{1}{m - 1}$.
f) Determinați valorile întregi ale lui m pentru care ecuația admite soluțiile întregi.

7. **Activitate pe grupe:** Caracterizați proprietățile coeficienților reali ai ecuației $x^2 + px + q = 0$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, știind că aceasta admite soluțiile:

- a) $x_1 = x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; b) $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; c) $x_1 = \alpha$, $x_2 = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

8. **Activitate în pereche:** Determinați ecuațiile de gradul al doilea cu *coeficienți raționali*, știind că admit o soluție egală cu $\sqrt{3}$. Aceeași cerință pentru cazul în care ecuațiile admit soluția $\sqrt{2} - 1$.



Definiția funcției de gradul al doilea. Formă generală și formă canonică



REFLECȚIE

Studiul evoluției unui fenomen sau proces descris printr-o funcție este complex, reunind o serie de caracteristici punctuale, locale sau globale. Luând ca model o funcție studiată anterior (de exemplu, funcție de gradul I), ce ar însemna o caracteristică: a) punctuală; b) locală?; c) globală?

În cele ce urmează, pornind de la definiția analitică a funcției de gradul al doilea, ne propunem să aflăm cum anume legea implică o serie de proprietăți prin care caracterizăm procesele sau fenomenele modelate.



DEFINIȚIE

În cazul în care $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ (1) se numește **funcție de gradul al doilea cu coeficienți reali**.



EXEMPLE

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + x + 2$ este funcție de gradul al doilea, cu coeficienții $a = -1, b = 1, c = 2$;
- b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x^2 - 1$ este funcție de gradul al doilea, cu coeficienții $a = 4, b = 0, c = -1$;
- c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (m - 1)x^2 - (1 - m)x + 2m - 1$ este funcție de gradul al doilea pentru orice $m \in \mathbb{R} - \{1\}$, cu coeficienții $a = m - 1 \neq 0, b = -(1 - m), c = 2m - 1$; *ce tip de funcție se obține pentru cazul $m = 1$?*



REȚINEM

Funcțiile de gradul al doilea reprezintă o nouă clasă de funcții numerice.



PROPRIETATE

Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, legea $f(x) = ax^2 + bx + c$ se rescrie în **formă canonică**:

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (2)$$

Consecințe: Relația (2) este echivalentă cu

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \text{ sau } f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$



Graficul funcției de gradul al doilea. Reprezentare geometrică.



REFLECȚIE

Ce informații despre o funcție pot fi „văzute” imediat din reprezentarea geometrică a graficului, fără a mai necesita calcule algebrice?

În cele ce urmează, pornind de la forma generală sau canonică a funcției de gradul al doilea, ne propunem să „desenăm” graficele funcțiilor de gradul al doilea și să caracterizăm acest tip de funcții pe baza reprezentării graficului.

Graficul funcției de gradul al doilea

Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0$, graficul funcției de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sau, echivalent, $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} = \{(x, ax^2 + bx + c) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

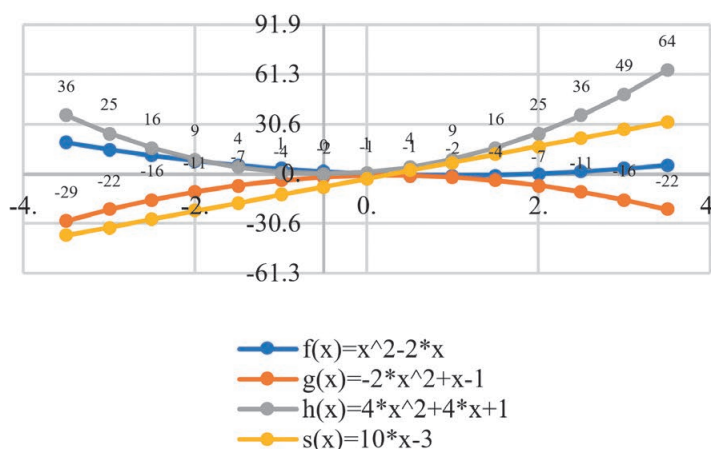
Exemplu: Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - x + 6$. Pentru această funcție, $G_f = \{(x, -x^2 - x + 6) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Spre exemplificare, în acest produs cartezian se află perechile ordonate $(2, 0)$, $(-2, 8)$, $(\pi, -\pi^2 - \pi + 6)$, dar nu se află $(2, 5)$, $(0, 0)$.

Reprezentarea geometrică a graficului funcției de gradul al doilea

În contextul funcțiilor de gradul I, reprezentarea grafică a graficului unei astfel de funcții consta într-o dreaptă și, pentru determinarea acesteia, era suficientă cunoașterea a două perechi ordonate ale graficului. Având în vedere comportamentul funcțiilor de gradul al doilea, mai complex, pentru realizarea reprezentării grafice nu mai sunt suficiente doar două puncte. În imaginea următoare, realizată automat cu aplicația *Excel*, se poate observa cum se distribuie o serie de puncte ale graficelor a trei legi neliniare și o lege liniară, pentru abscise cuprinse în intervalul $[-4, 4]$.

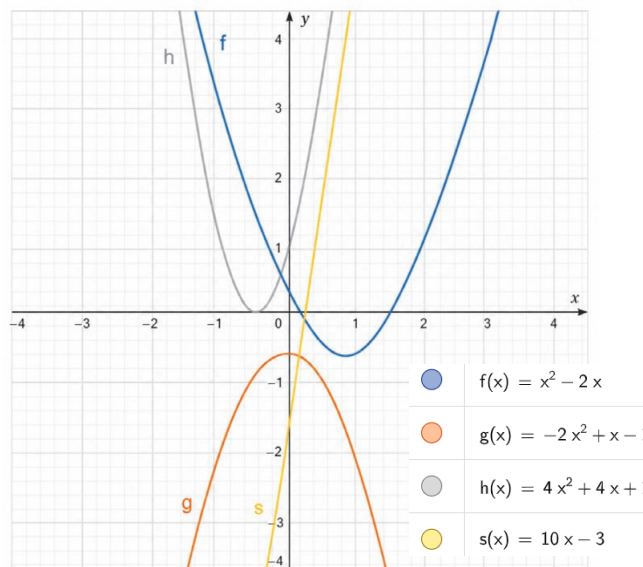
x	$f(x)=x^2-2*x$	$g(x)=-2*x^2+x-1$	$h(x)=4*x^2+4*x+1$	$s(x)=10*x-3$
-3.5	19.25	-29	36	-38
-3	15	-22	25	-33
-2.5	11.25	-16	16	-28
-2	8	-11	9	-23
-1.5	5.25	-7	4	-18
-1	3	-4	1	-13
-0.5	1.25	-2	0	-8
0	0	-1	1	-3
0.5	-0.75	-1	4	2
1	-1	-2	9	7
1.5	-0.75	-4	16	12
2	0	-7	25	17
2.5	1.25	-11	36	22
3	3	-16	49	27
3.5	5.25	-22	64	32

Reprezentări ale graficelor funcțiilor f , g , h și s



Există și alte aplicații digitale care permit generarea automată de reprezentări grafice. Pentru aceleași legi cum sunt cele utilizate în aplicația *Excel*, în imaginea alăturată este evidențiată reprezentarea geometrică. În acest caz, a fost suficient să introducem legile pentru ca aplicația să genereze complet și fidel reprezentările asociate acestora, fără a se limita la un set de valori predefinite. Cum măsurile pe ambele axe sunt identice, desenele modelează corect realitatea, față de situația prezentată prin aplicația *Excel*.

Astfel, pentru cele 3 legi f , g și h , regăsim corespondența cu reprezentările modelării situațiilor practice de la începutul capitolului dedicat funcțiilor de gradul al doilea, precum și cu proprietățile acestor funcții, deduse din forma algebrică sau canonică.





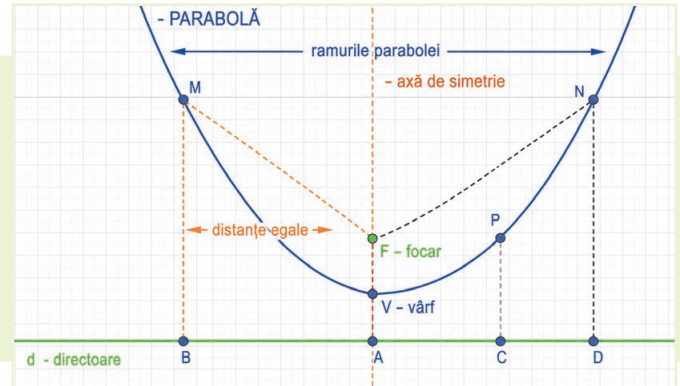
OBSERVAȚIE

Cu excepția poziționării față de axele de coordonate și a orientării, forma reprezentării geometrice a graficului funcției de gradul al doilea este *invariantă*, nemaifiind de tip dreaptă, ci de tip curbă. În plan, dacă dreapta reprezintă mulțimea tuturor punctelor coliniare cu două puncte distincte care o determină, reprezentarea funcțiilor de gradul al doilea corespunde unei configurații geometrice plane de tip curbă.



DEFINIȚIE

Mulțimea tuturor punctelor din plan cu proprietatea că fiecare este situat la egală distanță față de un punct fix (*focar*) și o dreaptă fixă (*directoare*) se numește *parabolă*. Parabola admite un *vârf* (*V*) și o *axă de simetrie* care conține vârful și care împarte parabola în *două ramuri* simetric dispuse față de axă.



PROPRIETATE

Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții de gradul al doilea cu coeficienți reali este de tip parabolă.

Reprezentarea prin puncte a parabolei asociate funcției de gradul al doilea

Am prezentat anterior aplicații digitale pe care le putem folosi pentru reprezentarea grafică a unor baze de date numerice și a graficelor de funcții. Însă, reprezentarea o putem face și fără ajutorul tehnologiei. În continuare, pentru reprezentarea geometrică a graficului unei funcții de gradul al doilea vei utiliza cele învățate anterior privind acest tip de funcții și este util să îți reamintești și următoarele:

- reprezentarea se realizează în plan, în care am fixat un reper cartezian xOy , format din axa absciselor, $Ox = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, respectiv axa ordonatelor, $Oy = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$;
- în raport cu reperul xOy : orice dreaptă orizontală (perpendiculară pe Oy) are proprietatea că orice punct al său îndeplinește condiția $y = c$ și $x \in \mathbb{R}$, unde c reprezintă o constantă reală; orice dreaptă verticală (perpendiculară pe Ox) are proprietatea că orice punct al său îndeplinește condiția $x = c$ și $y \in \mathbb{R}$, unde c reprezintă o constantă reală.

Proprietăți ale funcției de gradul al doilea. Interpretare geometrică. Tabele de variație

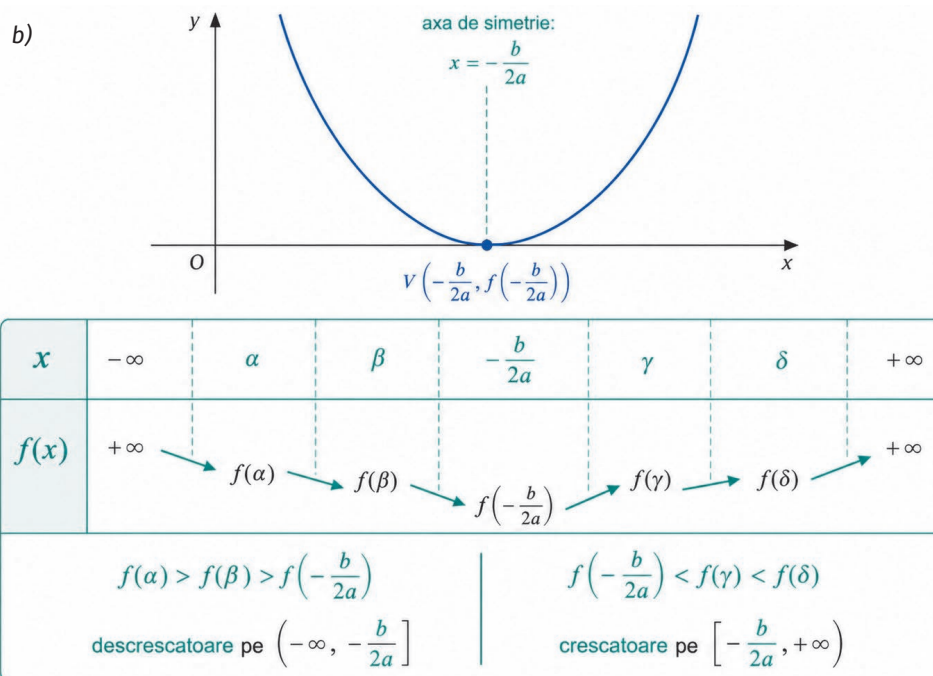
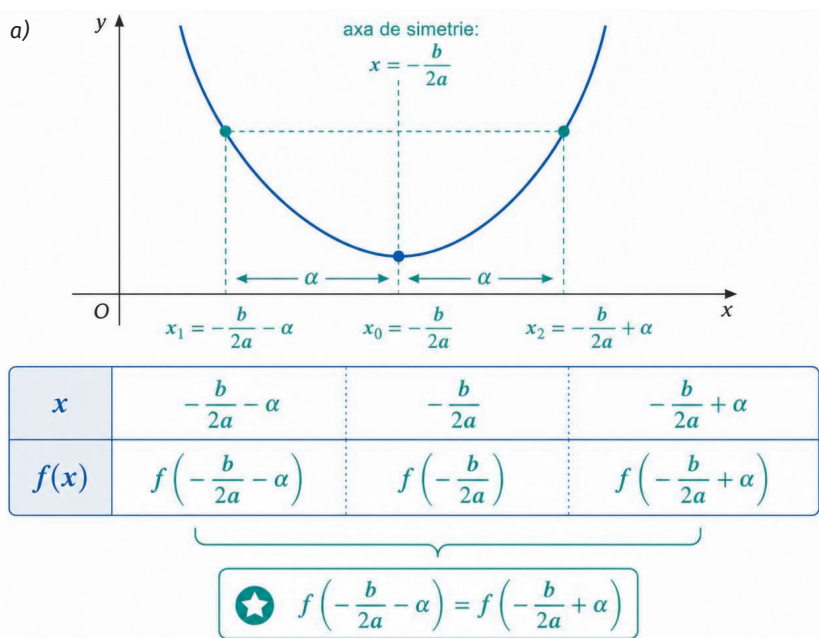


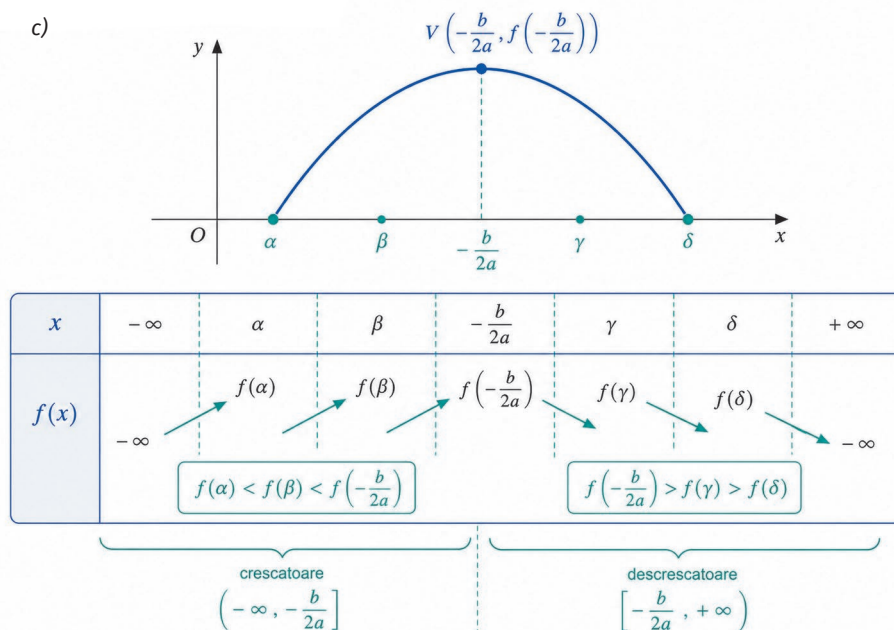
REFLECȚIE

Pentru funcțiile de gradul al doilea, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, folosind fie forma generală $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, fie forma canonică, verifică și dă o interpretare următoarelor afirmații:

- $f\left(-\frac{b}{2a} - \alpha\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + \alpha\right)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0$, respectiv oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$;
- oricare ar fi $a > 0$, raportul $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$ este strict pozitiv pentru oricare $\alpha, \beta \geq -\frac{b}{2a}$, $\alpha \neq \beta$, și este strict negativ pentru oricare $\alpha, \beta \leq -\frac{b}{2a}$, $\alpha \neq \beta$;
- oricare ar fi $a < 0$, raportul $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$ este strict pozitiv pentru oricare $\alpha, \beta \leq -\frac{b}{2a}$, $\alpha \neq \beta$, și este strict negativ pentru oricare $\alpha, \beta \geq -\frac{b}{2a}$, $\alpha \neq \beta$.

Observă imaginile următoare în care este vizualizată interpretarea geometrică a proprietăților pe care le-ai verificat algebric la punctele a), b) și c), precum și integrarea informațiilor în format tabelar (tabel de valori sau tabel de variație):





OBSERVAȚIE

Transpunerea funcțiilor de gradul al doilea din *forma generală* în *forma canonică* permite justificarea mai simplă a unora dintre proprietățile funcțiilor de gradul al doilea. În fapt, forma canonică grupează termenii care conțin variabila funcției într-un binom la pătrat, ale cărui valori sunt mai mari sau egale cu 0, oricare ar fi valorile variabilei funcției. În acest sens, *forma canonică* permite identificarea a șase cazuri în care se încadrează funcțiile de gradul al doilea, determinate de:

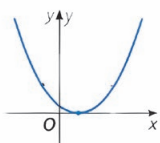
- semnul coeficientului dominant, $a: a > 0, a < 0$;
- semnul discriminantului, $\Delta = b^2 - 4ac: \Delta < 0, \Delta = 0, \Delta > 0$.

4. CUM INFLUENȚEAZĂ COEFICIENTUL a FORMA PARABOLEI?

1. Semnul lui a – orientarea parabolei

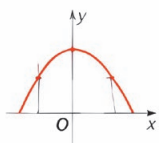
$a > 0$

Parabola este orientată în sus.



$a < 0$

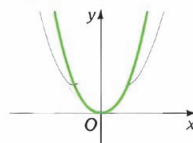
Parabola este orientată în jos.



2. Valoarea lui $|a|$ – „deschiderea” parabolei

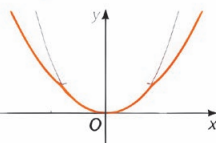
$|a|$ mare

Parabola este mai îngustă (mai „închisă”).



$|a|$ mic

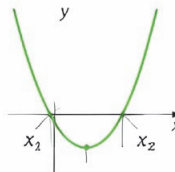
Parabola este mai largă (mai „deschisă”).



3. LEGĂTURA DINTRE Δ ȘI GRAFIC

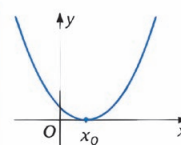
$\Delta > 0$

Parabola taie axa Ox în două puncte distincte.
Ecuatia are două soluții reale distincte.



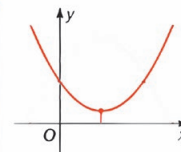
$\Delta = 0$

Parabola atinge axa Ox într-un singur punct.
Ecuatia are o soluție reală dublă.



$\Delta < 0$

Parabola nu intersectează axa Ox.
Ecuatia nu are soluții reale.

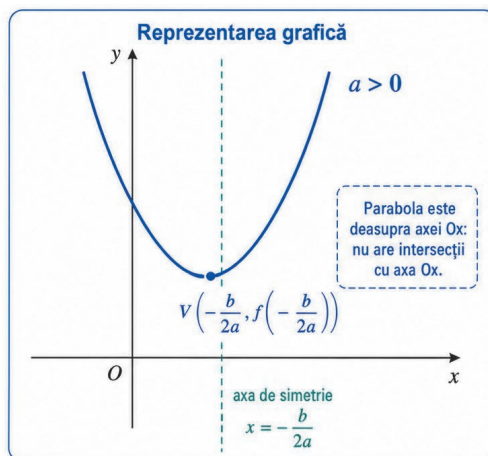


$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$

Cazul 1. $a > 0, \Delta < 0$

$$f(x) = \underbrace{a}_{>0} \cdot \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0} \right] > 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$



Forma canonică

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Interpretarea semnului

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

$$+ \quad -\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \quad \text{deoarece } \Delta < 0 \text{ și } a > 0 \Rightarrow 4a^2 > 0$$

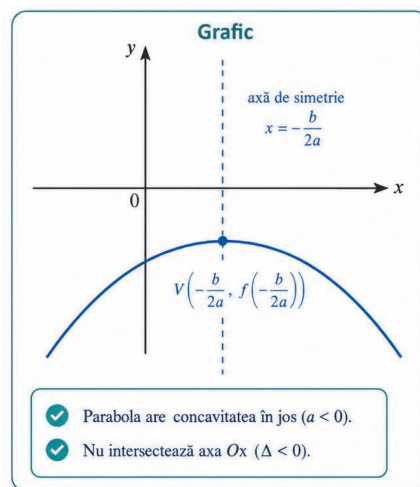
$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] > 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{deoarece } a > 0 \quad \boxed{f(x) > 0} \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Cazul 2. $a < 0, \Delta < 0$

$$f(x) = \underbrace{a}_{<0} \cdot \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0} \right] < 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$



Forma canonică

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Interpretarea semnului

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \quad + \quad -\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \quad \text{deoarece } \Delta < 0 \text{ și } a^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \quad \cdot \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

$$\boxed{f(x) < 0} \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Consecința 1.

În **cazul 1** ($\Delta < 0$ și $a > 0$):

a) f este pozitivă ($f > 0$), adică $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$; în acest caz, f are semn constant și semnul funcției este „+”;

b) $\text{Im}f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$;

c) cea mai mică valoare a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a}$, deci funcția admite ca minim această valoare (admite un extrem de tip minim); cum $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, minimul se realizează în punctul $x = -\frac{b}{2a}$ (punct de minim);

d) funcția nu admite o cea mai mare valoare (maxim);

e) funcția este mărginită inferior de $-\frac{\Delta}{4a}$ și nemărginită superior;

f) oricare ar fi $\alpha, \beta \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \stackrel{\text{not}}{=} I_1$, cu $\alpha < \beta$, este îndeplinită condiția $f(\alpha) > f(\beta)$, deci funcția f este *strict descrescătoare* pe acest interval ($f \searrow$ pe I_1), respectiv oricare ar fi $\alpha, \beta \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \stackrel{\text{not}}{=} I_2$, cu $\alpha < \beta$, este îndeplinită condiția $f(\alpha) < f(\beta)$, deci funcția este *strict crescătoare* pe acest interval ($f \nearrow$ pe I_2), unde $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}$ și $I_1 \cap I_2 = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; în aceste condiții, funcția *nu este monotonă* (pe domeniul de definiție, $\mathbb{R}$), dar este *monotonă pe intervale* (numite *intervale de monotonie*);

g) $\text{Im} f \subset \mathbb{R}$ și $\text{Im} f \neq \mathbb{R}$ (imaginea funcției nu coincide cu codomeniul acesteia), deci funcția *nu este surjectivă*;

h) oricare ar fi $y > -\frac{\Delta}{4a}$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha \neq \beta$, astfel încât $f(\alpha) = f(\beta) = y$, deci funcția *nu este injectivă*;

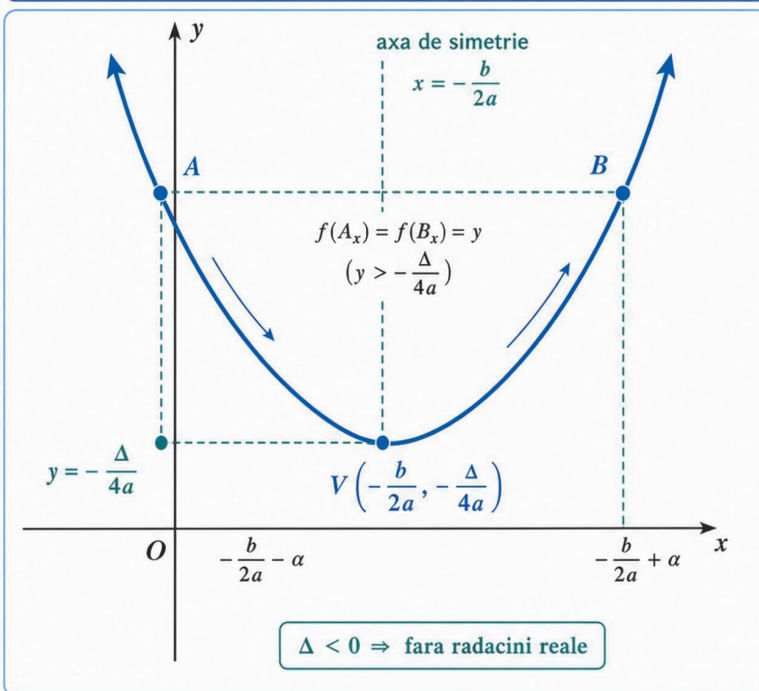
i) funcția *nu este bijectivă* (nefiind injectivă sau surjectivă), deci *nu este inversabilă*;

j) funcția *este convexă*;

k) dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este *axă de simetrie* pentru graficul funcției f .

LECTURA GRAFICĂ - cazul $a > 0, \Delta < 0$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta < 0$$



Proprietăți citite din grafic

- a) $f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- b) $\text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.
- c) $\min f = -\frac{\Delta}{4a}$, atins pentru $x = -\frac{b}{2a}$.
- d) Funcția nu are maxim.
- e) Este mărginită inferior de $-\frac{\Delta}{4a}$ și nemărginită superior.
- f) Este descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; nu este monotonă pe $\mathbb{R}$.
- g) Nu este surjectivă ca funcție $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deoarece nu ia toate valorile reale.
- h) Nu este injectivă: pentru orice $y > -\frac{\Delta}{4a}$ există $x_1 \neq x_2$ cu $f(x_1) = f(x_2) = y$.
- i) Nu este bijectivă, deci nu este inversabilă pe $\mathbb{R}$.
- j) Este convexă (concavitatea în sus), deoarece $a > 0$.
- k) Dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie.



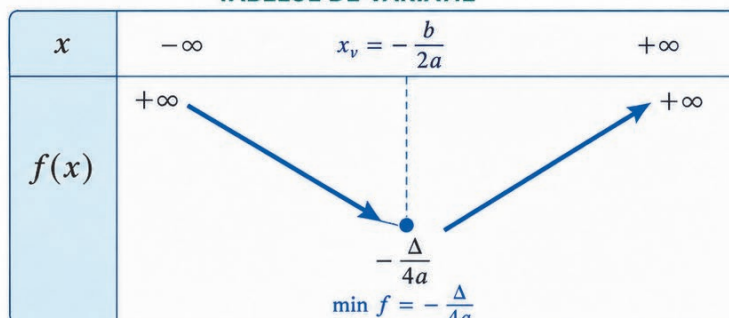
Graficul arată o parabolă convexe, fără intersecții cu Ox ,

cu minim global în $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Toate valorile funcției sunt pozitive.

LECTURA TABELEI DE VARIATIE - cazul $a > 0, \Delta < 0$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta < 0$$

TABELUL DE VARIATIE



Toate valorile din linia $f(x)$ sunt > 0 .

$$\text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

TABEL AUXILIAR (SIMETRIE ȘI NEINJECTIVITATE)

x	$x_1 = -\frac{b}{2a} - \alpha$	$x_v = -\frac{b}{2a}$	$x_2 = -\frac{b}{2a} + \alpha$
$f(x)$	y	$-\frac{\Delta}{4a}$	y

$f(x_1) = f(x_2) = y$, pentru orice $y > -\frac{\Delta}{4a}$



Puncte simetrice fata de axa $x = -\frac{b}{2a}$.



Aceeași valoare y apare pentru două valori distincte de x (neinjectivă).



Axa de simetrie a parabolei este $x = -\frac{b}{2a}$.

CUM CITIM PROPRIETĂȚILE a)-k

1 Din valorile din linia $f(x)$

- $f(x) > 0$, pentru orice x în $\mathbb{R}$.
- $\text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.
- $\min f = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Funcția nu are maxim.
- Este marginită inferior și nemarginită superior.
- Nu este surjectivă ca funcție $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2 Din punctul x_v și din săgeți

- Minimul este atins pentru $x_v = -\frac{b}{2a}$.
- Descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; nu este monotona pe $\mathbb{R}$.
- Funcția este convexă ($a > 0$).
- $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie.

3 Din tabelul auxiliar

- Nu este injectivă: același $y > -\frac{\Delta}{4a}$ apare pentru două valori $x_1 \neq x_2$.

4 Concluzie despre corespondența

- Nu este bijectivă, deci nu este inversabilă pe $\mathbb{R}$.



Tabelul de variație arată un minim global unic, valori mereu pozitive, imaginea $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, și monotonia: descrește apoi crește.

Activitate pe grupe: Verificați independent afirmațiile anterioare, utilizând proprietăți ale calculului algebric. Comparați metodele utilizate și notați concluziile care sprijină învățarea. Formulați, apoi, o consecință echivalentă pentru cazul $\Delta < 0$ și $a < 0$.

Identificați care dintre proprietățile cazului 1 ($\Delta < 0$ și $a > 0$) se regăsesc identic și la cazul 2 ($\Delta < 0$ și $a < 0$).

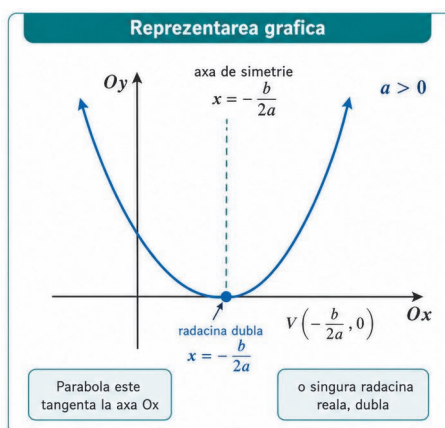


$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$

Cazul 3. $a > 0, \Delta = 0$

$$f(x) = \underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} \geq 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$



✓ Parabola are concavitatea in sus, este tangenta la Ox in $V\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, are o radacina reala dubla, iar $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Forma canonica

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Interpretarea semnului

- $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- deoarece $a > 0$, rezulta $f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Egalitatea $f(x) = 0$ are loc doar pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

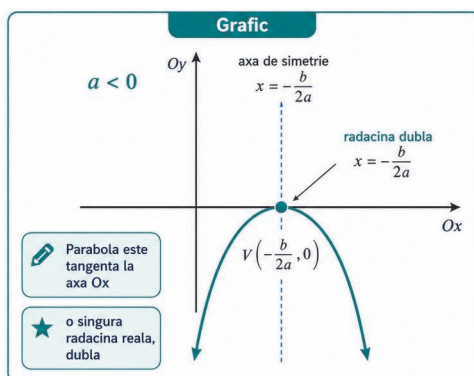
Proprietati

- $\text{Im } f = [0, +\infty)$
- $\min f = 0$, atins pentru $x = -\frac{b}{2a}$
- functia nu are maxim
- este marginita inferior de 0 si nemarginita superior
- este descrescatoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ si crescatoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
- este convexa
- dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie.

Cazul 4. $a < 0, \Delta = 0$

$$f(x) = \underbrace{a}_{<0} \cdot \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} \leq 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$



✓ Parabola are concavitatea in jos, este tangenta la Ox in $V\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, are o radacina reala dubla, iar $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Proprietati esentiale

- $\text{Im } f = (-\infty, 0]$
- $\max f = 0$, atins pentru $x = -\frac{b}{2a}$
- functia nu are minim
- este marginita superior de 0 si nemarginita inferior
- este crescatoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ si descrescatoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
- este concava
- dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie.

Consecința 2

În **cazul 4** ($\Delta = 0$ și $a < 0$):

- forma canonică se simplifică astfel: $f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
- f este negativă ($f \leq 0$), adică $f(x) \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$; și în acest caz, f păstrează semn constant și semnul funcției este „-” (admitem că valoarea 0 ia semnul + sau -, după caz);
- $\text{Im } f = (-\infty, 0]$, deci $f(x) \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
- cea mai mare valoare a funcției f este 0, deci funcția admite ca maxim această valoare (admite un extrem de tip maxim); cum $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$, maximul se realizează în punctul $x = -\frac{b}{2a}$ (punct de maxim);
- funcția nu admite o cea mai mică valoare (minim);
- funcția este mărginită superior de 0 și nemărginită inferior;

g) oricare ar fi $\alpha, \beta \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \stackrel{\text{not}}{=} I_1$, cu $\alpha < \beta$, este îndeplinită condiția $f(\alpha) < f(\beta)$, deci funcția f este *strict crescătoare* pe acest interval ($f \nearrow$ pe I_1), respectiv oricare ar fi $\alpha, \beta \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \stackrel{\text{not}}{=} I_2$, cu $\alpha < \beta$, este îndeplinită condiția $f(\alpha) > f(\beta)$, deci funcția f este *strict descrescătoare* pe acest interval ($f \searrow$ pe I_2), unde $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}$ și $I_1 \cap I_2 = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; și în aceste condiții, funcția *nu este monotonă* (pe domeniul de definiție, $\mathbb{R}$), dar este *monotonă pe intervale*;

h) $\text{Im} f \subset \mathbb{R}$ și $\text{Im} f \neq \mathbb{R}$, în concluzie funcția *nu este surjectivă*;

i) oricare ar fi $y < 0$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha \neq \beta$, astfel încât $f(\alpha) = f(\beta) = y$, deci funcția *nu este injectivă*;

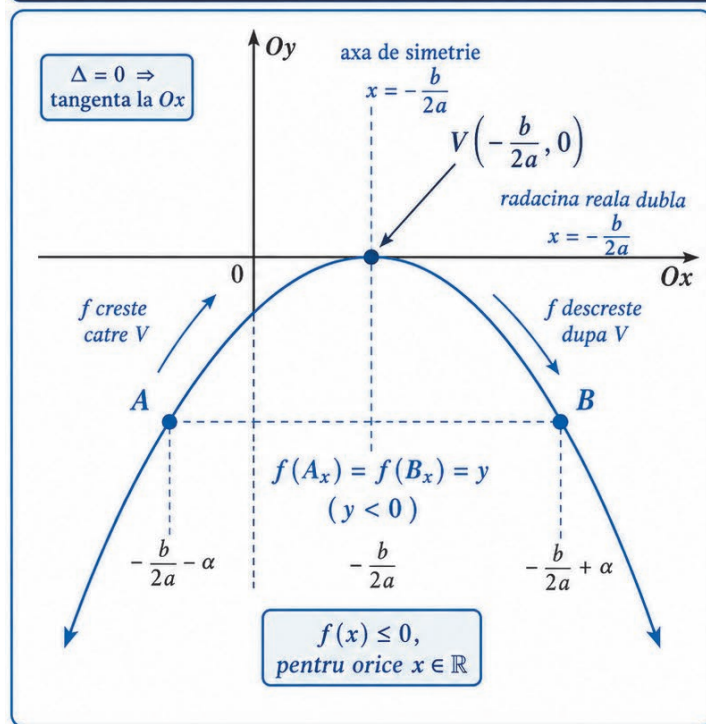
j) funcția *nu este bijectivă*, deci *nu este inversabilă*;

k) funcția *este concavă*;

l) dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este *axă de simetrie* pentru graficul funcției f .

LECTURA GRAFICA - cazul $a < 0, \Delta = 0$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a < 0, \quad \Delta = 0$$



Proprietati asociate cazului

- Forma canonică: $f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
- $f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; funcția are semn negativ sau nul.
- $\text{Im } f = (-\infty, 0]$.
- $\max f = 0$, atins pentru $x = -\frac{b}{2a}$.
- Funcția nu are minim.
- Este marginată superior de 0 și nemarginată inferior.
- Este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; nu este monotonă pe $\mathbb{R}$.
- Nu este surjectivă ca funcție $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deoarece $\text{Im } f \neq \mathbb{R}$.
- Nu este injectivă: pentru orice $y < 0$ există $\alpha \neq \beta$ cu $f(\alpha) = f(\beta) = y$.
- Nu este bijectivă, deci nu este inversabilă pe $\mathbb{R}$.
- Este concavă (concavitatea în jos), deoarece $a < 0$.
- Dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie.



Graficul arată o parabolă concavă, tangente la Ox în $V\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, cu maxim global 0.
Toate valorile funcției sunt negative sau nule.

LECTURA TABELULUI DE VARIATIE - cazul $a < 0, \Delta = 0$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a < 0, \quad \Delta = 0$$

TABELUL DE VARIATIE

x	$-\infty$	$x_v = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0 $\max f = 0$	$-\infty$

Toate valorile din linia $f(x)$ sunt ≤ 0 .

$$\text{Im } f = (-\infty, 0]$$

TABEL DE VARIATIE AUXILIAR (SIMETRIE SI NEINJECTIVITATE)

x	$-\frac{b}{2a} - \alpha$	$x_v = -\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a} + \alpha$
$f(x)$	y	0	y

$$f\left(-\frac{b}{2a} - \alpha\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + \alpha\right) = y, \text{ pentru orice } y < 0.$$



Puncte simetrice
fata de axa
 $x = -\frac{b}{2a}$.



Aceasi valoare y
apare pentru doua valori
distincte de x
(neinjectiva).



Axa de simetrie
a parabolei este
 $x = -\frac{b}{2a}$.

CUM CITIM PROPRIETATILE a)-1

1 Din forma canonica:

a) $f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

b) deoarece $a < 0$, rezulta $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$

2 Din valorile din linia $f(x)$:

c) $\text{Im } f = (-\infty, 0]$

d) $\max f = 0$

e) functia nu are minim

f) este marginita superior de 0 si nemarginita inferior

h) nu este surjectiva ca functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

3 Din punctul x_v si din sageti:

d) maximul este atins pentru $x_v = -\frac{b}{2a}$

g) este crescatoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ si
descrescatoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; nu este monotona pe $\mathbb{R}$

k) functia este concava ($a < 0$)

l) $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie

4 Din tabelul de variatie auxiliar:

i) nu este injectiva: acelasi $y < 0$ apare pentru
doua valori distincte de x

5 Concluzie despre corespondenta:

j) nu este bijectiva, deci nu este inversabila pe $\mathbb{R}$



Tabelul de variatie arata un maxim global unic, valori mereu negative sau nule,
imaginea $(-\infty, 0]$, si monotonia: creste apoi descreste.

Activitate pe grupe: Verificați independent afirmațiile anterioare, utilizând proprietăți ale calculului algebric. Comparați metodele utilizate și notați concluziile care sprijină învățarea. Formulați, apoi, o consecință echivalentă pentru cazul $\Delta = 0$ și $a > 0$.

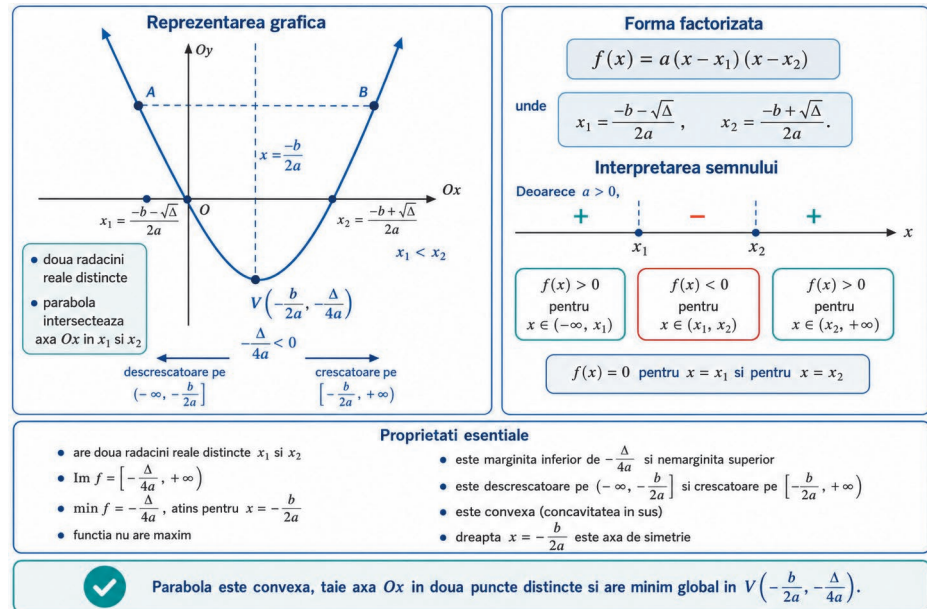
Identificați care dintre proprietățile cazului 4 ($\Delta = 0$ și $a < 0$) se regăsesc identic și la cazul 3 ($\Delta = 0$ și $a > 0$).



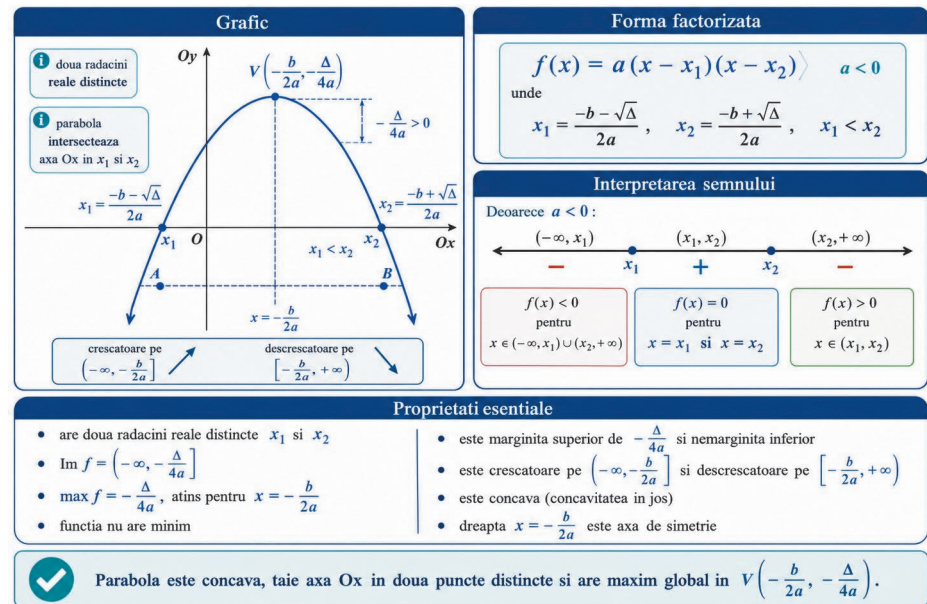
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ și } a \neq 0$$

$$f(x) = a \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right), x \in \mathbb{R}$$

Cazul 5. $a > 0, \Delta > 0$



Cazul 6. $a < 0, \Delta > 0$



Consecința 3

În **cazul 5** ($\Delta > 0$ și $a > 0$):

a) *forma canonică* se simplifică astfel: $f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

b) *forma factorizată* a legii funcției este $f(x) = a \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

c) f nu păstrează semn constant:

► funcția este *pozitivă* pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right)$;

► funcția se *anulează* (ia valoare 0) pentru $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \stackrel{\text{not}}{=} x_1$ și pentru $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \stackrel{\text{not}}{=} x_2$;

► funcția este negativă pentru orice $x \in \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$;

d) cum $a > 0$ și $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, egalitatea cu 0 fiind realizată pentru $x = -\frac{b}{2a}$, obținem că $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, deci cea mai mică valoare a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a}$; astfel, funcția admite ca minim această valoare, iar aceasta se obține pentru $x = -\frac{b}{2a}$ (punct de minim);

e) funcția nu admite o cea mai mare valoare (maxim);

f) $\text{Im}f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, deci $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

g) funcția este mărginită inferior de $-\frac{\Delta}{4a}$ și nemărginită superior

h) oricare ar fi $\alpha, \beta \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \stackrel{\text{not}}{=} I_1$, cu $\alpha < \beta$, este îndeplinită condiția $f(\alpha) > f(\beta)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe acest interval ($f \searrow$ pe I_1), respectiv oricare ar fi $\alpha, \beta \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \stackrel{\text{not}}{=} I_2$, cu $\alpha < \beta$, este îndeplinită condiția $f(\alpha) < f(\beta)$, deci funcția f este strict crescătoare pe acest interval ($f \nearrow$ pe I_2), unde $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}$ și $I_1 \cap I_2 = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; în aceste condiții, funcția nu este monotonă (pe domeniul de definiție, $\mathbb{R}$), dar este monotonă pe intervale;

i) $\text{Im}f \subset \mathbb{R}$ și $\text{Im}f \neq \mathbb{R}$, în concluzie funcția nu este surjectivă;

j) oricare ar fi $y > -\frac{\Delta}{4a}$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha \neq \beta$, astfel încât $f(\alpha) = f(\beta) = y$, deci funcția nu este injectivă;

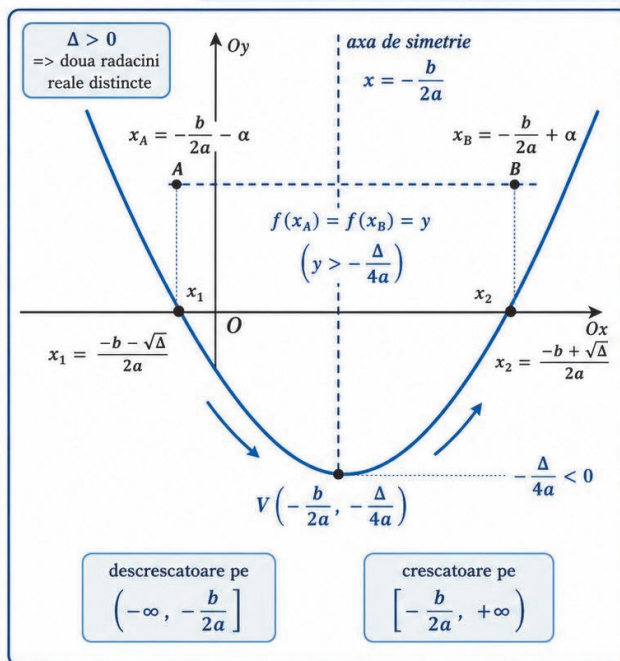
k) funcția nu este bijectivă, deci nu este inversabilă;

l) funcția este convexă;

m) dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie.

LECTURA GRAFICA - cazul $a > 0, \Delta > 0$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta > 0$$



Proprietăți citite din grafic

- Forma canonică: $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.
- Forma factorizată: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$,
cu $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_1 < x_2$.
- Semn: $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$,
 $f(x) = 0$ pentru $x = x_1$ și $x = x_2$,
 $f(x) < 0$ pentru $x \in (x_1, x_2)$.
- $\min f = -\frac{\Delta}{4a}$, atins pentru $x = -\frac{b}{2a}$.
- Funcția nu are maxim.
- $\text{Im}f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.
- Este mărginită inferior de $-\frac{\Delta}{4a}$ și nemărginită superior.
- Este descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; nu este monotonă pe $\mathbb{R}$.
- Nu este surjectivă ca funcție $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deoarece $\text{Im}f \neq \mathbb{R}$.
- Nu este injectivă: pentru orice $y > -\frac{\Delta}{4a}$ există $\alpha \neq \beta$ cu $f(\alpha) = f(\beta) = y$.
- Nu este bijectivă, deci nu este inversabilă pe $\mathbb{R}$.
- Este convexă (concavitatea în sus), deoarece $a > 0$.
- Dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie.



Graficul arată o parabolă convexă, taie axa Ox în două puncte distincte și are minim global în $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

LECTURA TABELULUI DE VARIATIE - cazul $a > 0, \Delta > 0$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta > 0$$

TABELUL DE VARIATIE

x	$-\infty$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_v = \frac{-b}{2a}$	$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\frac{\Delta}{4a}$ $\min f = -\frac{\Delta}{4a}$	0	$+\infty$
Toate valorile din linia $f(x)$ sunt $\geq -\frac{\Delta}{4a}$ $\text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$					

TABEL DE VARIATIE AUXILIAR (SIMETRIE SI NEINJECTIVITATE)

x	$x_A = \frac{-b}{2a} - \alpha$	$x_v = \frac{-b}{2a}$	$x_B = \frac{-b}{2a} + \alpha$
$f(x)$	y	$-\frac{\Delta}{4a}$	y
$f(x_A) = f(x_B) = y$, pentru orice $y > -\frac{\Delta}{4a}$ Puncte simetrice fata de axa $x = -\frac{b}{2a}$ Aceeași valoare y apare pentru doua valori distincte de x (neinjectiva) Axa de simetrie a parabolei este $x = -\frac{b}{2a}$			



Tabelul de variatie arata doua radacini reale distincte, un minim global unic, imaginea $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, si monotonia: descreste pana la x_v , apoi creste.

CUM CITIM PROPRIETATILE a)-m

1 Din forma canonica:

$$a) \quad f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

2 Din forma factorizata si din radacini:

$$b) \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$$c) \quad f(x) > 0 \text{ pe } (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \quad f(x) = 0 \text{ la } x_1 \text{ si } x_2, \\ f(x) < 0 \text{ pe } (x_1, x_2).$$

3 Din tabelul de variatie:

$$d) \quad \text{minimul este atins pentru } x_v = \frac{-b}{2a}.$$

e) functia nu are maxim.

$$f) \quad \text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right).$$

g) este marginita inferior de $-\frac{\Delta}{4a}$ si nemarginita superior.

h) este descrescatoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ si crescatoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; nu este monotona pe $\mathbb{R}$.

i) nu este surjectiva ca functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

l) functia este convexa ($a > 0$).

m) $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie.

4 Din tabelul auxiliar:

j) nu este injectiva: pentru orice $y > -\frac{\Delta}{4a}$, aceeași valoare y apare pentru doua valori distincte de x .

5 Concluzie despre corespondenta:

k) nu este bijectiva, deci nu este inversabila pe $\mathbb{R}$.

Activitate pe grupe: Verificați independent afirmațiile anterioare, utilizând proprietăți ale calculului algebric. Comparați metodele utilizate și notați concluziile care sprijină învățarea. Formulați, apoi, o consecință echivalentă pentru cazul $a < 0$ și $\Delta > 0$. Identificați care dintre proprietățile cazului 5 ($\Delta > 0$ și $a > 0$) se regăsesc identic și la cazul 6 ($\Delta = 0$ și $a < 0$).



RETINEM

Proprietățile identificate anterior permit caracterizarea funcțiilor de gradul al doilea (determinarea comportamentului sau variației), mai complexă decât a celor de gradul I, într-un format sintetic în *tabel de variație*, construit astfel (pentru cazurile generale):

- prima linie (rând) corespunde valorilor variabilei funcției, pe care vom nota capetele domeniului de definiție, $-\infty$ și $+\infty$, valoarea ce corespunde extremității funcției, după caz valoarea sau valorile în care funcția se anulează;

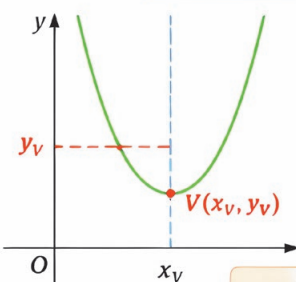
- a doua linie corespunde valorilor funcției, $f(x)$, precum și marcărilor simbolice sau textuale a unora dintre proprietăți;

- pe cazuri particulare, tabelul de variație poate fi completat și cu alte valori, de exemplu $x = 0$, care permit un studiu mai detaliat al comportamentului funcției.

5. FORMA CANONICĂ = COORDONATELE VÂRFULUI

Orice funcție de gradul al doilea se poate scrie astfel:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$



- x_v indică deplasarea parabolei pe orizontală (față de axa Oy).

- y_v indică deplasarea parabolei pe verticală (față de axa Ox).

- Vârful este $V(x_v, y_v)$.



Forma canonică arată direct unde se află vârful parabolei și permite o interpretare geometrică rapidă.

Situație-problemă: Optimizarea producției și maximizarea profitului

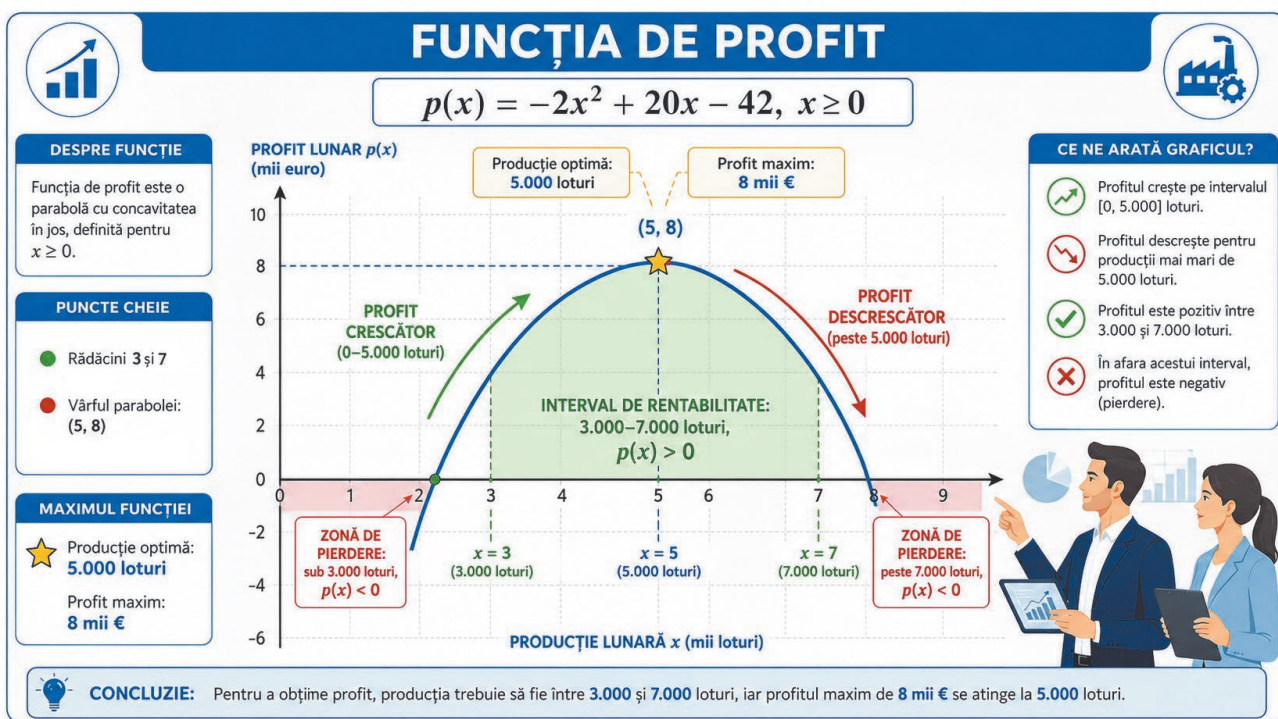
O companie tehnologică produce microcipuri pentru servere. Departamentul financiar a analizat costurile de producție și prețurile de vânzare, stabilind că profitul lunar al companiei, notat cu $P(x)$ (exprimat în zeci de mii de euro), depinde de numărul de loturi de componente produse, notat cu x (exprimat în mii de bucăți). Funcția care modelează profitul este: $P(x) = -2x^2 + 20x - 42$, unde $x \geq 0$. În calitate de analist al companiei, utilizează proprietățile funcției de gradul al doilea pentru a răspunde la următoarele întrebări fundamentale pentru afacere:

a) **Intervalul de rentabilitate:** Care sunt volumele de producție între care compania obține efectiv profit (adică $P(x) > 0$)? Ce se întâmplă dacă se produc sub 3 000 de loturi sau peste 70 00 de loturi?

b) **Producția optimă:** Câte loturi de microcipuri trebuie să producă lunar fabrica pentru a înregistra cel mai mare profit posibil?

c) **Profitul maxim (imaginea funcției):** Care este valoarea maximă a profitului pe care îl poate atinge compania într-o lună?

d) **Dinamica afacerii (monotonia):** Descrie cum evoluează profitul dacă producția crește treptat de la 0 la 5 000 de loturi, respectiv ce se întâmplă dacă producția continuă să crească peste acest prag.



Rezolvare: Funcția dată este $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 20x - 42$. Identificăm coeficienții: $a = -2$, $b = 20$, $c = -42$. Deoarece $a = -2 < 0$, graficul funcției este o parabolă cu ramurile orientate în jos ($\cap$), așadar va admite un punct de maxim.

a) Pentru a afla când profitul este zero (punctele de „break-even”), rezolvăm ecuația atașată $P(x) = 0$ și obținem $x_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2}$, de unde $x_1 = 3$ și $x_2 = 7$. Conform regulii semnelor pentru funcția de gradul al doilea, $P(x) > 0$ pentru $x \in (3, 7)$.

Observație: Compania este rentabilă dacă produce strict între 3 000 și 7 000 de loturi. Dacă se produc sub 3 000 de loturi (din cauza costurilor fixe mari) sau peste 7 000 de loturi (din cauza suprasolicității liniilor de producție și costurilor de stocare), compania intră în pierdere ($P(x) < 0$).

b) Punctul de maxim se atinge în vârful parabolei. Abscisa vârfului este dată de formula:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot (-2)} = \frac{20}{4} = 5.$$

Observație: Compania trebuie să producă exact 5 000 de loturi pentru a maximiza eficiența afacerii.

c) Valoarea maximă a profitului este dată de ordonata vârfului $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = 8$.

Observație: Profitul maxim realizabil de companie este de 80 000 de euro pe lună. (Imaginea funcției pe intervalul de rentabilitate este $(0, 8]$).

d) Monotonia este dictată de vârful parabolei ($x_v = 5$) și de semnul lui $a < 0$: pe intervalul $[0, 5]$, funcția este *strict crescătoare*; pe intervalul $[5, +\infty)$, funcția este *strict descrescătoare*.

Observație: Pe măsură ce fabrica își crește producția de la 0 la 5 000 de unități, profitul crește susținut. Orice unitate produsă suplimentar peste pragul de 5 000 de unități aduce ineficiențe operaționale, determinând o scădere continuă a profitului.

1. HARTA COMPLETĂ A FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

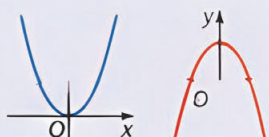
Pornim de la forma generală:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Toate informațiile despre funcție se pot obține din coeficienții a, b, c .

1. SEMNUL LUI a

- $a > 0 \rightarrow$ parabola este orientată în sus
- $a < 0 \rightarrow$ parabola este orientată în jos



2. DISCRIMINANTUL

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 rădăcini reale distincte
- $\Delta = 0 \rightarrow$ 1 rădăcină dublă
- $\Delta < 0 \rightarrow$ fără soluții reale

3. RĂDĂCINILE (dacă $\Delta \geq 0$)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Punctele $(x_1, 0)$ și $(x_2, 0)$ sunt intersecțiile parabolei cu axa Ox .

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

4. AXA DE SIMETRIE

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Parabola este simetrică față de această dreaptă.

5. FORMA CANONICĂ

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

unde $x_v = -\frac{b}{2a}$ și $y_v = f(x_v)$. Aceasta arată direct coordonatele vârfului $V(x_v, y_v)$.

6. VÂRFUL PARABOLEI

$$V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

- $a > 0 \rightarrow V$ este punct de minim
- $a < 0 \rightarrow V$ este punct de maxim

7. INTERSECȚIA CU OY

$f(0) = c \rightarrow$ punctul $(0, c)$ este intersecția parabolei cu axa Oy .

8. VARIAȚIA FUNCȚIEI

- $a > 0 \rightarrow$ funcția descresște pe $(-\infty, x_v]$ și crește pe $[x_v, +\infty)$
- $a < 0 \rightarrow$ funcția crește pe $(-\infty, x_v]$ și descresște pe $[x_v, +\infty)$



Analiza unei funcții de gradul al doilea înseamnă trecerea permanentă între formulă, grafic și interpretare.



EXERCII PROPUSE

- Rescrie legile următoarelor funcții de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în formă canonică:
 - $f(x) = x^2 + 2x + 3$;
 - $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$;
 - $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$;
 - $f(x) = x^2 - 4$;
 - $f(x) = x^2 + 5x$.
- Determină imaginile următoarelor funcții de gradul al doilea, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 - $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$;
 - $f(x) = x^2 + 2x + 1$;
 - $f(x) = x^2 + x + 1$;
 - $f(x) = x^2 - 3$;
 - $f(x) = 2x^2$;
 - $f(x) = -x^2 + 3x + 3$;
 - $f(x) = -2x^2 + 1$.
- Determină axa de simetrie a fiecărui grafic al funcțiilor de la exercițiile 1. și 2.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 5$. Fără a efectua calculele, justifică egalitatea $f(-4) = f(0)$.
- Determină intervalele de monotonie ale funcțiilor de la exercițiile 1. și 2., precizând dacă admit un punct de maxim sau de minim.
- Studiază monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ pe intervalele $(-\infty, 1]$, $(3, 7)$ și $[-1, 5)$.
- Determină parametrul real m astfel încât funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ să fie strict crescătoare pe $(2, \infty)$, în cazurile:
 - $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + 3$;
 - $f(x) = mx^2 - (m-1)x + 1$.
- Determină parametrul real m astfel încât funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ să fie strict descrescătoare pe $(1, \infty)$, în cazurile:
 - $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + 3$;
 - $f(x) = (m+1)x^2 - (2m-3)x + 1$.
- Verifică faptul că următoarele funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt strict crescătoare:
 - $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x^2+2x+3, & x \geq 0 \end{cases}$;
 - $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ -x^2+2x+1, & x < 0 \end{cases}$.
- Verifică faptul că următoarele funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt strict descrescătoare:
 - $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+2, & x < 0 \\ -x^2-2x+3, & x \geq 0 \end{cases}$;
 - $f(x) = \begin{cases} -3x+1, & x \geq 0 \\ -x^2+2x+1, & x < 0 \end{cases}$.
- Justifică faptul că următoarele funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nu sunt monotone:
 - $f(x) = x^2 + 3x + 5, D = [-5, 5]$;
 - $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-2x+3, & x \geq 0 \end{cases}$.
- Demonstrează că maximul ariei unui dreptunghi cu perimetrul constant se realizează când acesta este pătrat.
- Trasează graficul funcțiilor de la exercițiile 1., 9., 10.
 - Demonstrează că punctele $A(x, y)$ și $B(x, |y|)$ sunt sau simetrice față de Ox sau confundate.
 - Reprezintă grafic funcția $|f|$, unde funcțiile f sunt cele de la punctul a).
- Determină coordonatele vârfurilor parabolilor asociate următoarelor funcții, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 - $f(x) = x^2 + 4x + 5$;
 - $f(x) = x^2 - 4x + 2$;
 - $f(x) = x^2 - 4x + 2$;
 - $f(x) = -3x^2 + x$;
 - $f(x) = 2x^2 + 5$.
- Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $y = mx^2 + (2m+1)x + m + 2$ să fie pe prima bisectoare.

B. ERORI FRECVENTE – AI GRIJĂ!



1. Semnul lui b

În $\Delta = b^2 - 4ac$, coeficientul b se preia CU SEMNUL SĂU.
Exemplu: $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow b = -3$ (nu $b = 3$).



2. Împărțirea la $2a$

În $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, ÎNTREG NUMĂRĂTORUL se împarte la $2a$, nu doar radicalul.



3. Δ negativ

Dacă $\Delta < 0$, ecuația NU are soluții reale.
Parabola nu intersectează axa Ox .



4. Semnul lui a

- $a > 0 \rightarrow$ parabola este orientată în sus.
- $a < 0 \rightarrow$ parabola este orientată în jos.



5. Vârful nu este întotdeauna minim

- Dacă $a > 0 \rightarrow$ vârful este punct de minim.
- Dacă $a < 0 \rightarrow$ vârful este punct de maxim.

16. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $y = mx^2 + (2m + 1)x + m - 1$ să fie pe dreapta $y = 3x - 1$.
17. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $y = (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + m + 1$ să se afle în cadranul al doilea.
18. Determină funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(-1, 3)$, $B(0, -1)$ și $C(2, 4)$.
19. Determină imaginile prin funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ ale următoarelor intervale:
 a) $(-\infty, -1]$; b) $(-\infty, 1)$; c) $[-3, 2]$; d) $[0, \infty)$; e) $[1, \infty)$.
20. Determină parametrul real m astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ să fie strict crescătoare pe $(2, 3)$.
 a) $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + 3 + m$; b) $f(x) = mx^2 + 2(m - 1)x + 1 - 3m$.
21. Determină parametrul real m astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ să fie strict descrescătoare pe $[-2, 3]$.
 a) $f(x) = (m + 2)x^2 + (2m + 1)x + 3 - m$; b) $f(x) = mx^2 - (2m - 1)x + 1 + m$.
22. Determină parametrul real m astfel încât funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ să *nu* fie monotone pe $[-1, 3]$, în cazul următoarelor legi:
 a) $f(x) = (m - 2)x^2 + (2m + 3)x + 3 - m$; b) $f(x) = mx^2 - (2m - 1)x + 1 + m$.
23. Determină parametrul real m astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx, & x < 2 \\ 2x + m, & x \geq 2 \end{cases}$ să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
24. Determină parametrul real m astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} mx^2 + (m - 1)x - 6, & x < 1 \\ -x^2 - 2x + m, & x \geq 1 \end{cases}$ să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
25. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $y = (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + m + 1$ să se poziționeze în suprafața pătrată determinată de produsul cartezian $[-1, 1] \times [2, 3]$.
26. a) Demonstrează că vârful parabolei $y = (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + m + 2$ se situează pe dreapta $x - 4y = 6, \forall m \in \mathbb{R}$.
27. Se consideră familia de funcții de gradul al doilea $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2$.
 a) Justifică faptul că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se situează pe dreapta $y = x + 1$.
 b) Ce porțiuni de dreaptă descriu parabolele cu vârful în sus?
 c) Demonstrează că aceste parabole au un punct comun.
28. Se consideră familia de funcții de gradul al doilea $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 - (2m + 1)x + m + 1$.
 a) Justifică faptul că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții descriu o dreaptă.
 b) Ce porțiuni de dreaptă descriu parabolele cu vârful în jos?
 c) Demonstrează că aceste parabole au un punct comun.
29. Se consideră familia de funcții de gradul al doilea $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = x^2 - (m - 1)x - m^2 + 4$. Demonstrează că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții descriu o parabolă.
30. Determină imaginile prin funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ x^2 - 2x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$ ale următoarelor intervale:
 a) $(-\infty, -1]$; b) $[-1, 1)$; c) $[-3, 2]$; d) $[0, \infty)$; e) $[1, \infty)$.
31. Determină imaginile prin funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ x^2 - 2x + 3, & x \in [0, 3] \\ -x^2 + 8x + 3, & x > 3 \end{cases}$ ale următoarelor intervale:
 a) $(-\infty, 2]$; b) $[-1, 2)$; c) $[3, 3]$; d) $[1, 5)$; e) $[1, 6)$.



Etape ale reprezentării grafice a funcțiilor de gradul al doilea

Pentru reprezentarea graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, avem în vedere:

- **orientarea parabolei**, prin determinarea semnului coeficientului dominant a : dacă $a > 0$, parabola se reprezintă cu ramurile în sus ($\cup$), iar dacă $a < 0$, parabola se reprezintă cu ramurile în jos ($\cap$);

- **vârful parabolei** care corespunde punctului de extrem, notat $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

- **intersecția cu axa Oy** : $G_f \cap Oy = \{(0, f(0))\}$, adică punctul de coordonate $(0, c)$, c numindu-se și ordonată la origine; având în vedere că aplicațiile practice ale funcției de gradul al doilea nu au sens pentru tot domeniul $\mathbb{R}$, de regulă doar pe $[0, +\infty)$ sau submulțimi ale acestui interval, intersecția va avea și utilitatea practică (valoare/condiție inițială);

- după caz, **intersecția cu axa Ox** : $G_f \cap Ox = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ceea ce implică rezolvarea ecuației atașate funcției, $f(x) = 0$; la acest moment, ne putem baza pe forma canonică a funcției și pe semnul discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$, astfel:

- ▶ dacă $\Delta < 0$, $G_f \cap Ox = \emptyset$, deci nu există intersecții cu axa Ox ;

- ▶ dacă $\Delta = 0$, punctul de coordonate $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ este unica intersecție cu axa Ox și coincide cu vârful parabolei;

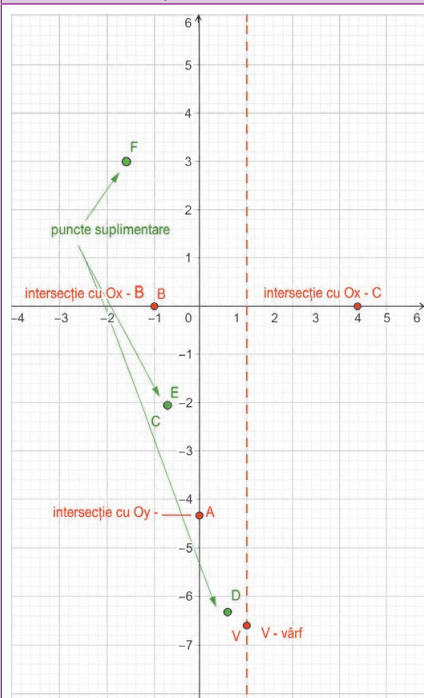
- ▶ dacă $\Delta > 0$, există două puncte distincte de intersecție, de coordonate $\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ și $\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$; în plus, punctele sunt dispuse simetric față de axa de simetrie a parabolei, câte unul pe fiecare ramură;

- suplimentar, alte puncte ale graficului permit o reprezentare mai riguroasă a funcției (mai ales când $\Delta \leq 0$); având în vedere că ramurile parabolei sunt simetrice față de axa de simetrie a acesteia, punctele suplimentare de analiză pot fi alese doar pe una dintre ramuri (de exemplu pe ramura căreia îi aparține și intersecția cu Oy); în acest sens, se poate construi o primă ramură, apoi, prin simetrie față de axa parabolei, se poate construi și cea de-a doua ramură.

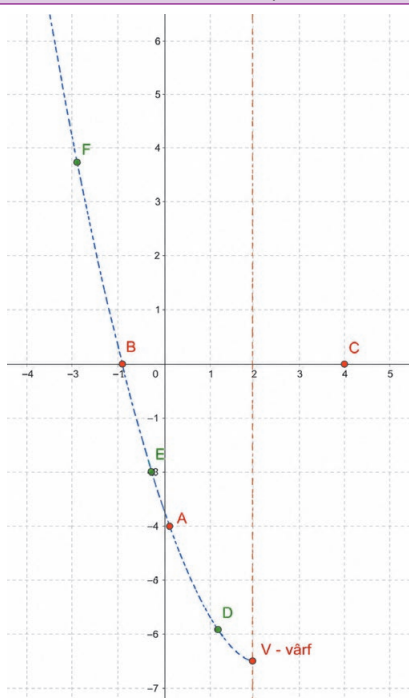


EXEMPLU TEORETIC

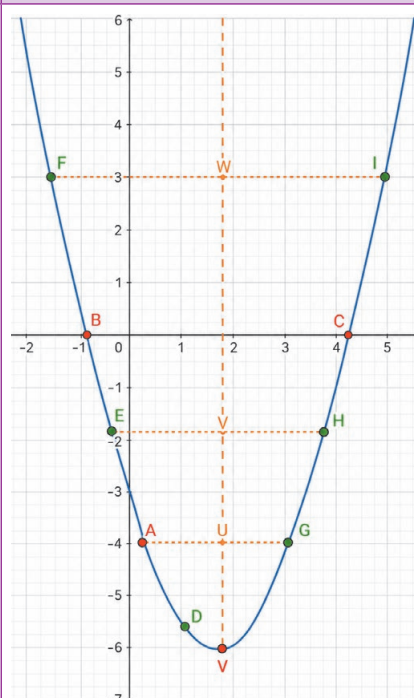
Reprezentarea vârfului V , a axei de simetrie, a intersecțiilor cu axele și a altor puncte



Reprezentarea uneia dintre ramuri (în acest caz, stângă, pe care se situează intersecția cu Oy)



Reprezentarea celeilalte ramuri, prin simetrie față de axa parabolei



EXEMPLE

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$;

$a = 1 > 0$ – ramuri orientate în sus, vârf ce corespunde minimului funcției; $b = 3, c = -4; \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 > 0$.

Intersecțiile cu axele: $G_f \cap Oy: f(0) = -4, A(0, -4)$.

$$G_f \cap Ox: f(x) = 0, x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} =$$

$$= (x - 1)(x + 4) = 0; \text{ obținem punctele } B(-4, 0) \text{ și } C(1, 0).$$

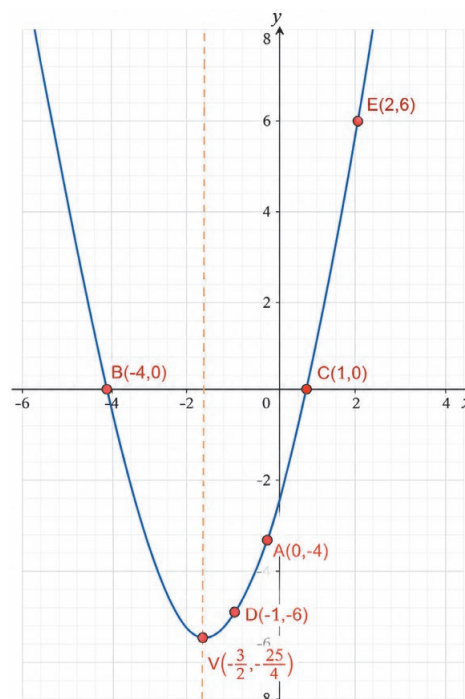
Vârful parabolei este $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ punct de minim.

Axa de simetrie este verticala care trece prin V .

Alte puncte: pentru $x = 2, f(2) = 4$, deci $D(2, 4)$; pentru $x = -1, f(-1) = -6$, cu $D(-1, -6)$; pentru $x = 2, f(2) = 6$, cu $E(2, 6)$.

Pentru acest exemplu, construim *tabelul de variație*:

x	$-\infty$	-4	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\frac{25}{4}$ minim	-6	-4	0	4	$+\infty$
Monotonie	↘ ↗							
Semnului lui $f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	



Caracterizarea funcției:

Pentru funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$:

- $a = 1 > 0, b = 3, c = -4$ și $\Delta = 25 > 0$; forma canonică este $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$;
- $A(0, -4)$ reprezintă intersecția cu Oy ;
- $B(-4, 0)$ și $C(1, 0)$ sunt zerourile funcției, adică soluțiile ecuației atașate $f(x) = 0$;
- parabola are ramurile orientate în sus și vârful $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ reprezintă punct de minim; minimul este $-\frac{25}{4}$ și se realizează pentru $x = -\frac{3}{2}$; axa de simetrie este dreapta de ecuație $x = -\frac{3}{2}$;
- cu cât valorile variabilei x se apropie de $-\infty$ sau de $+\infty$, cu atât valorile funcției se apropie de $+\infty$;
- funcția este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -\frac{3}{2}]$, este crescătoare pe intervalul $[-\frac{3}{2}, +\infty)$;
- este (strict) pozitivă pe $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ și (strict) negativă pe $(-4, 1)$, păstrând $\text{Im}f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$;
- funcția nu este surjectivă, nu este injectivă, nu este bijectivă și nu este inversabilă.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 12x - 18$

$a = -2 < 0$ – ramuri orientate în jos, vârf ce corespunde maximului funcției; $b = 12, c = -18; \Delta = 0$;

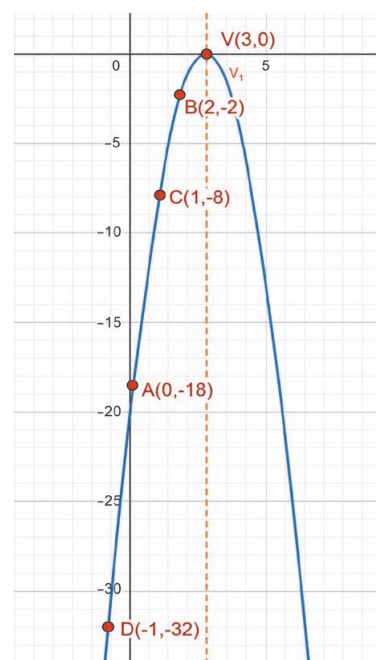
Intersecțiile cu axele: $G_f \cap Oy: f(0) = -18, A(0, -18)$;

$G_f \cap Ox: f(x) = 0; -2x^2 + 12x - 18 = -2 \cdot (x - 3)^2 = 0$, de unde obținem punctul $V(3, 0)$, reprezentând și vârful parabolei.

Axa de simetrie este verticala care trece prin V .

Alte puncte: pentru $x = 2, f(2) = -2$, deci $B(2, -2)$; pentru $x = 1, f(1) = -8$, cu $C(1, -8)$; pentru $x = -1, f(-1) = -32$, cu $D(-1, -32)$.

Pe modelul exemplului 1., completează studiul funcției cu tabelul de valori și caracterizează funcția.



EXERCITIUL REZOLVAT

Se consideră funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$. Pe graficul acesteia (parabolă), se consideră punctul A , reprezentând vârful parabolei, și punctul B , care are abscisa $x = 6$.

1. Determină coordonatele vârfului A al parabolei și ordonata punctului B .

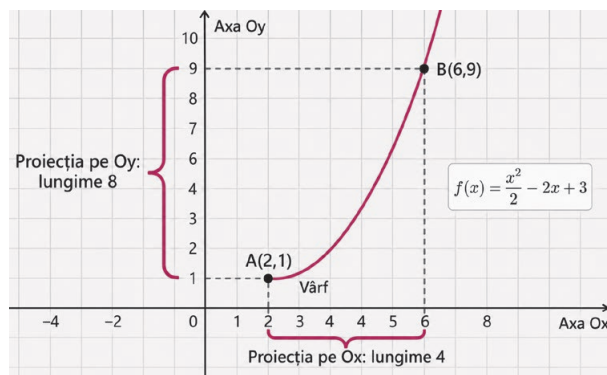
2. Calculează lungimea proiecției arcului de parabolă cuprins între punctele A și B pe axa Ox .

3. Calculează lungimea proiecției aceluiași arc de parabolă pe axa Oy .

Rezolvare: 1. Abscisa vârfului este $x_A = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2$; ordonata vârfului este

$y_A = f(x_A) = f(2) = \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 + 3 = 1$; coordonatele vârfului sunt $A(2, 1)$; $y_B = f(6) = \frac{36}{2} - 12 + 3 = 9$, deci $B(6, 9)$.

2. Deoarece funcția este strict crescătoare pe intervalul $[2, 6]$ (vârful este punctul de minim, iar ramura urcă spre dreapta), proiecția întregului arc AB pe axa absciselor coincide cu segmentul de pe axa Ox delimitat de abscisele capetelor sale. Proiecția punctului A pe axa Ox este punctul de abscisă $x = 2$. Proiecția punctului B pe axa Ox este punctul de abscisă $x = 6$. Lungimea proiecției pe Ox este $|x_B - x_A| = |6 - 2| = 4$ unități.

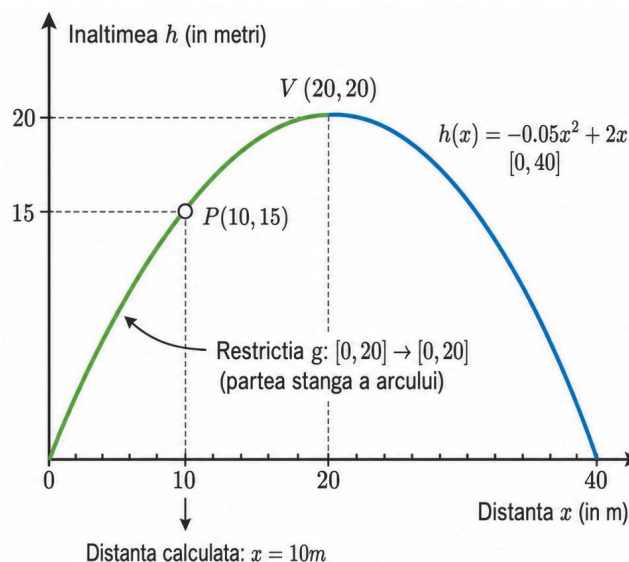


3. Similar, proiecția arcului AB pe axa ordonatelor coincide cu segmentul de pe axa Oy , delimitat de ordinatele punctelor extreme ale arcului. Proiecția punctului A pe axa Oy este punctul la coordonata $y = 1$. Proiecția punctului B pe axa Oy este punctul la coordonata $y = 9$. Lungimea proiecției pe Oy este $|y_B - y_A| = |9 - 1| = 8$ unități.

Aplicație practică - Proiectarea unui stâlp de susținere pe un arc de pod

O echipă de ingineri proiectează un pod care are un arc în formă de parabolă, ca în imaginea alăturată. Înălțimea h a arcului (în metri) la o distanță orizontală x (în metri) de la capătul din stânga al podului este aproximată prin funcția de gradul al doilea de lege $f(x) = -0,05x^2 + 2x$, pentru $x \in [0, 40]$.

Podul are o lungime totală de 40 de metri, iar înălțimea maximă a arcului este de 20 de metri, atinsă la mijlocul podului ($x = 20$). Echipa de ingineri are nevoie de o metodă pentru a calcula exact distanța orizontală x (pornind de la capătul din stânga, în prima jumătate a podului), pentru a plasa un stâlp de susținere la o înălțime predefinită h (de exemplu, la 15 metri). Deoarece funcția f nu este injectivă pe tot domeniul $[0, 40]$ (un obiect poate fi la aceeași înălțime în două puncte diferite, urcând și coborând), este necesară utilizarea unei restricții a funcției.



1. Definește restricția funcției f pe un interval care are sens pentru problema dată (pornind de la capătul din stânga, până la mijlocul podului) și pe care funcția este inversabilă.

2. Află funcția inversă a acestei restricții, care va da distanța orizontală x în funcție de înălțimea h .

3. Folosind funcția inversă, calculează la ce distanță orizontală de la capătul stâng trebuie plasat stâlpul la înălțimea de 15 metri. *Consultă și schema din imagine pentru a verifica rezultatul.*

Rezolvare: 1. Pentru a putea inversa funcția care modelează arcul podului, trebuie să alegem un interval pe care aceasta este strict monotonă (deci injectivă). Deoarece ne interesează plasarea stâlpului în prima jumătate a podului (pornind de la capătul din stânga, până la vârf), vom restrânge domeniul de definiție la intervalul $[0, 20]$, astfel, $g: [0, 20] \rightarrow [0, 20]$, $g(x) = -0,05x^2 + 2x$. Pe acest interval funcția este strict crescătoare (de la înălțimea 0 la înălțimea maximă 20), deci bijectivă și inversabilă.

2. Pentru a determina inversa, notăm înălțimea cu h și rezolvăm ecuația în raport cu variabila x : $h = -0,05x^2 + 2x$. Obținem $(x - 20)^2 = 400 - 20h$, cu $x = 20 \pm \sqrt{400 - 20h}$. Deoarece am restrâns domeniul la $x \in [0, 20]$, valoarea lui x trebuie să fie mai mică sau egală cu 20. Așadar, alegem varianta cu semnul minus: $x = 20 - \sqrt{400 - 20h} = g^{-1}(h)$.

3. Pentru a determina la ce distanță orizontală de la capătul stâng trebuie plasat stâlpul astfel încât să susțină arcul la înălțimea de 15 metri, calculăm $g^{-1}(15)$ și obținem $x = 10$.

Concluzie: Stâlpul de susținere trebuie montat la o distanță orizontală de 10 metri față de capătul din stânga al podului.



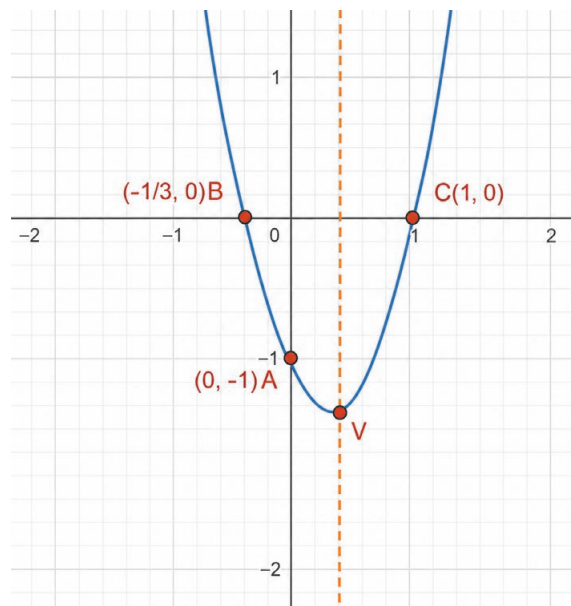
EXERCITII PROPUSE

A.

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - (m^2 + 2)x + 5m + 2$. Determină valorile parametrului m pentru a fi îndeplinită condiția sau condițiile din fiecare dintre următoarele cazuri:

- a) $(0, -8) \in G_f$; b) $(1, 0) \in G_f$;
c) $(-1, -1) \in G_f$; d) $(m, m) \in G_f$.

2. Parabola reprezentată în planul în care a fost fixat reperul cartezian xOy corespunde unei funcții f de gradul al doilea. Utilizând informațiile din figura alăturată, determină funcția f , exprimând legea sa pe formă generală și pe formă canonică.



B.

3. Reprezintă geometric graficul, construiește tabelul de variație și caracterizează fiecare dintre următoarele funcții de gradul al doilea:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^2$;
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3x$;
d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 8$;
e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 1$;
f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$;
g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 25$;
h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$.

4. **Activitate pe grupe:** Pentru funcția prezentată la exemplul 1, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$, împărțiți între membrii grupei următoarele funcții obținute prin operații în care intervine f și reprezentanți noile funcții folosind reprezentarea geometrică asociată lui f :

- a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -f(x)$; b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + 4$;
c) $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = f(x) - 1$; d) $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = f(x - 2)$;
e) $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = f(x + 1)$; f) $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = f(x - 2) + 3$;
g) $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z(x) = 2f(x)$; h) $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = \frac{1}{2}f(x)$;
i) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = |f(x)|$.

În completarea cerinței anterioare:

i) explicați cum s-a deplasat desenul funcției f în raport cu axele reperului cartezian xOy pentru fiecare dintre cazurile b) – e), realizând o analogie cu deplasarea unei piese pe o tablă de șah (mutări pe linie și/sau pe coloană);

ii) explicați cum se reprezintă graficul funcției g față de f ;

iii) comparați reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f, g și h și formulați concluzii care întăresc învățarea;

iv) comparați la nivelul clasei strategiile de reprezentare pe care le-ați utilizat pentru funcția p și notați concluziile care întăresc învățarea; descrieți comportamentul acestei funcții.

5. Activitate în pereche: Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Este funcția f egală cu funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = [f(-1) - 2f(0) + f(1)]x^2 - \frac{1}{2}[f(-1) - f(1)]x + f(0)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$? Justifică.

b) În ce condiții punctele $A(-1, m)$, $B(0, n)$ și $C(1, p)$, cu $m, n, p \in \mathbb{R}$, determină o parabolă asociată unei funcții de gradul al doilea? Ce proprietate trebuie să aibă cele trei puncte distincte pentru a nu determina nicio parabolă asociată funcțiilor de gradul al doilea?

6. O echipă de salvamari lansează o rachetă de semnalizare luminoasă de pe o stâncă, pentru a avertiza o navă aflată în derivă. În imaginea alăturată este reprezentat graficul înălțimii la care se află racheta (măsurată în metri față de nivelul mării), în funcție de timpul scurs de la lansare (măsurat în secunde).

a) De la ce înălțime (față de nivelul mării) a fost lansată racheta de semnalizare?

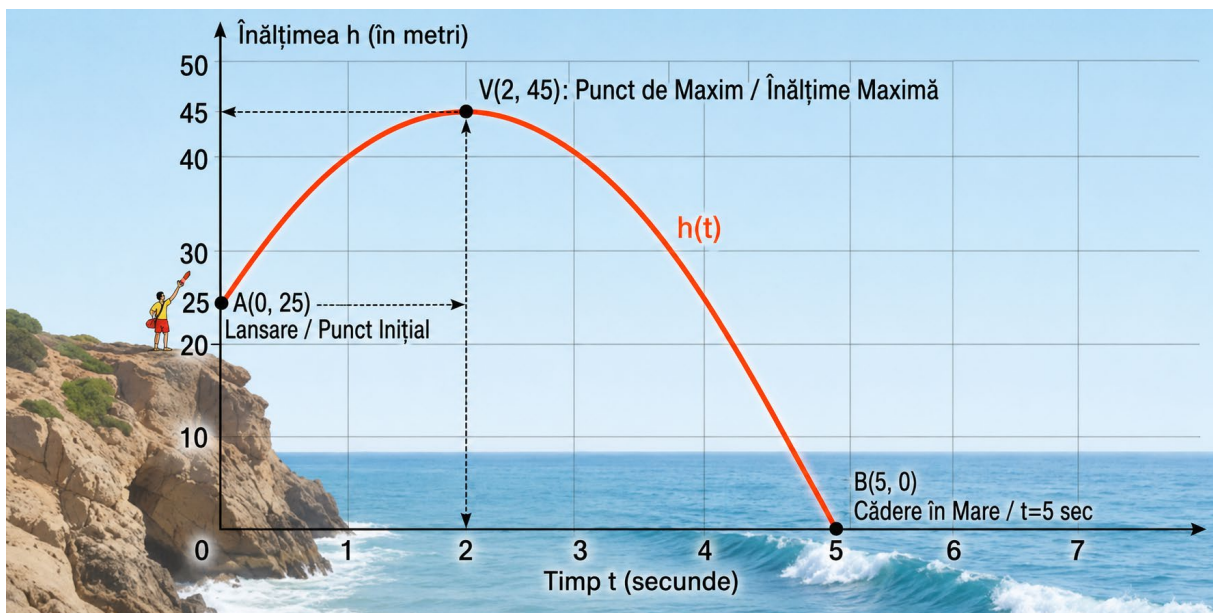
b) Care este înălțimea maximă atinsă și după câte secunde de la lansare a ajuns la această înălțime?

c) Care este intervalul de timp în care racheta a fost în urcare? Dar intervalul în care a fost în cădere?

Cum se traduc aceste perioade în termeni de monotonie a funcției?

d) După cât timp de la lansare a căzut racheta în mare? Explică semnificația acestui punct în raport cu rădăcinile funcției de gradul al doilea.

e) Știind că mișcarea este modelată de o funcție de lege $h(t) = at^2 + bt + c$, folosește datele citite de pe grafic pentru a determina coeficienții a , b și c .



Utilizarea proprietăților funcției de gradul al doilea în rezolvarea inecuațiilor



REFLECȚIE

În descrierea unui proces economic modelat prin funcții este urmărit ca profitul P care depinde de costurile x să fie pozitiv (strict), adică pentru ce costuri $P(x) > 0$. Din punct de vedere matematic, situația se încadrează la studiul inecuațiilor. În mod particular, rezolvarea inecuației de forma $P(x) > 0$ este în directă legătură cu semnul funcției P .

Un alt aspect posibil de urmărit este determinarea costurilor pentru care profitul este nu numai pozitiv, ci mai mare decât o anumită valoare pozitivă, de exemplu pentru a asigura un anumit nivel al investițiilor viitoare în re tehnologizare. În acest caz, ceea ce interesează reprezintă costurile pentru care $P(x) \geq m$, în acest caz pentru $m > 0$.

În cele ce urmează, valorificând cele studiate la funcția și ecuația de gradul al doilea exprimate pe formă generală, canonică sau factorizată, ne vom referi la *inecuațiile de gradul al doilea*, folosindu-ne și de studiul anterior al altor relații care implică inegalitate, de exemplu inecuații de gradul I.

Inecuația de gradul al doilea

O **inecuație de gradul al doilea** în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$ este o inegalitate de forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ (sau ca relație de tipul $\leq, >, <$), cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$. (1)

A rezolva inecuația înseamnă a determina valorile necunoscutei care verifică relația de inegalitate.



EXEMPLU DE REZOLVARE

Se consideră inecuația $-4x^2 + 6x + 10 \leq 0, x \in \mathbb{R}$.

Optăm pentru transformare prin echivalență, pentru a obține coeficienți mai convenabili pentru calcul și pentru a aduce la formă generală cu coeficient dominant pozitiv, mai ușor de utilizat în calcule și interpretări: $-4x^2 + 6x + 10 \leq 0 \cdot (-2) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 \geq 0$ (cu schimbarea sensului relației, ca urmare a înmulțirii cu o valoare negativă!).

Notăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x - 5$, pentru care:

● $a = 2 > 0$;

● $\Delta = 9 + 40 = 49 > 0$, ceea ce implică existența soluțiilor ecuației atașate, $f(x) = 0$ și intersecții distincte cu axa Ox a parabolei corespunzătoare funcției; $x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{2}$;

● semnul funcției: + „în afara soluțiilor”; - între soluții;

f se anulează pentru $x_{1,2}$;

● caz care convine: $f(x) \geq 0$;

● consecință: $f(x) \geq 0$ pentru oricare

$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ (semn +) și $x \in \left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$;

● **concluzie:** mulțimea soluțiilor inecuației

$-4x^2 + 6x + 10 \leq 0$ este reprezentată de reuniunea

$x \in \left(-\infty, -1\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$, unde am ținut cont că etapele parcurse au asigurat echivalența cu inecuația inițial propusă.





OBSERVAȚII

1. Rezolvarea inecuației $-4x^2 + 6x + 10 \leq 0$, cu obținerea mulțimii soluțiilor $S = (-\infty, -1] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$, asigură un răspuns imediat și pentru celelalte inecuații care diferă doar prin tipul de relație de inegalitate. Astfel:

- pentru $-4x^2 + 6x + 10 > 0$, mulțimea soluțiilor este complementară cu cea a inecuației inițiale, deci $\mathbb{R} - S = (-1, \frac{5}{2})$; răspunsul se poate deduce direct și din analiza semnului și zerourilor funcției f ;

- pentru $-4x^2 + 6x + 10 < 0$, mulțimea soluțiilor este cea a inecuației inițiale, mai puțin valorile corespunzătoare egalității cu 0, deci obținem $S - \{-1, \frac{5}{2}\} = (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$; răspunsul se poate deduce direct și din analiza semnului funcției f ;

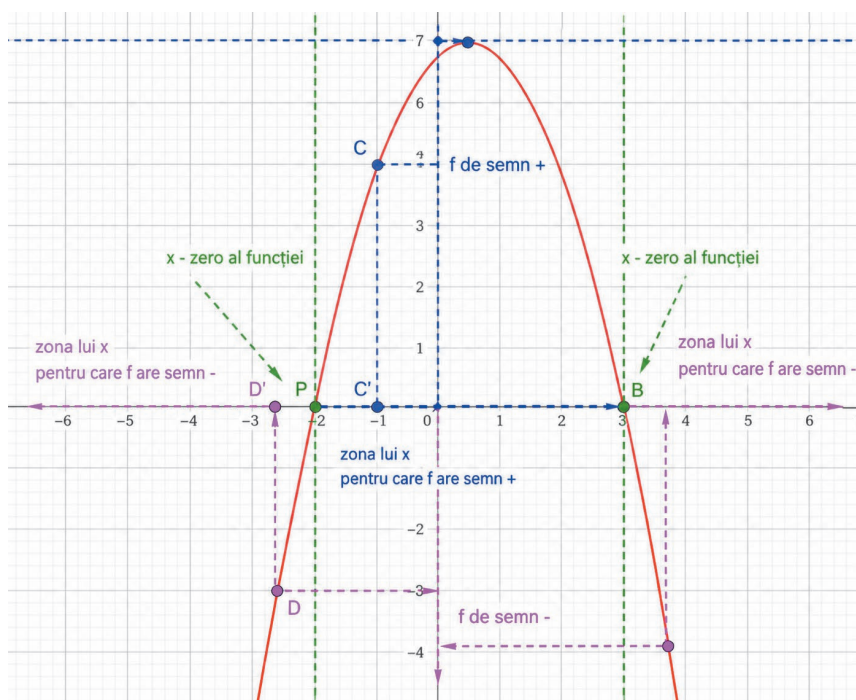
- pentru $-4x^2 + 6x + 10 \geq 0$, mulțimea soluțiilor este complementară cu cea a inecuației inițiale, la care se adaugă valorile corespunzătoare egalității cu 0, deci $(\mathbb{R} - S) \cup \{-1, \frac{5}{2}\} = [-1, \frac{5}{2}]$; răspunsul se poate deduce direct și din analiza semnului și zerourilor funcției f .

2. În condițiile în care avem reprezentată parabola asociată funcției, determinarea semnului funcției și a intervalelor de semn presupune:

- identificarea valorilor în care se anulează funcția, adică abscisele punctelor de intersecție dintre parabolă și axa Ox ;

- identificarea „bucăților” de parabolă aflate deasupra axei Ox , ca zone de semn pozitiv al funcției, respectiv situate sub axa Ox , ca zone de semn negativ al funcției;

- determinarea semidreptelor/segmentelor de pe axa Ox ce corespund proiecției fiecărei „bucăți” de parabolă determinate anterior, în acest sens având imaginea geometrică a valorilor necunoscute după semnul imaginilor funcției (+ sau -).



Reținem ca **pași de rezolvare a inecuațiilor de forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ (sau $\leq, >, <$)**, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$:

1. citirea inecuației în sensul identificării unor particularități care să permită prelucrare algebrică și/sau transformare prin echivalență a inecuației, cu aducere la o formă mai simplă (de exemplu, din punct de vedere al calculelor următoare);

2. asocierea funcției de gradul al doilea, f , cu legea exprimată prin membrul stâng al inecuației;

3. studiul semnului și valorii coeficientului dominant, ale discriminantului, după caz rezolvarea ecuației $f(x) = 0$ cu obținerea zerourilor funcției;

4. determinarea semnului funcției f și evidențierea mulțimii valorilor variabilei funcției pentru care semnul corespunde tipului de inegalitate cerut spre studiu;

5. formularea concluziei, cu precizarea mulțimii soluțiilor inecuației.



OBSERVAȚIE

După cazurile în care se situează discriminantul ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$) asociat studiului unei inecuații de gradul al doilea pe mulțimea numerelor reale, avem următoarele situații pentru mulțimea soluțiilor, S :

- dacă $\Delta > 0$, atunci $S \neq \mathbb{R}$ (nu există caz în care inecuația este verificată de orice $x \in \mathbb{R}$) și $S \neq \emptyset$ (orice inecuație în acest caz admite cel puțin o soluție număr real);
- dacă $\Delta = 0$, atunci S poate fi $\emptyset$, $S = \{\alpha\}$, unde α este zeroul funcției (soluția dublă a ecuației $f(x) = 0$), respectiv $\mathbb{R}$; orice inecuație în acest caz fie nu admite soluții, fie admite o unică soluție, fie admite orice valoare reală ca soluție, după tipul de relație de inegalitate;
- dacă $\Delta < 0$, atunci fie $S = \mathbb{R}$, fie $S = \emptyset$, deci în acest caz fie nu se admit soluții, fie orice valoare reală este soluție.

Inecuații de forma $f(x) \geq m$ (sau de tipul $\leq, >, <$), unde $f(x)$ este o expresie de gradul al doilea

Folosim exemplul dat anterior, $5x^2 - 4x + 1 \geq 0$, și faptul că relația este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, precum și că expresia din membrul stâng nu poate atinge minimul 0. Apare următoarea întrebare: *Există și, dacă da, care este cea mai mică valoare a expresiei $5x^2 - 4x + 1$ în condițiile în care $x \in \mathbb{R}$?*

Notând m această valoare, ea ar trebui să îndeplinească următorul sistem de condiții:

- oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $5x^2 - 4x + 1 \geq m$ (condiție necesară);
- oricare ar fi $n < m$, există $x \in \mathbb{R}$ pentru care $5x^2 - 4x + 1 < n$ (condiție suficientă, cea care asigură proprietatea de minim).

Am obținut astfel o **inegalitate de tipul $f(x) \geq m$** .

În continuare, prezentăm rezolvarea inecuației $5x^2 - 4x + 1 \geq m$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, de parametru $m \in \mathbb{R}$

A. Reducem studiul la forma standard: $5x^2 - 4x + 1 - m \geq 0$.

Notăm cu S mulțimea soluțiilor inecuației și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x^2 - 4x + 1 - m$, pentru care $a = 5 > 0$ și $\Delta = 16 - 20(1 - m) = 20m - 4$. Obținem cazurile:

$\Delta < 0$, deci $m < \frac{1}{5}$	g păstrează semn constant + (semnul lui a), deci $g(x) = 5x^2 - 4x + 1 - m > 0$, oricare $x \in \mathbb{R}$. Așadar, oricare ar fi $m \in (-\infty, \frac{1}{5})$, mulțimea soluțiilor inecuației $5x^2 - 4x + 1 \geq m$ este $S = \mathbb{R}$.
$\Delta = 0$, deci $m = \frac{1}{5}$	$g(x) = 5x^2 - 4x + 1 - \frac{1}{5} = 0$ admite soluția dublă $x_1 = x_2 = \frac{2}{5}$; g păstrează semn constant + (semnul lui a), deci $g(x) = 5x^2 - 4x + 1 - m > 0$, oricare $x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{5}\}$. Așadar, pentru $m = \frac{1}{5}$, mulțimea soluțiilor inecuației $5x^2 - 4x + 1 \geq \frac{1}{5}$ este $S = \mathbb{R}$.
$\Delta > 0$, deci $m > \frac{1}{5}$	$g(x) = 5x^2 - 4x + 1 - m = 0$ admite soluții reale și distincte, $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{5m-1}}{5}$; g păstrează semn + (semnul lui a) în afara soluțiilor, deci $g(x) = 5x^2 - 4x + 1 - m \geq 0$, oricare $x \in \mathbb{R} - (\frac{2 - \sqrt{5m-1}}{5}, \frac{2 + \sqrt{5m-1}}{5})$. Așadar, oricare ar fi $m \in (\frac{1}{5}, +\infty)$, mulțimea soluțiilor inecuației $5x^2 - 4x + 1 \geq m$ este $S = (-\infty, \frac{2 - \sqrt{5m-1}}{5}) \cup (\frac{2 + \sqrt{5m-1}}{5}, +\infty)$

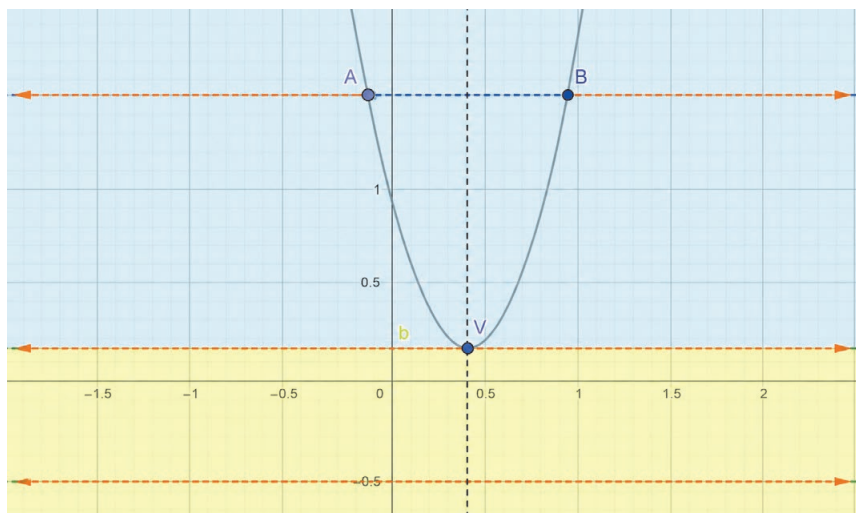


OBSERVAȚIE

- Primele două cazuri se puteau aborda cumulativ, dar dacă studiul inecuației presupune inegalitate strictă, atunci cele două cazuri rămân distincte.
- Doar în al doilea caz 0 este minimul valorilor pe care le poate lua g .

B. O alternativă la rezolvarea propusă anterior este aceea de a utiliza funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$ și de a aborda studiul relației în forma echivalentă $f(x) \geq m$, utilizând reprezentările geometrice ale parabolei asociate lui f și ale dreptelor orizontale, interesându-ne valorile necunoscutei x pentru care punctele parabolei se situează deasupra dreptei orizontale ce trece prin punctul de coordonate $(0, m)$.

În acest sens, în imaginea alăturată este reprezentată parabola asociată funcției f , orientată cu ramurile în sus și cu vârful $V\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, ceea ce implică și faptul că $\text{Im}f = \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$. Au fost evidențiate drepte orizontale corespunzătoare fiecărui caz, iar în cazul celei mai de sus sunt evidențiate și punctele de intersecție cu parabola, fiind sugerate și zonele pentru care abscisele punctelor verifică inegalitatea.



EXERCITII PROPUSE

- Pe mulțimea numerelor reale, rezolvă următoarele inecuații:
 a) $x^2 - 3x - 18 > 0$; b) $-x^2 + 4 \geq 0$; c) $5x^2 - 12x \leq 0$; d) $x^2 - \sqrt{5} < 0$.
- Pentru $x \in \mathbb{R}$, rezolvă inecuațiile în condițiile date:
 a) $4x^2 - 9 \geq 0$, unde $x < \sqrt{2}$; b) $2x^2 - 8x - 5 > 0$, unde $x > 2$.
- Determină numărul valorilor întregi care aparțin mulțimii soluțiilor inecuației $x^2 - 4x - 35 < 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră expresia $E(x) = x^2 + 4x + 5$, unde $x \in \mathbb{R}$.
 a) Arată că $x^2 + 4x + 5 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
 b) Admite $E(x)$ o minimă valoare? Justifică.
- Determină mulțimea soluțiilor inecuației $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.
- (Activitate pe grupe) Rezolvați inecuațiile:
 a) $-3x^2 + 5x - 2 \geq 0$; b) $3x^2 + 5x - 8 \geq 0$; c) $x^2 + 5x + 12 \geq 0$;
 d) $x^2 + 5x \geq 0$; e) $-x^2 + 3x \geq 0$; f) $-2x^2 + 5x - 6 \geq 0$.
- (Activitate pe grupe) Rezolvați inecuațiile:
 a) $\frac{-3x^2 + 5x - 2}{x^2 + 2x} \geq 0$; b) $\frac{3x^2 + 5x - 8}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$; c) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 3x + 4} > 3$; d) $\frac{x+7}{x-2} - \frac{3x+1}{x+7} > 9$;
 e) $\frac{2x+1}{x-3} \geq x+1$; f) $\frac{x-1}{2x+1} < \frac{3}{2x+1}$; g) $\frac{2x+1}{x^2+5x+6} \geq \frac{4x-1}{2x^2+3x+2}$.
- Un obiect este aruncat vertical; înălțimea, ca funcție de timp, este $h(t) = -2t^2 + 14t$. Determină intervalul de timp în care obiectul se află deasupra solului.
- Profitul unei firme este descris cu ajutorul legii $P(x) = -x^2 + 10x - 16$. Determină intervalul de prețuri pentru care profitul este strict pozitiv.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Determină valorile reale ale lui m pentru care inecuația $f(x) \geq m$ are soluții reale.

11. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $y = ax^2 + (a + 2)x - 2$ să se situeze deasupra axei Ox .
12. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $y = (a + 1)x^2 + (a - 3)x - 1$ să se situeze dedesubtul dreptei $y = 4$.
13. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taie axa Ox în două puncte distincte?
a) $f(x) = (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + 2 + m$; b) $f(x) = (-m + 1)x^2 + mx + 2 + m$.
14. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu intersectează axa Ox ?
a) $f(x) = (2m - 1)x^2 + (m - 1)x - m$; b) $f(x) = 2mx^2 + (m + 1)x + 2 + m$.
15. Se consideră că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
a) $f(x) = mx^2 + (3m - 2)x + m + 2$; b) $f(x) = (m - 1)x^2 + (3m + 2)x + m + 1$.
16. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
a) $f(x) = mx^2 + 3mx + 2$; b) $f(x) = mx^2 + mx + 2 + m$.
17. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ următoare să fie bine definite:
a) $f(x) = \sqrt{mx^2 + (3m - 2)x + 2}$; b) $f(x) = \frac{2x + 3}{mx^2 + (3m - 2)x + 2 + m}$.
18. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât inecuația $mx^2 + (m - 3)x - m + 4 > 0$ să nu aibă nici o soluție reală.
19. Se consideră x_1, x_2 rădăcinile reale ale ecuației $x^2 + (2m + 1)x + m - 1 = 0$. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să verifice relația:
a) $x_1^3 + x_2^3 < x_1 + x_2$; b) $x_1^2 + x_2^2 \geq x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$.
20. Se consideră ecuația $ax^2 + (3a + 1)x + a + 1 = 0$. Determină parametrul real a astfel încât rădăcinile ei reale să verifice relația:
a) $1 < x_1^2 + x_2^2 \leq 7$; b) $x_1^3 + x_2^3 \leq 3(x_1 + x_2)$.



PROIECT (ACTIVITATE PE GRUPE)

Laborator de cercetare matematică: parabole în mișcare

Se consideră familia de funcții de gradul al doilea, de lege $f_m(x) = x^2 + mx + 1, m \in \mathbb{R}$. Fără a efectua calcule complete de la început, formulați mai întâi ipoteze pe baza experimentării grafice.

Investigați:

1. Cum se modifică poziția vârfului atunci când parametrul m crește?
2. Există valori ale lui m pentru care parabola:
 - ▶ intersectează axa Ox în două puncte?
 - ▶ este tangentă la axa Ox ?
 - ▶ nu intersectează axa Ox ?
3. Ce proprietăți rămân neschimbate indiferent de valoarea lui m ?
4. Există un *loc geometric* (mulțime de puncte din plan care îndeplinesc aceeași condiție/același set de condiții) descris de toate vârfurile parabolelor obținute?

Produs final: *Elaborați o fișă de cercetare de 3 pagini care să conțină:*

- ipotezele formulate;
- verificările realizate;
- discuțiile și concluziile.



Sisteme de ecuații care conțin ecuații de gradul al doilea. Interpretare geometrică

Interpretarea geometrică a ecuațiilor de forma $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, unde $f(x)$ este o expresie de gradul al doilea, iar $g(x)$ este o expresie constantă sau de gradul I sau de gradul al doilea

► Cazul 1.

Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = m$ (1), în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, unde $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$.

Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ (funcție de gradul al doilea) și $g(x) = m$ (funcție constantă).

A determina soluțiile ecuației (1) este echivalent cu a determina abscisele punctelor de intersecție dintre parabola asociată funcției de gradul al doilea și dreapta orizontală asociată funcției constante.

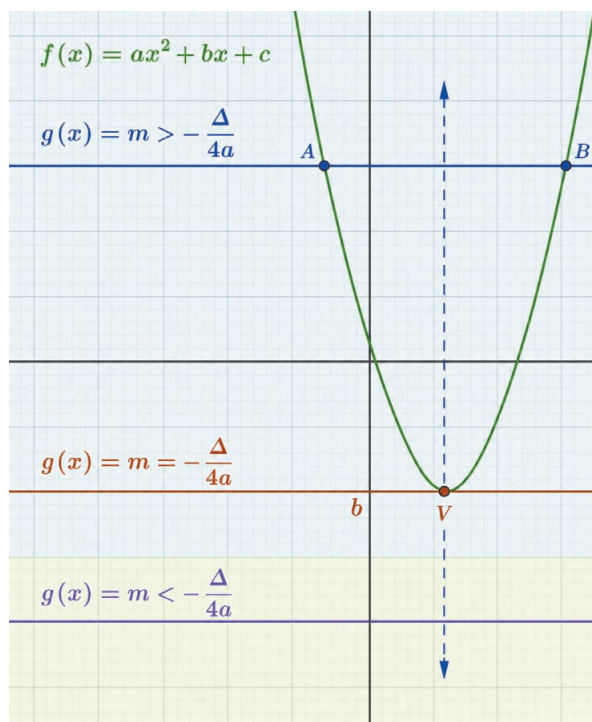
(1) este echivalentă cu ecuația $ax^2 + bx + (c - m) = 0$. Cum $\Delta = b^2 - 4a(c - m)$, în funcție de valorile lui m interpretarea pe care o dăm este:

- ecuația poate avea două soluții diferite, situație în care parabola și dreapta orizontală se intersectează în două puncte distincte; această situație se realizează în condițiile următoare: dacă $a > 0$, atunci $m > y_v = -\frac{\Delta}{4a}$; dacă $a < 0$, atunci $m < y_v = -\frac{\Delta}{4a}$;

- ecuația poate avea două soluții egale, situație în care parabola și dreapta orizontală se intersectează într-un unic punct (de tangență, în acest caz corespunzător la o intersecție în două puncte confundate); această situație se realizează în condiția $m = y_v = -\frac{\Delta}{4a}$;

- ecuația nu admite soluții reale, situație în care parabola și dreapta orizontală nu au puncte comune; această situație se realizează în condițiile următoare:

dacă $a > 0$, atunci $m < y_v = -\frac{\Delta}{4a}$; dacă $a < 0$, atunci $m > y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.



Legătura cu studiul injectivității, surjectivității și bijectivității funcțiilor de gradul al doilea

Considerăm în continuare funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ (funcție de gradul al doilea) și $g(x) = m$ (funcție constantă), $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$.

Conform celor prezentate anterior, rezultă că:

- oricare ar fi $a > 0$, există $m > y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ astfel încât dreapta orizontală reprezentată de g intersectează parabola reprezentată de f în două puncte de abscise distincte și de aceeași ordonată, deci f nu este injectivă; la fel în cazul în care $a < 0$, pentru $m < y_v = -\frac{\Delta}{4a}$;

- oricare ar fi $a > 0$, există $m < y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ astfel încât dreapta orizontală reprezentată de g nu intersectează parabola reprezentată de f , deci f nu ia valori mai mici decât $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, în concluzie f nu este surjectivă; la fel în cazul $a < 0$, pentru valori mai mari ca $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$;

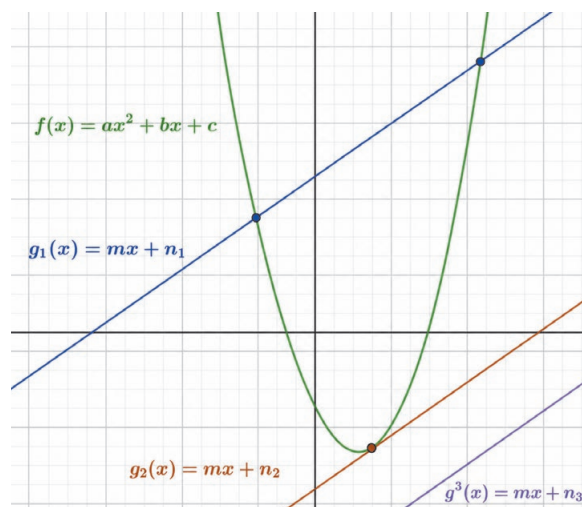
În concluzie, funcțiile de gradul al doilea nu sunt nici bijective, drept consecință nici inversabile.

► Cazul 2

Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = mx + n$ (1), în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, unde $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$ și $a, m \neq 0$

Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ (funcție de gradul al doilea) și $g(x) = mx + n$ (funcție de gradul I).

A determina soluțiile ecuației (1) este echivalent cu a determina abscisele punctelor de intersecție dintre parabola asociată funcției de gradul al doilea și dreapta oblică asociată funcției de gradul I. Ecuația (1) este echivalentă cu ecuația $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ (2). Studiul continuă pe cazurile determinate de discriminantul ecuației (2).

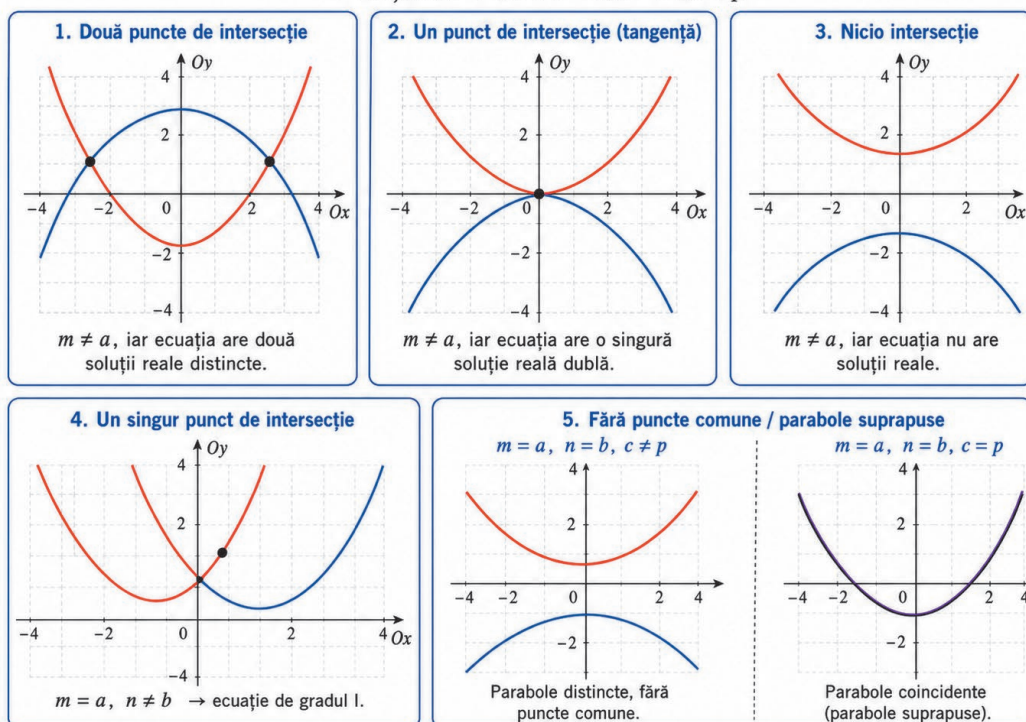


► Cazul 3

Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p$ (1), în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, unde $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$ și $a, m \neq 0$

Cazuri de intersecție dintre două parabole

Ecuația $ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p$



Două parabole de gradul al doilea pot avea 0, 1 sau 2 puncte comune, iar în caz particular pot coincide.

Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ și $g(x) = mx^2 + nx + p$ (funcții de gradul al doilea).

A determina soluțiile ecuației (1) este echivalent cu a determina abscisele punctelor de intersecție dintre parabolele asociate acestor funcții.

Ecuația (1) este echivalentă cu ecuația $(a - m)x^2 + (b - n)x + (c - p) = 0$ (2). Studiul continuă în funcție de tipul ecuației (2), astfel:

● $m \neq a$: ecuație de gradul al doilea care admite cel mult două soluții distincte, după semnul discriminantului Δ ; parabolele asociate se intersectează în 2 puncte distincte sau într-un unic punct (tangente) sau nu au intersecție;

● $m = a$ și $n \neq b$: ecuație de gradul I care admite o unică soluție; parabolele asociate se intersectează într-un unic punct;

● $m = a$, $n = b$ și $p \neq c$: ecuația nu admite soluții reale; parabolele asociate nu se intersectează;

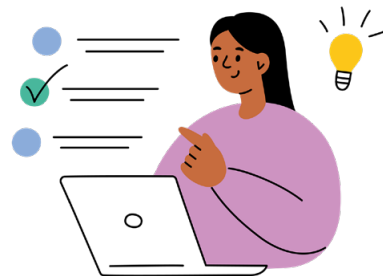
● $m = a$, $n = b$ și $p = c$: mulțimea soluțiilor ecuației este $\mathbb{R}$; parabolele asociate se confundă (cazul de suprapunere a reprezentărilor, toate punctele lor sunt comune).

În concluzie, două parabole asociate funcțiilor de gradul al doilea fie nu au puncte comune, fie au 1 sau 2 puncte comune, fie au toate punctele în comun.

Sisteme formate dintr-o ecuație de gradul I și o ecuație de gradul al doilea, în două necunoscute

Sisteme de forma
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases}$$
 în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$

și cu coeficienți reali, cu $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ și $a_2 \neq 0$.



Sistemele de acest tip sunt un caz particular al celor prezentate anterior. Abordarea acestui caz o facem pentru că permite și o interpretare geometrică, prin reprezentare în planul în care este fixat un reper cartezian. Din punct de vedere al rezolvării algebrice, rămân aceleași etape de parcurs ca la cazul general.

Pentru început, asociem ecuației de gradul al doilea funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Astfel, orice soluție a ecuației de gradul al doilea este de forma $(x, y) = (x, g(x))$, $x \in \mathbb{R}$, corespunzând punctelor parabolei asociate funcției g .

Pentru a interpreta geometric soluțiile sistemului, este necesar să identificăm ce configurație geometrică asociem tuturor soluțiilor ecuației $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Prezentăm următoarele cazuri:

● Cazul $b_1 \neq 0$. Ecuația se rescrie $y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$ și notăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$, care reprezintă fie o funcție constantă pentru $a_1 = 0$, admițând ca reprezentare geometrică o dreaptă orizontală, fie o funcție de gradul I pentru $a_1 \neq 0$, admițând ca reprezentare geometrică o dreaptă oblică.

● Cazul $b_1 = 0$. Ecuația se rescrie $x = -\frac{c_1}{a_1}$, condiția inițială asigurând sensul fracției ($a_1 \neq 0$). Interpretarea pe care o dăm este că oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$, ecuația inițială în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$ admite ca mulțime a soluțiilor pe $\left\{ \left(-\frac{c_1}{a_1}, y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$. Toate punctele care au drept coordonate perechile acestei mulțimi au proprietatea că au aceeași abscisă, iar ordonata parcurge toată mulțimea numerelor reale, deci punctele formează dreapta verticală care intersectează axa Ox în punctul de coordonate $\left(-\frac{c_1}{a_1}, 0 \right)$.

În concluzie, în ambele cazuri, ca interpretare geometrică a ecuației de gradul I în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$, aceasta corespunde unei drepte (orizontale, oblice sau verticale). Astfel, interpretarea geometrică a soluțiilor sistemului este că reprezintă punctele de intersecție dintre dreapta corespunzătoare ecuației de gradul I și parabola asociată ecuației de gradul al doilea. În acest sens, dacă avem asociată reprezentarea geometrică pentru un astfel de sistem, putem vizualiza rapid numărul de puncte de intersecție (0, 1 sau maximum 2), precum și estimarea soluțiilor, de exemplu pentru o reprezentare pe foaie milimetrică.

Observație: Dacă, în cazul dreptelor orizontale sau oblice, acestea se pot situa în planul în care am fixat un reper cartezian astfel încât să nu se intersecteze cu parabola, să aibă un unic punct de intersecție (tangență) sau să aibă două puncte de intersecție cu aceasta, în cazul dreptelor verticale, oricare ar fi o astfel de dreaptă, va intersecta parabola în câte un singur punct. Verifică algebric această particularitate a cazului!

Sisteme de ecuații omogene cu două necunoscute

O **ecuație** este **omogenă** dacă toți termenii care conțin necunoscutele sunt de același grad.



EXEMPLE

- $3x + 2y - z = 0$ este ecuație omogenă de gradul I, în necunoscutele x, y și z
- $a^2 - 4ab = 0$ este ecuație omogenă de gradul al doilea, în necunoscutele a și b ;
- $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 0$ este ecuație omogenă de gradul al doilea, în necunoscutele x, y și z .

În cele ce urmează, prezentăm forma generală a unui **sistem omogen, cu două necunoscute**:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1 \\ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = d_2 \end{cases}, \text{ în necunoscutele } x, y \in \mathbb{R}, \text{ cu coeficienți reali, cu } a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0 \text{ și } a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Condițiile asupra coeficienților asigură încadrarea ambelor ecuații în clasa celor de gradul al doilea. În rezolvarea acestui tip de sisteme identificăm 3 cazuri, după tipul termenilor liberi:

► **Cazul 1.** Ambii termeni liberi sunt diferiți de 0: $d_1 \cdot d_2 \neq 0$.

Utilizăm metoda reducerii pentru a obține o nouă ecuație de termen liber nul. Noua ecuație păstrează proprietatea de omogenitate și, generic, va fi de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, unde $a = a_1 d_2 - a_2 d_1$, $b = b_1 d_2 - b_2 d_1$ și $c = c_1 d_2 - c_2 d_1$ (1).

Având în vedere strategia de rezolvare, după cazurile identificate anterior, a unei astfel de ecuații, după determinarea mulțimii soluțiilor acestei ecuații alegem una dintre ecuațiile sistemului și, prin verificare directă, păstrăm în mulțimea soluțiilor sistemului doar acele soluții ale ecuației (1) care verifică ecuația sistemului.



PROPRIETATE

Orice ecuație omogenă de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$, admite soluția nulă, $(0, 0)$.

Nicio ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$, în condiția $d \neq 0$, nu admite soluție nulă, $(0, 0)$.



EXEMPLU REZOLVAT

Considerăm sistemul $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 - 5 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 4 = 0 \end{cases}$, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$.

Pentru $y = 0$, sistemul devine $\begin{cases} x^2 = 5 \\ x^2 = 2 \end{cases}$. Cazul nu admite soluții, $S_1 = \emptyset$.

Continuăm cu studiul cazului $y \neq 0$:

- reducerea termenilor liberi, cu obținerea ecuației omogene de termen liber 0:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 - 5 = 0 \mid \cdot 4 \\ 2x^2 - 3xy + 4 = 0 \mid \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow 14x^2 - 31xy + 12y^2 = 0 \quad (1);$$

- în notația $t = \frac{x}{y}$, obținem din (1): $14\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 31\left(\frac{x}{y}\right) + 12 = 0$, deci $14t^2 - 31t + 12 = 0$ (2);

- noua ecuație admite $\Delta = 289 = 17^2$, iar ca soluții, pe $t_1 = \frac{1}{2}$ și $t_2 = \frac{12}{7}$;

● pentru $t_1 = \frac{1}{2}$, deci $y = 2x$, substituind în a doua ecuație a sistemului obținem $x^2 = 1$, care admite soluțiile reale $x_1 = 1$, căreia îi corespunde $y_1 = 2$, respectiv $x_2 = -1$, căreia îi corespunde $y_1 = -2$; în concluzie, mulțimea soluțiilor cazului este $S_2 = \{(1, 2), (-1, -2)\}$;



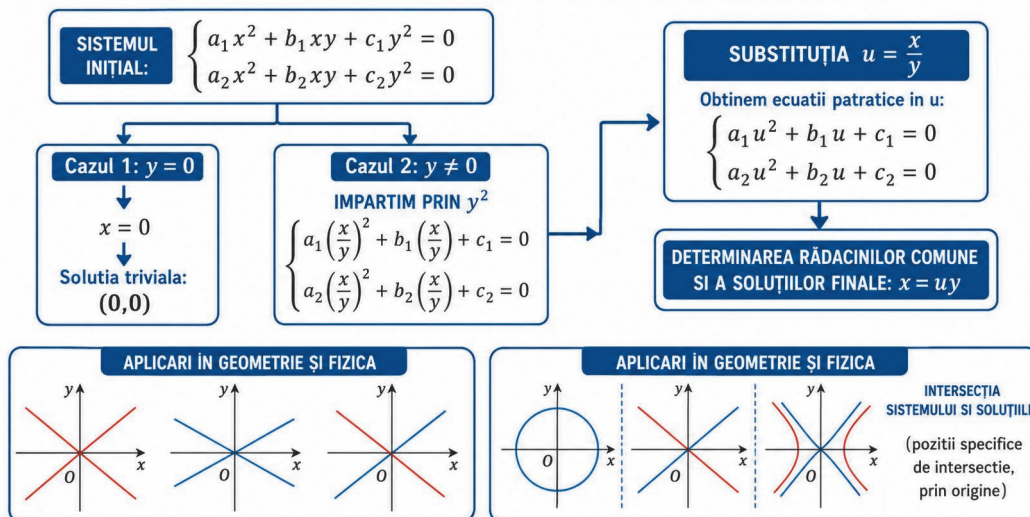
● pentru $t_2 = \frac{12}{7}$, deci $y = \frac{7}{12}x$, substituind tot în a doua ecuație a sistemului obținem $x^2 = -16$, care nu admite soluții reale; în concluzie, mulțimea soluțiilor cazului este $S_3 = \emptyset$.

Reunind toate cazurile discutate, sistemul admite ca mulțime a soluțiilor pe $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{(1, 2), (-1, -2)\}$.



OBSERVĂ ȘI REȚINE

REZOLVAREA SISTEMELOR OMOGENE DE GRADUL II



► **Cazul 2.** Sisteme omogene de gradul al doilea, $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2 = 0 \end{cases}$, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$ și cu coeficienți reali, cu $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0$ și $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0$, în care cel puțin un termen liber este nul ($d_1 \cdot d_2 = 0$).

Situațiile cazului sunt, mai puțin ordinea ecuațiilor în scrierea sistemului:

$$A) \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2 = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad B) \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0 \end{cases}$$

În ambele situații, pași de parcurs sunt:

● considerăm cazul unei necunoscute egale cu 0, fie aceasta y ; obținem prin înlocuire sistemele:

A1) $\begin{cases} a_1x^2 = 0 \\ a_2x^2 = -d_2 \end{cases}$, respectiv B1) $\begin{cases} a_1x^2 = 0 \\ a_2x^2 = 0 \end{cases}$; ambele cazuri conțin doar ecuații pătratice, deci am redus rezolvarea la situații cunoscute din alte contexte; în urma rezolvării, se determină mulțimea soluțiilor cazului, S_1 ;

● considerăm cazul $y \neq 0$; cum în ambele situații avem deja o ecuație omogenă cu termen liber egal cu 0, pentru o astfel de ecuație utilizăm substituția $t = \frac{x}{y}$ pentru a obține ecuația de forma $at^2 + bt + c = 0$; dacă ecuația nu admite soluții reale, sistemul nu admite soluții reale, $S_2 = \emptyset$; dacă ecuația admite soluții, continuăm rezolvarea cu etape similare prezentate la cazul 1.



EXEMPLU REZOLVAT

Considerăm sistemul $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases}$, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$.

Pentru $y = 0$, sistemul devine $\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases}$. Cazul nu admite soluții, $S_1 = \emptyset$.



Continuăm cu studiul cazului $y \neq 0$:

- în notația $t = \frac{x}{y}$ obținem din prima ecuație: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 2 = 0$, deci $t^2 - t - 2 = 0$;
- noua ecuație admite soluțiile $t_1 = -1$ și $t_2 = 2$;
- pentru $t_1 = -1$, obținem $x = -y$ și, substituind în a doua ecuație a sistemului, obținem $y^2 = 4$, care admite soluții reale, $y_1 = -2$, pentru care $x_1 = -y_1 = 2$, respectiv $y_2 = 2$, pentru care $x_2 = -y_2 = -2$; în concluzie, $S_2 = \{(2, -2), (-2, 2)\}$;
- pentru $t_2 = 2$ obținem $x = 2y$ și, substituind în a doua ecuație a sistemului, obținem $10y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = \frac{2}{5}$, care admite soluții reale, $y_3 = -\frac{\sqrt{10}}{5}$, pentru care $x_3 = 2y_3 = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$, respectiv $y_4 = \frac{\sqrt{10}}{5}$, pentru care $x_4 = 2y_4 = \frac{2\sqrt{10}}{5}$; în concluzie, $S_3 = \left\{\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$;

În concluzie, sistemul admite ca mulțime a soluțiilor pe $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{(2, -2), (-2, 2), \left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$.

Observație: nu orice sistem de ecuații omogene cu toți termenii liberi 0 admite doar soluția nulă.

Sisteme de ecuații simetrice în două necunoscute

Numim **expresie simetrică** în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$ orice expresie care nu se modifică atunci când schimbăm între ele necunoscutele, cu excepția ordinii acestora. Notând expresia prin $E(x, y)$, aceasta este simetrică dacă $E(x, y) = E(y, x)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Un **sistem de ecuații simetrice** trebuie să îndeplinească și condiția ca fiecare ecuație a sa să fie ecuație simetrică. Dacă pentru alte categorii de sisteme putem da o formă generală, în acest caz nu putem asocia o astfel de formă, dar exemplificăm pentru a putea avea clar acest tip:

$$a) \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 16xy = -1 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}; \quad b) \begin{cases} x^2 y^2 - x - y = 37 \\ xy = -6 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}; \quad c) \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Deși pe anumite situații particulare se pot utiliza alte metode, abordarea generală a acestui tip de sisteme în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$ presupune parcurgerea următorilor **pași**:

● utilizarea notațiilor $x + y = s$ și $xy = p$, $s, p \in \mathbb{R}$ pentru a rescrie sistemul în noile necunoscute s și p ; pe exemplele date, fiecareia dintre cele trei situații le corespund sistemele în necunoscutele $s, p \in \mathbb{R}$:

$$a) \begin{cases} 2s = 1 \\ 16p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ p = -\frac{1}{16} \end{cases}, \text{ sistemul reducându-se la unul de ecuații de gradul I;}$$

b) $\begin{cases} p^2 - s = 37 \\ p = -6 \end{cases}$, sistemul reducându-se la unul format dintr-o ecuație de gradul I și o ecuație de gradul al doilea;

$$c) \begin{cases} s^2 - 5p = -1 \\ (s^2 - 2p)^2 - 2p^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 - 5p = -1 \\ s^4 - 4s^2 p + 2p^2 = 17 \end{cases}, \text{ sistemul rezolvându-se prin metoda substituției;}$$

● rezolvarea sistemului în necunoscutele s și p , în funcție de particularitățile sale, apoi rezolvarea ecuației $t^2 - st + p = 0$ pentru care, atunci când admite soluții, t_1 și t_2 , acestea determină perechile ordonate ce reprezintă soluțiile sistemului inițial corespunzătoare cazului analizat, (t_1, t_2) și (t_2, t_1) , sau reducându-se la o singură pereche, atunci când $t_1 = t_2$; pentru situațiile exemplificate anterior, obținem:

$$a) t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{16} = 0, \text{ cu } \Delta = \frac{1}{4} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2} > 0, \text{ cu soluțiile } t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}, \text{ de unde, pentru sistemul inițial, avem}$$

$$S = \left\{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1-\sqrt{2}}{4}\right)\right\};$$

b) substituind $p = -6$ în prima ecuație a sistemului obținem rezultă $s = -1$; $t^2 + t - 6 = 0$ admite soluțiile $t_1 = 2$ și $t_2 = -3$, deci sistemul admite soluțiile $S = \{(-3, 2), (2, -3)\}$;

c) substituind $p = \frac{s^2 + 1}{5}$ în a doua ecuație a sistemului obținem, prin prelucrare algebrică obținem $7s^4 - 16s^2 - 423 = 0$; folosind notația auxiliară $s^2 = q$, unde $q \geq 0$, și rezolvând ecuația $7q^2 - 16q - 423 = 0$, rezultă $\Delta = 110^2$, cu soluțiile $q_1 = 9$ și $q_2 = -\frac{94}{14} < 0$; cum convine doar soluția pozitivă, din $s^2 = 9$ rezultă $s_1 = 3$, implicând $p_1 = 2$ (1), respectiv $s_1 = -3$, cu aceeași valoare pentru $p_2 = 2$ (2); în cazul (1), din ecuația $t^2 - 3t + 2 = 0$ se obțin soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = 2$, implicând pentru sistemul inițial $S_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$; în cazul (2), din ecuația $t^2 + 3t + 2 = 0$ se obțin soluțiile $t_1 = -1$ și $t_2 = -2$, implicând pentru sistemul inițial $S_2 = \{(-1, -2), (-2, -1)\}$; în concluzie, mulțimea soluțiilor sistemului este $S = S_1 \cup S_2 = \{(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)\}$.

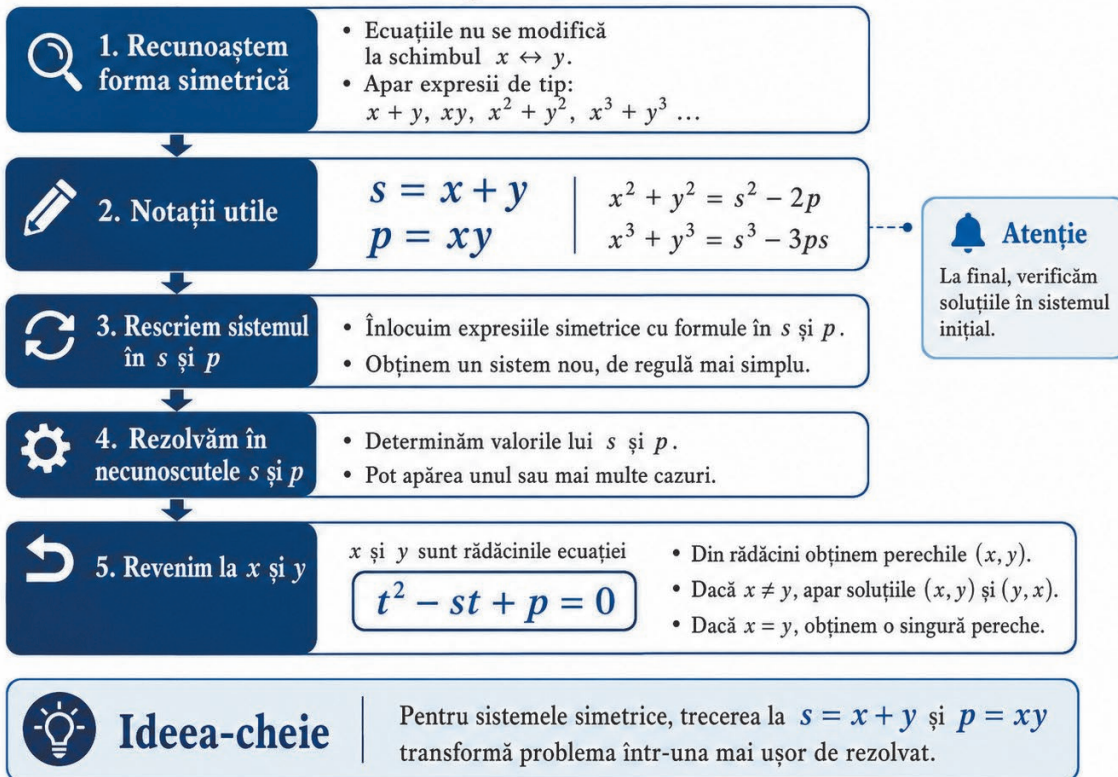


PROPRIETATE

Orice sistem de ecuații simetrice în două necunoscute care admite perechea ordonată (α, β) ca soluție, admite și soluția reprezentantă de perechea ordonată (β, α) .

SISTEME DE ECUAȚII SIMETRICE ÎN DOUĂ NECUNOSCUTE

Strategie de rezolvare





EXERCIIȚII PROPUSE

1. Activitate în pereche:

a) Rezolvați sistemele următoare, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x^2 + y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - \sqrt{2} = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 8 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + xy = 0 \end{cases}$$

b) Studiați, în funcție de valorile parametrului real m , sistemul $\begin{cases} mx - y - 2 = 0 \\ -2x^2 + y^2 + x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$

2. Activitate în pereche:

a) Rezolvați prin metoda substituției sistemele următoare, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + \frac{3}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y = 2x^2 - x - 1 \end{cases}$$

b) Utilizând eventual foi cu hașură milimetrică, asociați interpretarea geometrică pentru fiecare dintre sistemele propuse la punctul a) și verificați soluțiile obținute prin rezolvarea algebrică.

3. Activitate pe grupe:

a) Studiați sistemele următoare, în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$, după valorile parametrilor reali a, b, c, m, n :

$$\begin{cases} y = mx + 1 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x + n \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ y = ax^2 - 3x + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + bx + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 3x + c \end{cases}$$

b) Folosind aplicații dedicate, reprezentați sistemele date pentru diferite valori ale parametrilor. Formulați concluzii privind comportamentul fiecăruia, explicând tipul de variație determinat de parametrul cazului.

c) Alegeți o funcție de gradul al doilea pe care s-o reprezentați geometric în raport cu reperul cartezian xOy . Alegeți un punct de pe parabolă și considerați toate dreptele care conțin acest punct. Analizați poziția dreptelor față de parabolă și numărul punctelor de intersecție cu aceasta. Formulați algebric situația dintre drepte și parabolă și determinați ce condiții algebrice trebuie impuse coeficienților ecuației corespunzătoare dreptei pentru a avea: o unică intersecție cu parabola; două puncte distincte de intersecție cu parabola. Realizați același studiu pentru parabola considerată, în cazul în care alegerea punctului este din interiorul parabolei (intuitiv – punct dintre ramuri), respectiv din exteriorul parabolei.

4. Activitate pe grupe:

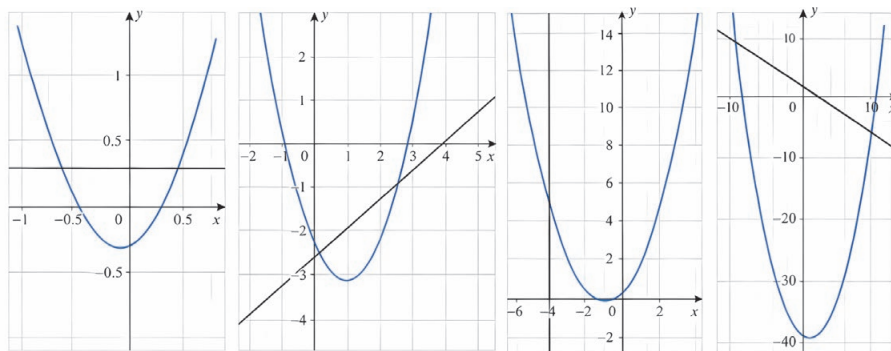
Se consideră sistemele următoare în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 39 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3y - 1 = 0 \\ y = 2x^2 + x - \frac{2}{9} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 4 = 0 \\ y = x^2 + x \end{cases}$



Alăturat aveți reprezentarea geometrică a acestora, într-o ordine aleatoare. Asociați fiecare sistem cu reprezentarea sa în plan. În baza lecturii reprezentărilor geometrice, precizați în fiecare caz numărul de soluții ale fiecărui sistem și, fără a-l rezolva, estimați valorile soluțiilor. Comparați estimările voastre cu ale altor colegi.

5. Activitate pe grupe: Rezolvați următoarele sisteme simetrice în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 3 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - 3xy = 12 - \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 5 \end{cases}, x \cdot y \neq 0; \quad \text{d) } \begin{cases} x^2y + xy^2 = 0 \\ x^2y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

Abordați întâi individual rezolvarea câte unui sistem, apoi comparați la nivelul grupei strategiile de rezolvare și rezultatele obținute.

6. Activitate pe grupe: Se consideră sistemele simetrice în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$, de forma $\begin{cases} x + y = \alpha \\ xy = \alpha \end{cases}$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiați aceste sisteme, în funcție de valorile parametrului real α . La nivelul grupei, formulați concluziile ce se desprind din studiu. Comparați-le apoi cu cele de la nivelul celorlalte grupe.

7. Activitate pe grupe: Construiți câte un exemplu de sistem simetric de două ecuații în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$, știind mulțimea soluțiilor în fiecare dintre următoarele cazuri:

$$\text{a) } S = \{(-2, 5), (5, -2)\}; \quad \text{b) } S = \{(0, 0), (-2, 5), (5, -2)\}; \quad \text{c) } S = \{(-2, 5), (5, -2), (1, 3), (3, 1)\}.$$

8. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații în necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = x - 2 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ y = x^2 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

9. Fără calcule complete, precizează câte soluții reale are sistemul $\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$, și justifică prin interpretare geometrică pentru cazurile: $m = 0, m = 1, m = -2$.

B.

10. Rezolvă și interpretează geometric (dreaptă – parabolă): $\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{R}$ parametru. Caracterizează poziția dreptei față de parabolă (secantă, tangentă, exterioară).

11. Discută numărul de soluții ale sistemului $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = m \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$, în funcție de valorile reale ale parametrului m .

12. Rezolvă sistemul omogen $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5x \\ x^2 + y^2 = 5y \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Compară strategia ta de rezolvare cu a altor colegi.

Folosește o aplicație de generare automată a reprezentării grafice a sistemului și observă tipul de curbă pe care-l generează fiecare dintre ecuații. Justifică afirmația următoare: *Soluțiile sistemului se situează pe dreapta $y = x$.*

13. Profitul P (în mii lei) în funcție de preț, x , este $P(x) = -x^2 + 6x - 8$. Compania acceptă producția doar dacă $P(x) \geq \frac{1}{2}$.

- a) Scrie condiția ca ecuație și interpretează-o ca intersecție între parabolă și o dreaptă.
b) Determină intervalul de prețuri acceptabile (mii lei).

14. Care dintre următoarele drepte intersectează parabola $y = x^2 + 5x + 12$ și în câte puncte?

- a) $2x + y + 3 = 0$; b) $y = x + 1$; c) $y = x + 9$; d) $y = -3x - 4$. Reprezintă grafic.

15. Care dintre următoarele perechi de parabole se intersectează și în câte puncte?

- a) $y = x^2 + 5x + 12, y = 2x^2 + 5x + 8$; b) $y = -2x^2 + x + 1, y = x^2 + 5x + 12$;
c) $y = x^2 + x + 1, y = x^2 + 5x + 12$; d) $y = x^2 + 5x + 12, y = x^2 + 5x + 13$.

16. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, dreapta $y = 3x + 2$ intersectează parabola $y = mx^2 + (m - 1)x$ în:

- a) două puncte distincte; b) un singur punct; c) nici un punct?

17. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, parabolele $y = (m - 3)x^2 + (2m + 1)x + m - 3$ și $y = (m + 2)x^2 + (3m + 1)x + 2m + 3$ se intersectează în două puncte distincte?



O parabolă nu este doar un grafic, ci modelul unui fenomen care se schimbă, atinge un optim și are un punct critic.

CE POTI UTILIZA ȘI TRANSFERA?

1. Analizezi situații reale cu creșteri și descreșteri (ex.: anunțarea unui obiect, traiectorii, variații de temperatură).
2. Găsești valori optime (maxim de profit, cost minim, eficiență maximă).
3. Modelezi și interpretezi dependențe neliniare în economie, fizică, tehnologie, știință.
4. Folosești mai multe reprezentări pentru aceeași idee: formulă $\leftrightarrow$ tabel $\leftrightarrow$ grafic $\leftrightarrow$ interpretare.
5. Conectezi algebra cu geometria și înțelegi de ce răspunsurile au sens.
6. Transferi metoda în probleme noi, chiar dacă sunt formulate diferit.

ÎNȚEBĂ-ȚE ÎNȚOTDEAUNA:

- ✓ Ce înși spune această formulă despre situație?
- ✓ Ce arată graficul?
- ✓ Ce înseamnă rădăcinile?
- ✓ Unde este extremul și ce reprezintă?
- ✓ Are rezultatul sens în contextul dat?



FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA: MAI MULT DECÂT O FORMULĂ

O IDEE CARE DESCRIE, EXPLICĂ ȘI OPTIMIZEAZĂ LUMEA REALĂ.

MAREA IDEE

Funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ descrie o variație care are un vârf și o direcție.

1. RĂDĂCINILE
Soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

2. AXA DE SIMETRIE
 $x_v = -\frac{b}{2a}$
Parabola este simetrică față de această dreaptă.

3. VÂRFUL PARABOLEI
 $V(x_v, y_v)$, unde $y_v = f(x_v)$.
Este punctul de minim (dacă $a > 0$) sau de maxim (dacă $a < 0$).

4. SENSUL LUI a
• $a > 0$ – parabola este orientată în sus.
• $a < 0$ – parabola este orientată în jos.

5. VARIATIA
• Dacă $a > 0$:
descreșc pe $(-\infty, x_v]$, cresc pe $[x_v, +\infty)$.
• Dacă $a < 0$:
cresc pe $(-\infty, x_v]$, descreșc pe $[x_v, +\infty)$.

6. DISCRIMINANTUL $\Delta = b^2 - 4ac$
Spune câte soluții reale are ecuația, adică cum intersectează parabola axa Ox.

CE AR TREBUI SĂ RĂMÂNĂ?

Nu ai înțeles complet o funcție de gradul al doilea până când nu poți trece natural între:
ecuație $\leftrightarrow$ tabel $\leftrightarrow$ grafic $\leftrightarrow$ interpretare $\leftrightarrow$ concluzie.

O formulă devine cu adevărat utilă atunci când poate explica un fenomen real.

UNDE ÎNȚĂLEȘTI FUNCȚII DE GRADUL AL DOILEA?

- Traectoria unui obiect (aruncare, lovitură).
- Arcuri, parabole în arhitectură și design.
- Cost total, venit.
- Distanța de frânare (depinde de viteză).
- Semnale, antene, optimizarea formelor.

Matematica devine puternică atunci când aceeași idee poate fi calculată, reprezentată și interpretată.

ERORI CARE SCHIMBĂ TOT!

1. Confundarea semnului lui a : schimbă orientarea parabolei și tipul extremului.
 $a > 0$ $a < 0$
2. Interpretarea greșită a lui Δ : uităm că el descrie intersecțiile cu Ox.
3. Credința că soluția la inecuație este mereu „între rădăcini”. Depinde de semnului lui a și de tipul inecuației!
4. Folosirea formulelor fără interpretare. Răspunsul corect trebuie să aibă și sens.
5. Separarea algebrei de grafic. Fără grafic, pierzi înțelegerea fenomenului.

ȚINE MINTE!

Matematica nu este doar despre a obține rezultatul corect, ci despre a înțelege DE CE este corect și CE ÎȚI SPUNE despre lumea reală.

Gândește–interpretează–aplică–transferă! Aceasta este puterea matematicii!

Funcția de gradul al doilea – Sinteza

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{forma generală}} = \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}_{\text{forma canonică}}, \underbrace{a, b, c}_{\text{coeficienții}} \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Informații certe oferite de coeficientul dominant (a)

$a > 0$	$a < 0$
Parabola este <i>convexă</i> .	Parabola este <i>concavă</i> .
Funcția admite <i>minim</i> , punctul de minim de pe reprezentarea grafică fiind vârful parabolei $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Punctul de minim este $x_v = x_{\min} = -\frac{b}{2a}$. Valoarea minimă este $y_v = y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(x_v)$.	Funcția admite <i>maxim</i> , punctul de maxim de pe reprezentarea grafică fiind vârful parabolei $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Punctul de maxim este $x_v = x_{\max} = -\frac{b}{2a}$. Valoarea maximă este $y_v = y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(x_v)$.
$Imf = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$	$Imf = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$
Pe $(-\infty, x_v]$, funcția este <i>strict descrescătoare</i> .	Pe $(-\infty, x_v]$, funcția este <i>strict crescătoare</i> .
Pe $[x_v, \infty)$, funcția este <i>strict crescătoare</i> .	Pe $[x_v, \infty)$, funcția este <i>strict descrescătoare</i> .

Informații certe oferite de discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$)

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Funcția <i>nu are rădăcini reale</i> (ecuația atașată <i>nu are soluții reale</i>).	Funcția <i>are două rădăcini reale egale</i> (ecuația atașată <i>are o singură soluție reală</i>), $x = -\frac{b}{2a}$.	Funcția <i>are două rădăcini reale distincte</i> (ecuația atașată <i>are două soluții reale</i>), $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Parabola <i>nu intersectează axa Ox</i> (este situată în întregime deasupra axei Ox când este <i>convexă</i> , respectiv în întregime sub axa Ox când este <i>concavă</i>).	Parabola este <i>tangentă axei Ox</i> , punctul de tangență fiind $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.	Parabola <i>intersectează axa Ox în două puncte distincte</i> : $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile funcției (soluțiile ecuației atașate).
Funcția <i>păstrează același semn pe tot domeniul</i> ($\mathbb{R}$), acesta fiind semnul coeficientului dominant (a).	Funcția <i>păstrează același semn pe tot domeniul</i> , acesta fiind semnul coeficientului dominant (a), cu excepția punctului de extrem în care se anulează.	Funcția <i>are semn contrar coeficientului dominant (a) pe intervalul dintre rădăcini și are semnul coeficientului dominant în exteriorul acestuia</i> , cu excepția celor două valori ale rădăcinilor unde se anulează.
Funcția <i>nu se poate scrie ca produs de funcții de gradul I cu coeficienți reali</i> .	$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ forma factorizată	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ forma factorizată

Informații general valabile

Dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$ (verticala care trece prin vârf) este *axă de simetrie* pentru parabolă.

Oricare trei puncte de pe parabolă sunt *necoliniare*.

Funcția:

- nu este monotonă pe domeniu, dar are intervale de monotonie;
- este nemărginită și nu este periodică;
- nu este impară; dintre funcțiile de gradul al doilea, doar cele „eliptice de b ” ($b = 0$) sunt pare;
- nu este injectivă, nici surjectivă, deci nici bijectivă sau inversabilă; prin restricționarea domeniului și adaptarea codomeniului se pot obține restricții bijective.

TEST DE EVALUARE

SUBIECTUL I

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. (1p) Determină coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate.
2. (1p) Determină coordonatele vârfului parabolei asociate funcției f și scrie ecuația axei de simetrie.
3. (1p) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația: $f(x) \leq 0$.

SUBIECTUL al II-lea

1. (1,5p) Reprezintă grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 + 2x + 3$.
2. (1,5p) Studiază monotonia funcției g și determină imaginea funcției (mulțimea valorilor funcției), Img .

SUBIECTUL al III-lea

1. **Aplicație practică.** Un fermier dorește să construiască un țarc dreptunghiular pentru animale, lipit de un zid de piatră deja existent (astfel încât latura de-a lungul zidului nu necesită gard). Fermierul are la dispoziție exact 40 de metri liniari de gard.
 - a) (0,5p) Dacă notăm cu x lățimea țarcului (perpendiculară pe zid), arătați că aria țarcului în funcție de x este dată de funcția $A(x) = -2x^2 + 40x$.
 - b) (1p) Determinați dimensiunile țarcului (lățimea și lungimea) pe care trebuie să le aleagă fermierul astfel încât aria obținută să fie maximă. Care este această arie maximă?
2. (1,5p) Se consideră funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 + mx + 9$, unde m este un parametru real. Determinați valorile lui m pentru care graficul funcției h este situat strict deasupra axei Ox .

Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă: 1 punct din oficiu.



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII (PORTOFOLIUL DE GÂNDIRE CRITICĂ)

Funcția de gradul al doilea este primul obiect matematic din liceu care te obligă să privești aceeași situație din perspective diferite.

A patra provocare: **Câte „parabole” există într-o singură parabolă?**

Un elev afirmă: „O parabolă este doar graficul unei funcții de gradul al doilea.” O colegă îi răspunde: „Nu. O parabolă poate fi privită în multe moduri diferite.” *Cine are dreptate?*

Reflectează și răspunde:

Aceeași funcție de gradul al doilea poate fi studiată: • ca expresie algebrică; • ca grafic; • ca ecuație; • ca inecuație; • ca model al unui fenomen; • ca problemă de optimizare.

1. Care dintre aceste perspective ți s-a părut cea mai naturală?
2. Care ți s-a părut cea mai dificilă?
3. Pot două persoane să înțeleagă aceeași funcție în moduri diferite?
4. Care perspectivă oferă cele mai multe informații?
5. Poți face o legătură între parabolă – ca noțiune matematică și „parabolă” – ca noțiune stilistică?

Discută în echipă: Alegeți o funcție de gradul al doilea și descrieți-o folosind cât mai multe reprezentări diferite.

Ideea mare: În matematică, înțelegerea profundă apare atunci când putem trece de la o reprezentare la alta fără să pierdem sensul.



C. FUNCȚIA PUTERE CU EXPONENT ÎNTREG. FUNCȚIA RADICAL

Funcția putere cu exponent întreg

FUNCȚIILE PUTERE ÎN VIAȚA REALĂ

Matematica explică lumea din jurul nostru



Funcțiile putere descriu modul în care anumite mărimi cresc foarte rapid sau scad accelerat. Ele apar în multe domenii și ne ajută să înțelegem și să modelăm fenomene reale.

Funcția putere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$

1. GEOMETRIE – Arie și volum

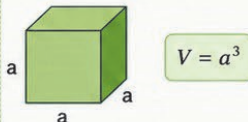
Dimensiunile liniare sunt ridicate la putere pentru a obține arii (puterea a 2-a) sau volume (puterea a 3-a).

Aria pătratului



Dacă latura se dublează:
 $a' = 2a \rightarrow A' = (2a)^2 = 4a^2$
Aria crește de **4 ori!**

Volumul cubului



Dacă muchia se dublează:
 $a' = 2a \rightarrow V' = (2a)^3 = 8a^3$
Volumul crește de **8 ori!**



O mică modificare a dimensiunilor poate produce schimbări spectaculoase ale ariei sau volumului.

2. FIZICĂ – Legi ale naturii

Multe fenomene fizice sunt descrise de funcții putere.

Energia cinetică

Energia unui corp în mișcare este proporțională cu pătratul vitezei.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

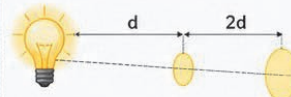


Dacă viteza se dublează, energia crește de **4 ori!**
De aceea, accidentele la viteze mari sunt mult mai periculoase.

Intensitatea luminii / semnalului

Intensitatea scade invers proporțional cu pătratul distanței față de sursă.

$$I = \frac{k}{d^2}$$



Când distanța se dublează, intensitatea scade de **4 ori!**
lumina devine mai slabă.

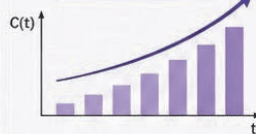
3. ECONOMIE & BIOLOGIE

Funcțiile putere modelează evoluții și creșteri accelerate.

Dobândă compusă

Capitalul crește exponențial în timp.

$$C(t) = C_0(1 + r)^t$$



Cu cât timpul crește, capitalul crește tot mai rapid.

Creșterea populațiilor

În anumite condiții, populația poate crește exponențial.

$$P(t) = P_0 k^t$$



De aceea, resursele sunt limitate și trebuie gestionate responsabil.

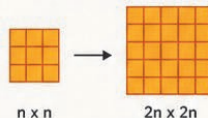
4. INFORMATICĂ & TEHNOLOGIE

Funcțiile putere descriu volumul de date și performanța sistemelor.

Dimensiunea fișierelor

Rezoluția unei imagini se măsoară în numărul de pixeli:
 $d = l^2$ (imagine pătrată)

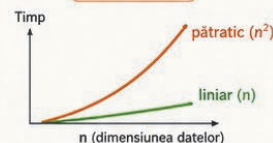
Dacă latura se dublează, numărul de pixeli (și datele) crește de **4 ori!**



Algoritmi și performanță

Timpul de execuție al unor algoritmi crește ca o putere a dimensiunii datelor.

$$T(n) \sim n^k$$



DE CE SUNT IMPORTANTE FUNCȚIILE PUTERE?



Ne ajută să înțelegem relația dintre mărimi.



Ne permit să prezicem și să comparăm rezultate.



Apar în numeroase situații din viața cotidiană.



Ne dezvoltă gândirea logică și capacitatea de modelare.

Matematica nu este doar teorie – este un instrument puternic pentru a explica și a îmbunătăți lumea în care trăim!

1. Puteri cu exponent natural. Puteri cu exponent întreg

Puteri cu exponent natural



REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

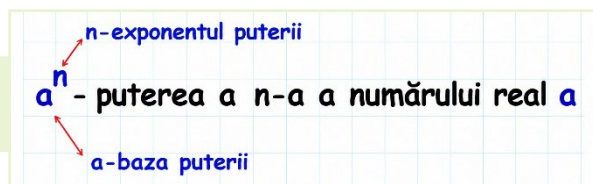
De ce unele fenomene din viața reală cresc extrem de repede – de exemplu, numărul de vizualizări ale unui videoclip viral – iar altele scad foarte rapid, cum ar fi intensitatea semnalului wi-fi atunci când ne îndepărtăm de router? Ce fel de reguli matematice pot descrie astfel de schimbări?

Noțiunile de *putere cu exponent natural*, de *putere cu exponent întreg negativ* și *operații cu acestea*, *proprietăți* ale acestora au fost studiate în gimnaziu.



DEFINIȚIE

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se definește **puterea a n-a a numărului real a** ca fiind $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a}$.



Citim „a la puterea n”.

Cazuri particulare: $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0}_{\text{de } n \text{ ori } 0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*; 1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{\text{de } n \text{ ori } 1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Datorită asociativității înmulțirii numerelor reale, puterea cu exponent natural a numărului real a se poate defini recursiv:

$$a^{n+1} = a^n \cdot a = a \cdot a^n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\text{dar și } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } k \text{ ori } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n-k \text{ ori } a} = a^k \cdot a^{n-k}, \forall n > 2, \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

Prin convenție: $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*$



EXEMPLE

1) Foarte utilizate, mai ales în calculele de la fizică, sunt puterile cu exponent natural ale lui 10.

$$10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, \dots, 10^n = \underbrace{100\dots0}_{n \text{ cifre } 0}$$

Prin scrierea $1,25 \cdot 10^5$ înțelegem 125 000, ceea ce înseamnă mutarea virgulei numărului 1,25 către dreapta, după 5 cifre (primele cinci zecimale ale numărului 1,25 sunt 2, 5, 0, 0, 0).

$$2) (-\sqrt{2})^4 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = 4;$$

$$3) \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{243}.$$

Puteri cu exponent întreg negativ



DEFINIȚIE

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{R}^*$ atunci $a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$ (**putere cu baza a și cu exponent întreg negativ**).



EXEMPLE

$$1) 2^{-1} = \frac{1}{2}; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2;$$

3) Foarte utilizate, mai ales în calculele de la fizică, sunt puterile cu exponent întreg negativ ale lui 10.

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01; \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001; \dots; \quad 10^{-n} = \underbrace{0,00\dots01}_{n-1 \text{ cifre } 0}$$

Prin scrierea $125 \cdot 10^{-5}$ înțelegem 0,00125, adică se mută virgula numărului, către stânga, după 5 cifre.

Semnul puterii cu exponent întreg

Dacă $a > 0$, atunci $a^m > 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. Dacă $a < 0$, atunci $\begin{cases} a^m > 0, \forall m \in \mathbb{Z}, m \text{ par} \\ a^m < 0, \forall m \in \mathbb{Z}, m \text{ impar} \end{cases}$

Pentru $a = 0$, puterea cu exponent întreg negativ NU se definește, iar $0^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci nu are semn.

Operații cu puteri cu exponenți întregi și proprietăți

I. Puterea produsului a două numere reale

Pentru două numere reale a și b și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, exceptând situațiile în care ar putea apărea 0^0 sau rapoarte cu numitori nuli.

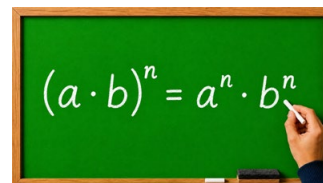
Demonstrație:

Pentru $m = 0$ și a, b numere reale nenule, egalitatea devine $1 = 1 \cdot 1$, evident adevărată.

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$, egalitatea se demonstrează pe baza asociativității și comutativității înmulțirii numerelor reale:

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{\text{de } m \text{ ori paranteza}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{\text{de } m \text{ ori } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{\text{de } m \text{ ori } b} = a^m \cdot b^m, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

$$\text{iar } (a \cdot b)^{-m} = \frac{1}{(a \cdot b)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*.$$



EXEMPLE

$$6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5; (-x\sqrt{2})^4 = (-x)^4 \cdot \sqrt{2}^4 = x^4 \cdot 4 = 4x^4 (x \in \mathbb{R}).$$

II. Puterea câtului a două numere reale

Pentru două numere reale a, b și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, exceptând situațiile în care ar putea apărea 0^0 sau rapoarte cu numitori nuli.

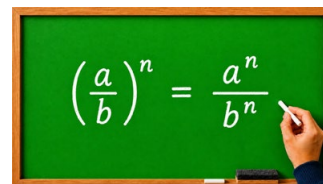
Demonstrație:

Pentru $m = 0$ și $a, b \neq 0$, egalitatea devine $1 = \frac{1}{1}$, evident adevărată.

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$, egalitatea se demonstrează folosind proprietățile înmulțirii numerelor reale:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{\text{de } m \text{ ori paranteza}} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } m \text{ ori } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{\text{de } m \text{ ori } b}} = \frac{a^m}{b^m}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*,$$

$$\text{iar } \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{1}{\frac{1}{b^m}} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*.$$



EXEMPLE

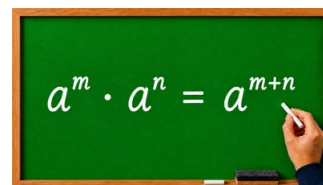
$$\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{(\sqrt{7})^{-4}} = \frac{(\sqrt{7})^4}{3^4} = \frac{49}{81}, \left(\frac{y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}}\right)^6 = \frac{(y\sqrt{x})^6}{(x\sqrt{y})^6} = \frac{y^6 x^3}{x^6 y^3} = \frac{y^3}{x^3} = x^{-3} y^3, x, y \in (0, \infty).$$

III. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază

Dacă a este un număr real și $m, n \in \mathbb{Z}$, are loc egalitatea $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, exceptând situațiile în care ar putea apărea 0^0 sau rapoarte cu numitori nuli.

Temă: Redactează demonstrația acestei egalități considerând, pe rând, cazurile:

- a) $m = 0$ sau $n = 0$ și $a \neq 0$;
- b) $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{R}$;
- c) $m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{Z}, n < 0$ și $a \neq 0$;
- d) $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ și $a \neq 0$.



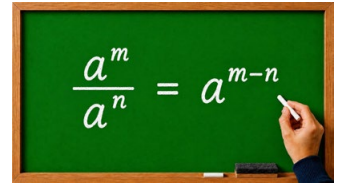
EXEMPLU

$$2^a \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot \frac{1}{8} = 2^a \cdot 2^2 \cdot 2^{-3} = 2^{a+2-3} = 2^{a-1}, a \in \mathbb{Z}.$$

IV. Împărțirea puterilor cu aceeași bază

Dacă a este un număr real nenul și $m, n \in \mathbb{Z}$, are loc egalitatea $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Temă: Redactează demonstrația acestei egalități.



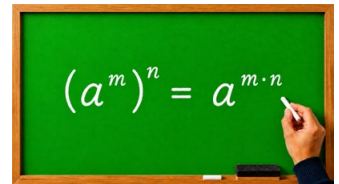
EXEMPLU

$$\frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3})^3} = (\sqrt{3})^{4-3} = \sqrt{3}.$$

V. Puterea cu exponent întreg a unei puteri cu exponent întreg (ridicarea unei puteri la altă putere)

Dacă a este un număr real și $m, n \in \mathbb{Z}$, are loc egalitatea $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, exceptând situațiile în care ar putea apărea 0^0 sau rapoarte cu numitori nuli.

Temă: Redactează demonstrația acestei egalități.



EXEMPLU

$$\left(\frac{1}{81}\right)^4 = (3^{-4})^4 = 3^{-4 \cdot 4} = 3^{-16}.$$

VI. Compararea puterilor cu baze pozitive

A. Dacă a și b sunt numere reale pozitive și $m \in \mathbb{N}^*$, oarecare, atunci:

$$1. \quad a < b \Leftrightarrow a^m < b^m \quad 2. \quad a < b \Leftrightarrow a^{-m} > b^{-m} \quad 3. \quad a^m = b^m \Leftrightarrow a = b \quad \text{și} \quad a^{-m} = b^{-m} \Leftrightarrow a = b$$

Demonstrație:

1. Echivalența de la proprietatea 1. este consecință directă a proprietății inegalităților de același sens între termeni pozitivi, de a se putea înmulți, cu păstrarea sensului inegalității inițiale.

Implicația directă:

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ a < b \\ \dots \\ a < b \end{array} \right\} \text{ de } m \text{ ori și } a, b > 0 \text{ implică } \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } m \text{ ori } a} < \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{\text{de } m \text{ ori } b}, \text{ de unde } a^m < b^m.$$

Implicația inversă:

Cunoaștem $a^m < b^m, m \in \mathbb{N}^*$. Presupunând, prin absurd, că $a > b$ sau $a = b$, obținem (conform demonstrației anterioare) că $a^m > b^m$ sau $a^m = b^m$, ceea ce contrazice ipoteza. Așadar presupunerea este falsă, deci $a < b$.

$$2. \text{ Conform proprietății 1.: } a < b \Leftrightarrow a^m < b^m \cdot \frac{1}{a^m} > \frac{1}{b^m} \Leftrightarrow a^{-m} > b^{-m}.$$

Temă: Redactează demonstrația proprietății 3.

Consecință: Dacă a este un număr real pozitiv, diferit de 1, atunci:

$$0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < a^m < 1, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$a > 1 \Leftrightarrow a^m > 1, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

EXEMPLU

Care dintre numerele 2^{2025} și 3^{1350} este mai mare?

Căutăm puteri cu același exponent: $2025 = 3 \cdot 675$, $1350 = 2 \cdot 675$ deci c.m.m.d.c.(2025, 1350) = 675;
 $2^{2025} = 2^{3 \cdot 675} = (2^3)^{675} = 8^{675}$, iar $3^{1350} = 3^{2 \cdot 675} = (3^2)^{675} = 9^{675}$. Cum $8 < 9$, $8^{675} < 9^{675}$, rezultă că $2^{2025} < 3^{1350}$.

B. Dacă a este un număr real pozitiv și $m, n \in \mathbb{Z}^*$, $m > n$, atunci:

$$1. \text{ pentru } 0 < a < 1, a^m < a^n \quad 2. \text{ pentru } a > 1, a^m > a^n \quad 3. \text{ pentru } a = 1, a^m = a^n$$

Demonstrație:

1. Din ipoteza $m > n$, rezultă că $\exists p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m = n + p$.

$a^m = a^{n+p} = a^n \cdot a^p$, dar, conform *Consecinței* anterioare, $0 < a^p < 1$. Cum $a^n > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, rezultă că $a^n \cdot a^p < a^n$, de unde reiese concluzia $a^m < a^n$.

2. $a^m = a^{n+p} = a^n \cdot a^p$, dar, conform *Consecinței* anterioare, $a^p > 1$. Rezultă că $a^n \cdot a^p > a^n$, de unde reiese concluzia $a^m > a^n$.

3. Egalitatea este evidentă, căci $1^m = 1^n = 1$.



EXEMPLE

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$, căci $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ și $-3 \in \mathbb{Z}_-$; $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2$, căci $\frac{1}{4} \in (0,1)$ și $3 > 2$;

$2^{-7} > 2^{-10}$, căci $2 > 1$ și $-7 > -10$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2} > 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^0$, căci $\frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1)$ și $-2 < 0$.

Compararea puterilor cu baze pozitive



A. Dacă a și b sunt numere reale pozitive și $m \in \mathbb{N}^*$, oarecare, atunci

1. $a < b \Leftrightarrow a^m < b^m$

2. $a < b \Leftrightarrow a^{-m} > b^{-m}$

3. $a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$ și $a^{-m} = b^{-m} \Leftrightarrow a = b$

B. Dacă a este un număr real pozitiv și $m, n \in \mathbb{Z}^*$, $m > n$, atunci:

1. pentru $0 < a < 1$, $a^m < a^n$;

2. pentru $a > 1$, $a^m > a^n$;

3. pentru $a = 1$, $a^m = a^n$.



EXERCITII REZOLVATE

1. Calculează: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^6 - \frac{6^4}{24^2} \cdot 2^3 + 4^{-3} \cdot 2^{-12} - (\sqrt{5}^3)^2$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^6 - \frac{6^4}{24^2} \cdot 2^3 + 4^{-3} \cdot 2^{-12} - (\sqrt{5}^3)^2 &= 3^{6-3} - \frac{6^4}{4^2 \cdot 6^2} \cdot 2^3 + \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{2^{12}} - (\sqrt{5})^6 = \\ &= 3^3 - \frac{6^{4-2}}{2^4} \cdot 2^3 + \frac{1}{2^6} \cdot 2^{12} - 5^3 = 3^3 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^{-1} + 2^6 - 5^3 = 27 - 18 + 64 - 125 = -52. \end{aligned}$$

2. Demonstrează egalitatea: $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} - b^{-3}} - \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} = -\frac{2a^{-1}b^{-1}}{a^{-4} + (ab)^{-2} + b^{-4}}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*, a \neq \pm b$.

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare: } \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} - b^{-3}} - \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} &= \frac{a^{-1} - b^{-1}}{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + (ab)^{-1} + b^{-2})} - \frac{a^{-1} + b^{-1}}{(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} - (ab)^{-1} + b^{-2})} = \\ &= \frac{1}{a^{-2} + (ab)^{-1} + b^{-2}} - \frac{1}{a^{-2} - (ab)^{-1} + b^{-2}} = \frac{a^{-2} - (ab)^{-1} + b^{-2} - (a^{-2} + (ab)^{-1} + b^{-2})}{(a^{-2} + (ab)^{-1} + b^{-2})(a^{-2} - (ab)^{-1} + b^{-2})} = \\ &= -\frac{2a^{-1}b^{-1}}{(a^{-2} + b^{-2})^2 - (ab)^{-2}} = -\frac{2a^{-1}b^{-1}}{a^{-4} + (ab)^{-2} + b^{-4}}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*, a \neq \pm b \end{aligned}$$

3. Determină valorile întregi ale lui m pentru care $\left(\frac{1}{2}\right)^{m^2} \geq \frac{1}{4}$.

Rezolvare:

Inegalitatea se scrie $\left(\frac{1}{2}\right)^{m^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ și cum baza puterii este $\frac{1}{2} \in (0,1)$, ordinea exponenților va fi $m^2 \leq 2$ $m^2 - 2 \leq 0$, inecuație de grad al II-lea cu soluțiile $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Cum $m \in \mathbb{Z}$, rezultă $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}$, așadar $m \in \{-1, 0, 1\}$.

2. Funcția putere cu exponent natural



REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

Dacă dublăm dimensiunea unui obiect – de exemplu latura unei cutii sau raza unei mingi – crește totul de două ori? Sau unele lucruri cresc mult mai repede decât ne-am aștepta? Cum putem anticipa aceste schimbări înainte de a construi efectiv obiectul?



EXEMPLU

O firmă produce cutii cubice de carton pentru ambalare. Un client solicită dublarea laturii cubului pentru mărirea volumului cutiei și, implicit, creșterea capacității de ambalare.

- Cu cât crește suprafața de carton utilizată pentru noua cutie?
- Cu cât crește volumul noului ambalaj, față de cel vechi?

Modelul matematic:

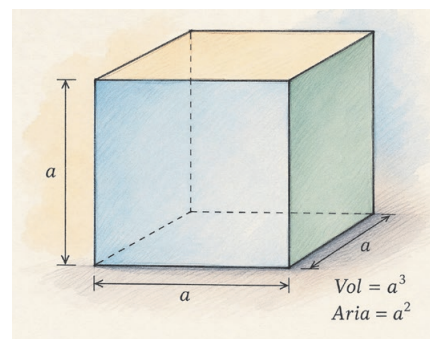
În figura alăturată sunt reamintite formulele pentru aria suprafeței unui pătrat și pentru volumul cubului.

a) Dacă latura pătratului inițial a fost a , prin dublarea acesteia devine $2a$, noua arie a unei fețe devine $A_f = (2a)^2 = 4a^2$, iar noua arie a ambalajului devine $A = 6 \cdot A_f = 24a^2$.

b) Volumul noii cutii devine $V = (2a)^3 = 8a^3$.

Aceste rezultate relevă faptul că la o „mică” modificare a dimensiunii pătratului de bază, aria unei fețe se mărește de 4 ori, suprafața de carton utilizată pentru întreaga cutie se mărește de 24 de ori, iar volumul cutiei se mărește de 8 ori, ceea ce înseamnă o creștere substanțială.

Pe de altă parte, creșterea funcției $A(a) = a^2$, care definește aria pătratului în funcție de dimensiunea laturii (de exemplu, în cm), este mai mică decât creșterea funcției $V(a) = a^3$, care definește volumul cubului, în funcție de aceeași dimensiune. Funcțiile $A(a) = a^2$, $V(a) = a^3$ sunt funcții putere, de exponent natural.



DEFINIȚIE

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^n$ se numește **funcție putere de grad n** .

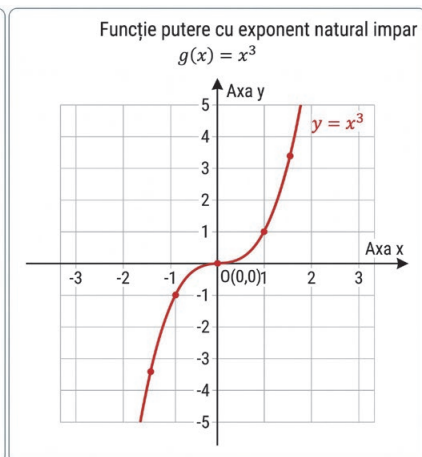
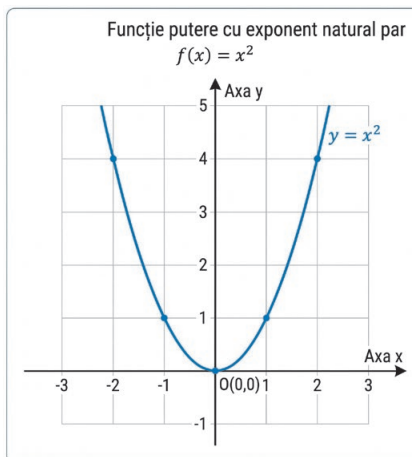
De remarcat!

► Funcția putere de grad n atribuie fiecărui număr real (din domeniu) puterea a n -a a acestuia.

► La funcția putere de grad n baza este variabilă, în timp ce exponentul este fixat.

► Pentru $n = 1$ se obține funcția identică a mulțimii $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, a cărei reprezentare grafică este prima bisectoare.

► Pentru $n = 2$ se obține funcția pătratică, un caz particular al funcției de gradul al II-lea, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, a cărei reprezentare grafică este o parabolă convexă, cu vârful în originea reperului cartezian.



Cu ajutorul <https://www.geogebra.org/> au fost realizate următoarele grafice:

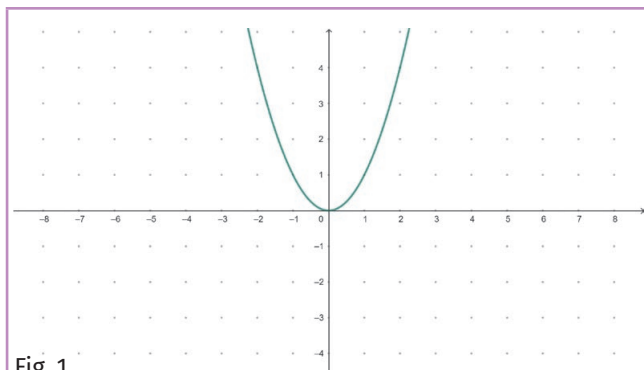


Fig. 1

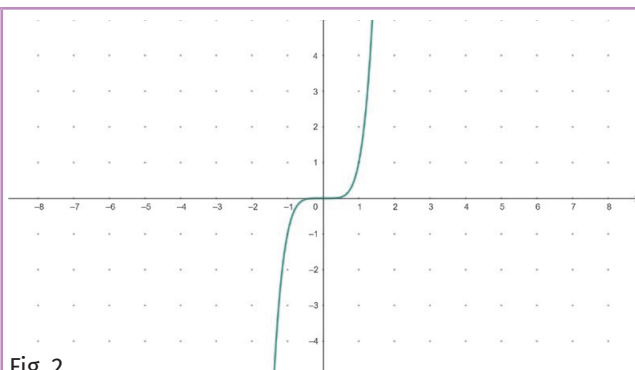


Fig. 2

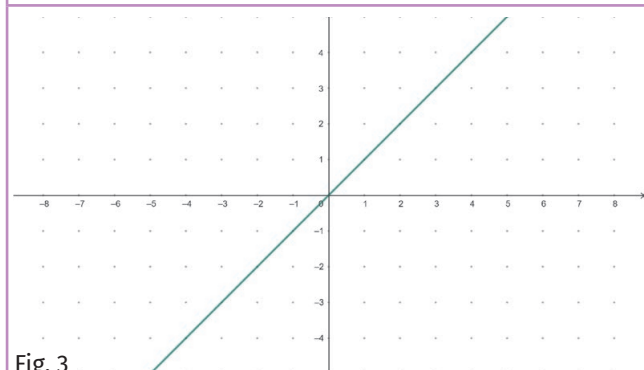


Fig. 3

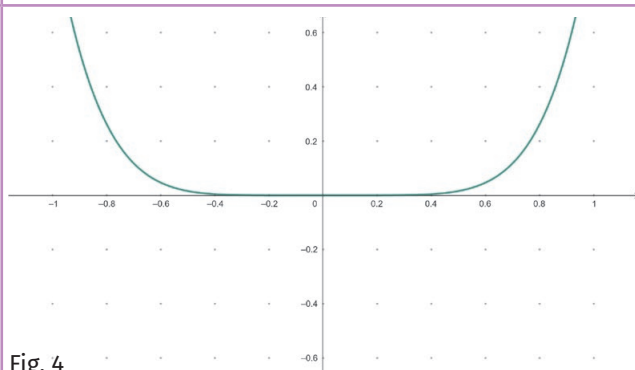


Fig. 4

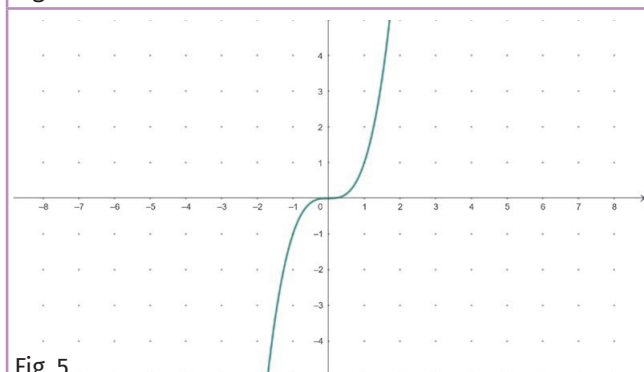


Fig. 5

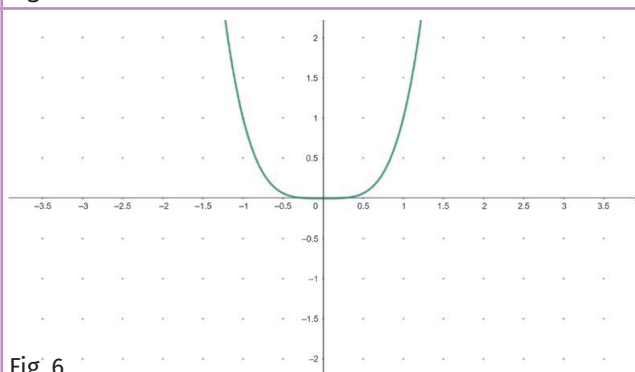


Fig. 6

Temă:

1) Introdu într-o aplicație digitală funcțiile putere de grad 1, 2, 3, 4, 5, 6 și identifică, pentru fiecare imagine dintre cele 6 prezentate anterior, funcția putere reprezentată.

2) Utilizând reprezentările grafice de mai sus și identificările de la punctul 1), stabilește proprietățile fiecăreia dintre funcțiile putere de grad 1, 2, 3, 4, 5, 6: monotonie/intervale de monotonie, paritate/imparitate, mărginire/nemărginire, intersecțiile reprezentărilor grafice cu axele de coordonate, soluții ale ecuației $f(x) = 0$, imagine, axe de simetrie sau/și centre de simetrie pentru graficele lor.



TEOREMĂ

- 1) Funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, de grad $n \in \mathbb{N}^*$, n par, este **funcție pară**.
- 2) Funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, de grad $n \in \mathbb{N}^*$, n impar, este **funcție impară**.

Demonstrație:

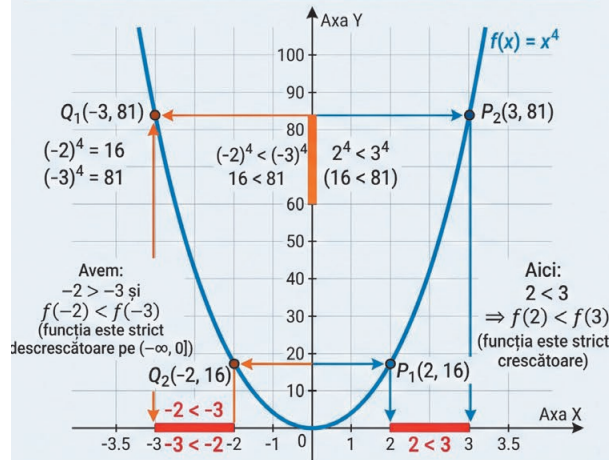
- 1) Pentru $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția este pară.
- 2) Pentru $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția este impară.

TEOREMĂ

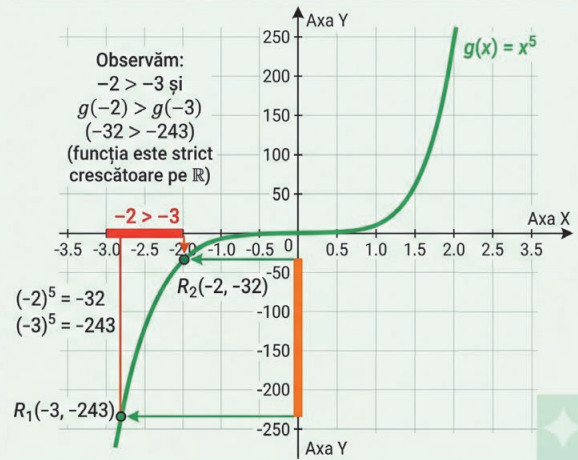
- 1) Funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$, de grad $n \in \mathbb{N}^*$, n par, este strict descrescătoare pentru $x \leq 0$ și strict crescătoare pentru $x \geq 0$.
- 2) Funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$, de grad $n \in \mathbb{N}^*$, n impar, este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

MONOTONIA FUNCȚIEI PUTERE (EXEMPLE)

1. EXPONENT NATURAL PAR (de exemplu, $f(x) = x^4$, n par)



2. EXPONENT NATURAL IMPAR (de exemplu, $g(x) = x^5$, n impar)



Demonstrație:

1) Fie $x_1, x_2 \geq 0$, cu $x_1 < x_2$. Din compararea puterilor cu baze pozitive, rezultă $x_1^n < x_2^n$, deci $f(x_1) < f(x_2)$, deci funcția putere de grad par este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

Fie $x_1, x_2 \leq 0$, cu $x_1 < x_2$. Dar $x_1 < x_2 \leq 0$, așadar $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Din compararea puterilor cu baze pozitive, rezultă $(-x_1)^n > (-x_2)^n \geq 0$ și cum n este par, rezultă $x_1^n > x_2^n$, deci $f(x_1) > f(x_2)$, așadar funcția putere de grad par este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2) Fie $x_1, x_2 \geq 0$, cu $x_1 < x_2$. Din compararea puterilor cu baze pozitive, rezultă că $x_1^n < x_2^n$, deci $f(x_1) < f(x_2)$, așadar funcția putere de grad impar este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

Fie $x_1, x_2 \leq 0$, cu $x_1 < x_2$. Dar $x_1 < x_2 \leq 0$, așadar $-x_1 > -x_2 \geq 0$. Din compararea puterilor cu baze pozitive, rezultă $(-x_1)^n > (-x_2)^n \geq 0$ și cum n este impar, rezultă $-x_1^n > -x_2^n$, așadar $x_1^n < x_2^n$, deci $f(x_1) < f(x_2)$, deci funcția putere de grad impar este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

Dacă $x_1 < 0$ și $x_2 \geq 0$, avem, implicit $x_1 < x_2$. Pe de altă parte, $f(x_1) = x_1^n < 0$, n fiind impar, iar $f(x_2) = x_2^n \geq 0$, de unde rezultă $f(x_1) < f(x_2)$.

Din cele trei situații considerate, deducem că $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 < x_2$, adică funcția putere de grad impar este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

TEOREMĂ

- 1) Funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$, de grad $n \in \mathbb{N}^*$, n par, nu este nici injectivă, nici surjectivă.
- 2) Funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$, de grad $n \in \mathbb{N}^*$, n impar, este bijectivă.

Demonstrație:

1) Pentru n par, f este funcție pară, deci nu este injectivă, iar $Imf = [0, \infty)$, deci nu coincide cu codomeeniul, ceea ce conduce la concluzia că f nu este surjectivă.

2) Pentru n impar, f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci este injectivă, iar $Imf = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă.



OBSERVAȚII

◆ Înlocuind codomeniul $\mathbb{R}$ cu intervalul $[0, \infty)$, funcția putere devine surjectivă, dar, dacă domeniul de definiție rămâne $\mathbb{R}$, în continuare nu va fi injectivă.

◆ Funcția putere de grad par nu este inversabilă, dar are restricții care sunt bijective:

$g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^n$, n par, este bijectivă, deci inversabilă;

$h: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $h(x) = x^n$, n par, este bijectivă, deci inversabilă.

◆ Funcția putere de grad impar este inversabilă.

Sinteză

Funcția putere de exponent natural par			
Proprietate	Generalizare	Exemplu	
1. Paritate	Funcție pară.	$f(x) = x^2$ este pară, deoarece $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.	
2. Monotonie	Strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.	$f(x) = x^2$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.	
3. Imaginea funcției	$\text{Im } f = [0, +\infty)$.	$\text{Im } f = [0, +\infty)$.	
4. Puncte de extrem	$f(0)$ este minimul global al lui f , $f(0) = \min f = 0$.	$f(0) = 0 = \min f$.	
5. Proprietatea graficului	Graficul funcției este simetric față de axa Oy .	Graficul lui f este simetric față de axa Oy .	
6. Bijectivitate	Nu este nici injectivă, nici surjectivă, deci nu este bijectivă/inversabilă.	$f(x) = x^2$ nu este nici injectivă, nici surjectivă, deci nu este bijectivă/inversabilă.	

Funcția putere de exponent natural impar			
Proprietate	Generalizare	Exemplu	
1. Paritate	Funcție impară.	$f(x) = x^3$ este impară, deoarece $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.	
2. Monotonie	Strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.	$f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.	
3. Imaginea funcției	$\text{Im } f = \mathbb{R}$.	$\text{Im } f = \mathbb{R}$.	
4. Bijectivitate	f este bijectivă (inversabilă).	f este bijectivă (inversabilă).	
5. Puncte de extrem	Funcția nu are puncte de extrem.	$f(x) = x^3$ nu are puncte de extrem.	
6. Proprietatea graficului	Graficul funcției este simetric față de origine.	Graficul lui f este simetric față de origine.	

3. Funcția putere cu exponent întreg negativ



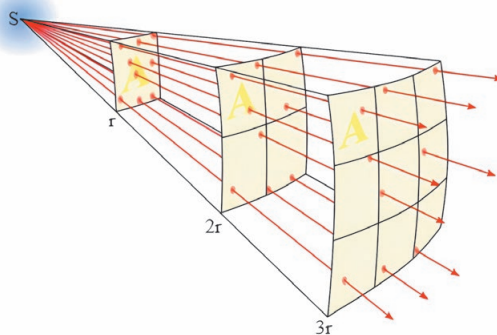
REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

De ce lumina unui bec, căldura unei surse sau semnalul unui telefon par să slăbească atât de repede când ne îndepărtăm doar puțin? Există o regulă matematică ce explică această scădere aparent „bruscă”?



EXEMPLU

Un bec luminează uniform în toate direcțiile, dar intensitatea luminii depinde de distanța față de sursa de lumină. Fizica arată că intensitatea luminii este



dată de funcția: $I(d) = \frac{k}{d^2} = k \cdot d^{-2}$, unde k măsoară puterea sursei de lumină, iar d măsoară distanța față de sursă. Deducem că intensitatea luminii este invers proporțională cu pătratul distanței până la sursă, adică, cu cât ne îndepărtăm de sursă, intensitatea luminii scade, iar lumina devine, evident, mai slabă.

Prin dublarea distanței față de sursă, intensitatea luminii devine $I(2d) = \frac{k}{(2d)^2} = \frac{k}{4d^2} = \frac{1}{4} \cdot I(d)$, deci scade de 4 ori. Prin triplarea distanței față de sursă, intensitatea luminii devine $I(3d) = \frac{k}{(3d)^2} = \frac{k}{9d^2} = \frac{1}{9} \cdot I(d)$, deci scade de 9 ori. Funcția $I(d) = \frac{k}{d^2} = k \cdot d^{-2}$ este o funcție putere de exponent întreg negativ și arată o scădere rapidă la o cât de mică creștere a variabilei, nu este definită în 0, deci la reprezentarea grafică apar asimptote verticale.



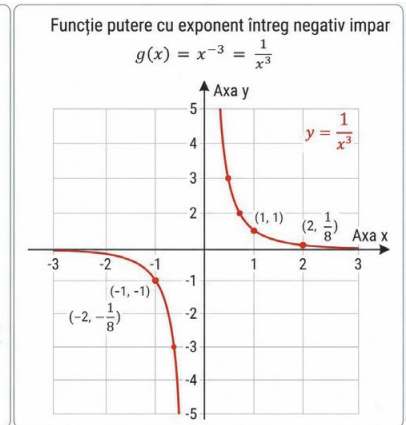
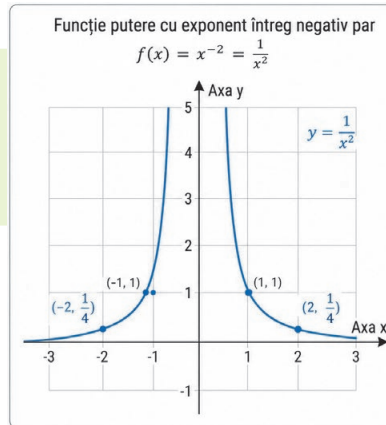
DEFINIȚIE

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, se numește **funcție putere de exponent negativ $-n$** .

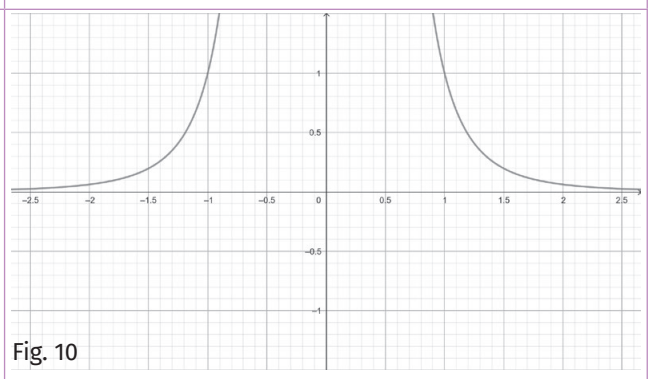
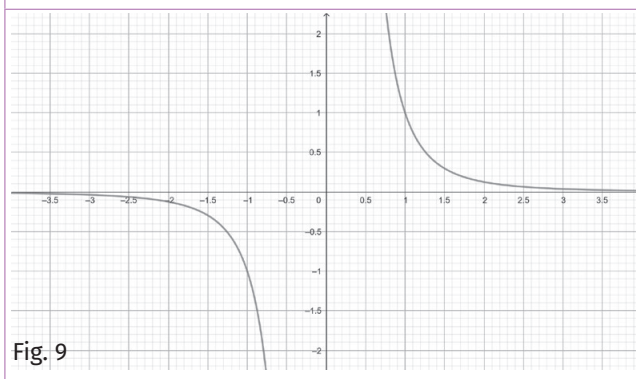
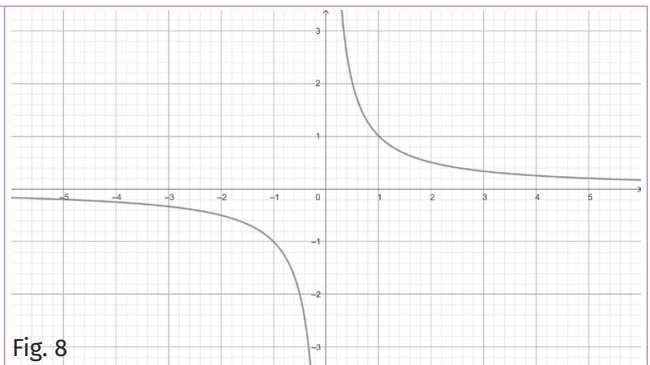
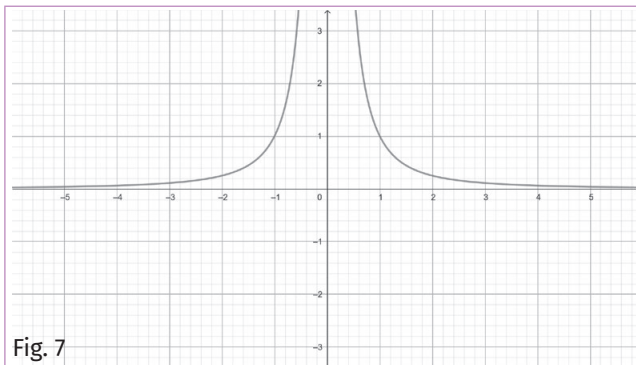
De remarcat:

► Funcția putere de exponent negativ $-n$ atribuie fiecărui număr real nenul (din domeniu) inversul puterii a n -a a acestuia.

► La funcția putere de exponent negativ $-n$ baza este variabilă, în timp ce exponentul este fixat.



Cu ajutorul unei aplicații digitale au fost realizate următoarele grafice:



Temă:

1) Introdu într-o aplicație digitală funcțiile putere de exponent întreg negativ $-1, -2, -3, -4$ și identifică, pentru fiecare imagine dintre cele 6 prezentate anterior, funcția putere reprezentată.

2) Utilizând reprezentările grafice de mai sus și identificările de la punctul 1), stabilește proprietățile fiecăreia dintre funcțiile putere de exponent întreg negativ $-1, -2, -3, -4$: monotonie/intervale de monotonie, paritate/imparitate, mărginire/nemărginire, intersecțiile reprezentărilor grafice cu axele de coordonate, soluții ale ecuației $f(x) = 0$, imagine, axe de simetrie sau/și centre de simetrie pentru graficele lor.

TEOREMĂ

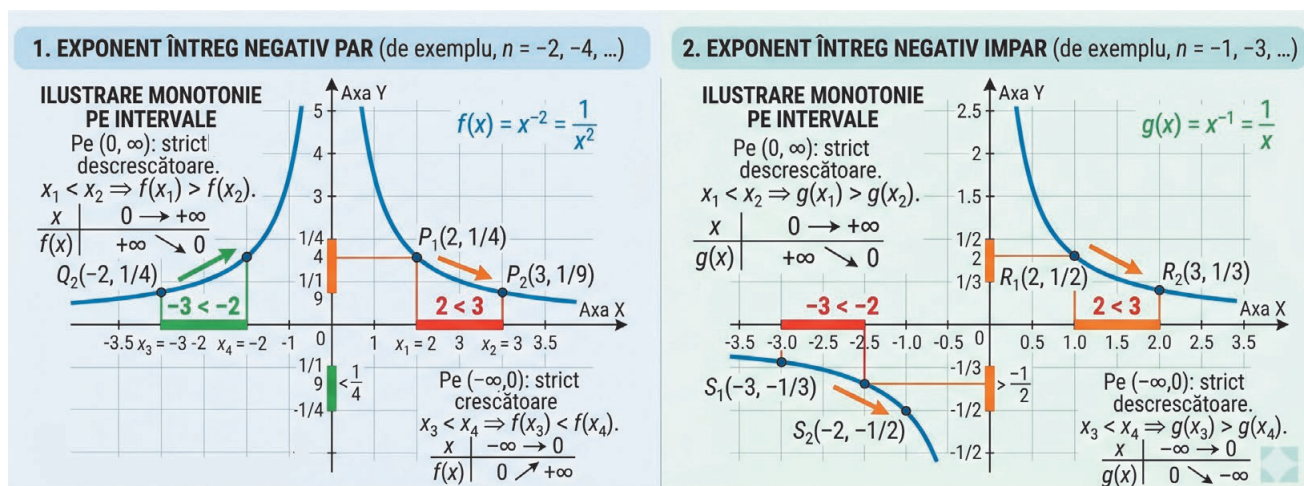
Funcția putere de exponent negativ, $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$, este pară dacă n este număr par și este impară dacă n este număr impar.

Temă: Redactează demonstrația teoremei.

TEOREMĂ

1) Funcția putere de exponent negativ, $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$, cu n par este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

2) Funcția putere de exponent negativ, $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$, cu n impar este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$, dar nu este monotonă pe domeniu.



Demonstrație:

1) Demonstrația este similară cu cea de la monotonia funcției putere de grad par.

Temă: Redactează demonstrația, folosind concluziile de la compararea puterilor cu baze pozitive și exponenți naturali.

2) Pentru $x_1, x_2 \in (0, \infty), 0 < x_1 < x_2$, obținem $x_1^n < x_2^n$, de unde $\frac{1}{x_1^n} > \frac{1}{x_2^n}$, deci $f(x_1) > f(x_2)$.

Pentru $x_1, x_2 \in (-\infty, 0), x_1 < x_2 < 0$, putem scrie $-x_1 > -x_2 > 0$ și obținem $(-x_1)^n > (-x_2)^n$, deci $\frac{1}{(-x_1)^n} < \frac{1}{(-x_2)^n}$. Cum n este impar, se obține $-\frac{1}{x_1^n} < -\frac{1}{x_2^n}$ așadar $\frac{1}{x_1^n} > \frac{1}{x_2^n}$, de unde $f(x_1) > f(x_2)$.

Am demonstrat că funcția este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$.

Dar pentru $x_1 < 0 < x_2$ se obține $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, ceea ce demonstrează faptul că funcția nu este strict descrescătoare pe întreg domeniul $(\mathbb{R}^*)$.

TEOREMĂ

- 1) Funcția putere de exponent întreg negativ și par nu este nici injectivă, nici surjectivă.
- 2) Funcția putere de exponent întreg negativ și impar este injectivă, dar nu este surjectivă.

Demonstrație:

1) Funcția putere de exponent întreg negativ și par este pară, deci nu poate fi injectivă, iar imaginea ei este $(0, \infty)$, deci nu este surjectivă.

2) Pentru exponent întreg negativ și impar, funcția este strict monotonă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$, deci este injectivă pe fiecare interval în parte, iar $f((-\infty, 0)) \cap f((0, \infty)) = \emptyset$, căci $f((-\infty, 0)) = (-\infty, 0)$, și $f((0, \infty)) = (0, \infty)$. Rezultă că f este injectivă pe domeniu. Pentru surjectivitate este suficient să remarcăm că $Im f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci nu coincide cu codomeniul, așadar funcția nu este surjectivă.

OBSERVAȚII

► Funcția putere de exponent întreg negativ, așa cum a fost definită, nu este inversabilă, dar există restricții ale ei, cu valori în imaginea funcției, care sunt bijective, deci au inverse.

► Dacă pentru funcția putere de exponent întreg negativ și impar se înlocuiește codomeniul $\mathbb{R}$ cu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, atunci aceasta devine inversabilă. De exemplu, funcția dată prin $f(x) = \frac{1}{x}$ este bijectivă, iar în acest caz funcțiile f și f^{-1} coincid.

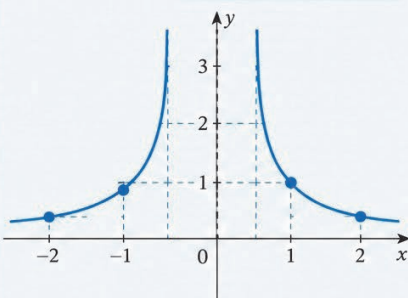
Sinteză



Funcția putere de exponent întreg negativ are forma $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Exponent negativ par

$$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$



Puncte de reper

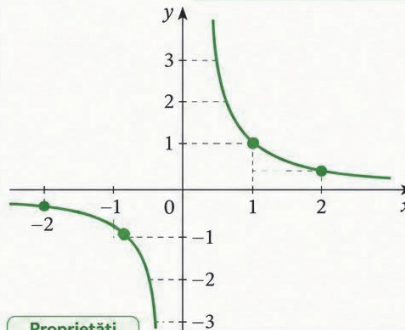
x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	1
1	1
2	$\frac{1}{4}$

Proprietăți

- Domeniu: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Imagine: $(0, +\infty)$.
- Funcție pară: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \neq 0$.
- Strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$.
- Asimptotă verticală: $x = 0$.
- Asimptotă orizontală: $y = 0$.
- Graficul este simetric față de axa Oy .

Exponent negativ impar

$$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$



Puncte de reper

x	$f(x) = \frac{1}{x^3}$
-2	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
1	1
2	$\frac{1}{8}$

Proprietăți

- Domeniu: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Imagine: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Funcție impară: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \neq 0$.
- Strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$.
- Asimptotă verticală: $x = 0$.
- Asimptotă orizontală: $y = 0$.
- Graficul este simetric față de origine.



Observație:

Pentru exponenți negativi, funcția nu este definită în $x = 0$ și are întotdeauna asimptota verticală $x = 0$ și orizontală $y = 0$.



ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE (ÎN PERECHE/PE GRUPE)

1. În fizică, energia cinetică a unui corp în mișcare este dată de formula $E(v) = \frac{1}{2}mv^2$, unde m este masa corpului, iar v este viteza. Analizați modul în care energia depinde de viteză, utilizând datele ce urmează.

a) Pentru o mașină cu masa de 1000 kg, exprimați energia ca funcție de viteză. Ce fel de funcție este aceasta?

b) Completați, pentru funcția identificată la punctul anterior, tabelul alăturat. Este creșterea energiei una liniară?

$v(m/s)$	5	10	15	20
$E(v)$				

c) În ce mod variază energia când viteza se dublează?

d) Reprezentați grafic funcția $E(v)$, pentru $v \geq 0$, și descrieți: monotonia, forma graficului, comportamentul pentru valori mari ale vitezei.

e) De ce depășirea vitezei legale crește mult riscul la impact? De ce dublarea vitezei nu înseamnă doar „puțin mai periculos”, ci „mult mai periculos”?

2. Presiunea exercitată de un corp este $P(A) = \frac{F}{A}$, unde F este forța (constantă) și A este aria suprafeței pe care ea se exercită. Analizați modul în care presiunea depinde de aria de sprijin, utilizând datele ce urmează.

a) Pentru $F = 600$ N scrieți funcția presiunii. Ce fel de funcție este aceasta?

b) Completați, pentru funcția identificată la punctul anterior, următorul tabel:

Aria (m^2)	0,01	0,02	0,05	0,1
$P(A)$				

Este scăderea presiunii una liniară?

c) Ce se întâmplă cu presiunea dacă aria de sprijin se dublează? Dar dacă se triplează?

d) Reprezentați grafic funcția $P(A)$ pentru $A > 0$ și descrieți: monotonia funcției, forma graficului, asimptota verticală apărută, comportamentul funcției pentru valori mari ale ariei de sprijin.

e) De ce schiurile sunt late?

f) De ce tocurele ascuțite pot deteriora podeaua?

g) De ce mărirea suprafeței de contact reduce rapid presiunea?

3. Reprezentați grafic, cu ajutorul unor instrumente digitale, fiecare triplet de funcții din lista următoare, în același reper cartezian:

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2; f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = (x+2)^2; f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = (x-1)^2;$$

$$g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = x^3; g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3; g_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_3(x) = x^3 - 2;$$

$$h_1: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, h_1(x) = \frac{1}{x^3}; h_2: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, h_2(x) = \frac{1}{(x-1)^3}; h_3: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, h_3(x) = \frac{1}{x^3} + 1;$$

$$t_1: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, t_1(x) = \frac{1}{x^2}; t_2: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, t_2(x) = \frac{1}{(x+1)^2}; t_3: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, t_3(x) = \frac{1}{x^2} - 2.$$

Pentru fiecare triplet de funcții, precizați ce fel de translații înregistrează ultimele două curbe în raport cu prima. Generalizați!





PROBLEME PROPUSE

A.

1. Calculează:

a) $\frac{3^{-1}}{2^{-2}} + 4^3 \cdot \frac{1}{3^2}$;

b) $(1 + \sqrt{2})^3 + (1 - \sqrt{2})^3$;

c) $1 \cdot 2^{-1} \cdot 2^2 \cdot 2^{-3} \cdot \dots \cdot 2^{-19} \cdot 2^{20}$;

d) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4}$.

2. Dacă x, y sunt două numere reale, demonstrează că:

$$(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) = \begin{cases} \frac{x^{16} - y^{16}}{x - y}, & x \neq y \\ 16x^{15}, & x = y \end{cases}$$

3. Compară numerele:

a) 16^2 și 4^7 ; b) 81^{-4} și 9^{-7} ; c) $(-\sqrt{5})^{-3}$ și $(-\sqrt{5})^3$; d) $\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^n$ și 1, unde $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Scrie următoarele numere sub forma $k \cdot 10^{-p}$, unde $k, p \in \mathbb{N}$:

a) 0,00002; b) 0,00000003; c) 0,0101; d) $\frac{1}{25000}$; e) $\frac{2}{5000}$; f) $\frac{1}{125}$.

5. În funcție de valorile parametrului $p \in \mathbb{R}$, determină semnul numărului:

a) $(1 - 2p)^{10}$; b) $(2p + 3)^5$; c) $(p^2 - 3p + 2)^7$; d) $([p] + 1)^3$, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

6. Care dintre funcțiile definite în imaginea alăturată este o funcție putere de exponent întreg? Justifică răspunsul tău!

7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) Calculează $f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{10}\right)$.

b) Determină $f\left(\left[-3, -\frac{1}{2}\right]\right)$.

c) Demonstrează că $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

d) Demonstrează că $f(1) + f(2) + \dots + f(n) < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Se consideră funcția $g: \left[\frac{1}{4}, 25\right] \rightarrow A, g(x) = f(x), \forall x \in \left[\frac{1}{4}, 25\right]$. Determină mulțimea A astfel încât funcția să fie surjectivă.

f) Cu mulțimea A determinată anterior, demonstrează că funcția g este inversabilă și află inversa ei.

8. Determină mulțimea B astfel încât funcția $f: [-3, 4] \rightarrow B, f(x) = x^4$ să fie surjectivă.

9. Reprezintă grafic funcțiile, utilizând translații ale graficelor funcțiilor putere cu exponent întreg:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-3} + 1$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^4$;

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x + 2)^3} + 1$.

10. Demonstrează că funcția $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^5 + \frac{1}{x}$ este injectivă.

11. Se consideră funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ definite prin $f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, f_4(x) = -\frac{1}{x}, \forall x \neq 0$ și mulțimea $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

a) Demonstrează că toate funcțiile din mulțimea M sunt inversabile și determină inversele lor.

b) Demonstrează că $f \circ g \in M, \forall f, g \in M$.

c) Calculează $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$ și demonstrează că, oricare ar fi ordinea celor 4 funcții în compunere, rezultatul nu se schimbă. Cum interpretezi?

d) Rezolvă, în $\mathbb{R}$, inecuația $f_1^{2025}(x) + f_2^{2025}(x) \leq 2$.



1 $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R},$ $f(x) = x^{-3} + 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$	2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$	3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$
4 $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R},$ $f(x) = \frac{1}{x^5}, \forall x \in \mathbb{R}^*$	5 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$	6 $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ $f(x) = x^{\sqrt{3}}$

B.

12. Calculează $\left(\frac{1}{x} + \left(1 - \left(\frac{3x-1}{1+x}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-2}$ pentru $x = -\frac{1}{3}$.

13. Simplifică:

a) $\frac{x^4 - y^4}{x^6 - y^6}$ pentru $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$; b) $\frac{x^{-4} + x^{-2} + 1}{x^{-2} + x^{-1} + 1}, x \neq 0$; c) $\frac{x^{-5} + 1}{x^{-1} + 1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$.

a) Demonstrează că $f(-2) > f(2)$, dar funcția nu este descrescătoare pe domeniu.

b) Reprezintă grafic funcția și stabilește, utilizând reprezentarea grafică, dacă funcția este injectivă/surjectivă/bijectivă/inversabilă.

c) Rezolvă, în $\mathbb{R}$, ecuația $|f(x)| = \frac{1}{2}$.

d) Rezolvă, în $\mathbb{R}$, ecuația $[f(x)] = 0$, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

e) Rezolvă, în $\mathbb{R}$, ecuația $\{f(x)\} = 0$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracționară.

15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrează că, dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a + b = 2$, atunci $f(a) + f(b) \geq 2$.

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Demonstrează că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(a) + f(b) + f(c) = f(a + b + c)$, atunci $f(a^{2n+1}) + f(b^{2n+1}) + f(c^{2n+1}) = f(a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$.

17. Determină cele mai mici numere naturale n pentru care $10^{-n} < a$, dacă:

a) $a = 0,000125$;

b) $a = 0,0000324$;

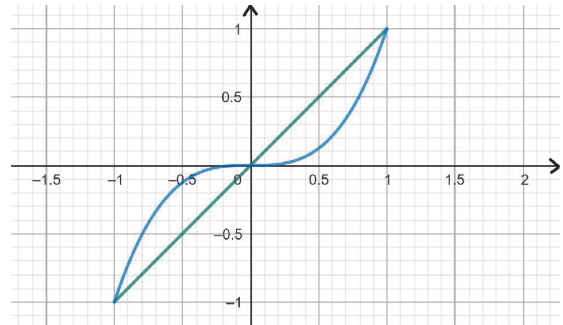
c) $a = 0,000005128$.

18. Se consideră restricțiile funcțiilor putere cu exponenți întregi $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, g(x) = x^3, \forall x \in [-1, 1]$ și S aria suprafeței cuprinse între cele două reprezentări grafice pe intervalul $[-1, 1]$.

a) Rezolvă, grafic, ecuația $f(x) = g(x), x \in [-1, 1]$.

b) Construiește, pe figura alăturată, punctele $A(0, f(0)), B\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right), C(1, g(1))$ și calculează perimetrul triunghiului ABC .

c) Demonstrează că $\frac{3}{8} < S < 1$.



19. Fie $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq f_{100}(2)\}, N = \{x \in \mathbb{N} \mid x = f_k(2), 1 \leq k \leq 100\}, P = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = f_k\left(\frac{1}{2}\right), 1 \leq k \leq 100\}$. Dacă S_M, S_N, S_P reprezintă sumele elementelor mulțimilor M, N , respectiv P , demonstrează că numerele $\frac{S_M}{2^{99}}, \frac{S_N}{2} + 1, 2^{100} \cdot S_P$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.

20. Află ultimele 3 zecimale nenule ale numerelor: a) 5^{-13} ; b) 2^{-30} .

21. Se consideră funcțiile: $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determină n știind că $f_n(3 - \sqrt{2}) = 11 - 6\sqrt{2}$.

b) Determină n știind că $27\left[f_n(3) + f_n\left(\frac{1}{3}\right)\right] = 730$.

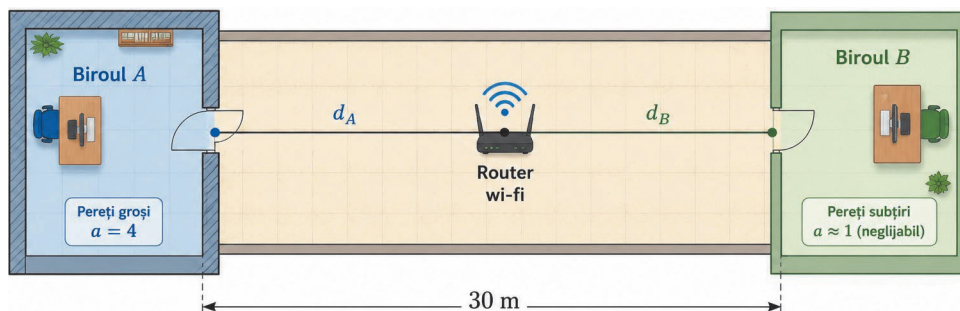
c) Dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $f_2(x) + f_2\left(\frac{1}{x}\right) = a(x)$, demonstrează că $a(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}^*$ și calculează, în funcție de

$a(x)$, sumele: $f_4(x) + f_4\left(\frac{1}{x}\right); f_6(x) + f_6\left(\frac{1}{x}\right); f_1(x) + f_1\left(\frac{1}{x}\right)$.



C.

22. Demonstrează că numărul $N = \frac{18 \cdot 12^n - 2^{n+1} \cdot 6^{n+1} - 54 \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{n-2}}{2^{2n} \cdot 3^n}$ este număr natural, $\forall n \in \mathbb{N}$.
23. Demonstrează că nicio putere cu exponent natural nenul a lui 2 nu poate fi scrisă ca sumă de numere naturale consecutive.
24. Demonstrează că $0 < \left(\frac{2x^2 + x + 2}{3x^2 - x + 4}\right)^n < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
25. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale, cu termenul general $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrează că $\frac{a_n}{a_{n+1}} \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă n este impar.
26. Determină numerele întregi m, n, p astfel încât $\left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^p = 53$.
27. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcția putere, de grad n , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrează că $f(29)$ poate fi scris ca suma a două pătrate perfecte, indiferent de gradul funcției putere.
28. Compară numerele 15^{27} și 65^{18} .
29. Pentru $x \in \mathbb{R}^*$, se consideră expresia $E_n(x) = \frac{x^{-4n} + x^{-3n} + x^{-2n} + x^{-n} + x^0 + x^n}{x^{-2n} + x^0 + x^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrează că $E_n(x) = \frac{x^n + 1}{x^{2n}}$.
30. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^{-1}$. Demonstrează că:
 $\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$;
 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \geq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$.
31. Două birouri, A și B, se află la capetele unui hol cu lungimea de 30 m. Undeva pe hol se montează un router wi-fi care să deservească ambele birouri. Intensitatea semnalului receptat este invers proporțională cu pătratul distanței dintre sursă și receptor, dar și cu un factor de multiplicare $a > 1$ depinzând de grosimea pereților biroului: $I = \frac{k}{a \cdot d^2}$, unde k este constant, reprezentând puterea routerului. Grosimea pereților biroului A generează un factor de multiplicare $a = 4$, iar grosimea pereților biroului B este neglijabilă.
- a) Scrie intensitatea semnalului în birourile A și B, în funcție de distanța x (în metri) de la sursă la biroul A, $I_A(x)$ și $I_B(x)$.
- b) Precizează valorile posibile ale lui x (domeniul comun de definiție al celor două funcții identificate mai sus).
- c) Argumentează de ce pentru a maximiza valoarea funcției $M(x) = \min\{I_A(x), I_B(x)\}$ este necesar ca $I_A(x) = I_B(x)$.
- d) Află distanța față de biroul A la care va fi amplasat routerul, pentru ca receptarea semnalului în birourile A și B să fie optimă în orice moment.



Radicalul de ordin n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

REFLECȚIE DE ÎNCEPUT

Cum putem „recupera” valoarea inițială a unei mărimi atunci când știm doar rezultatul unei puteri? Cu alte cuvinte, dacă știm că o anumită transformare, puterea a doua sau puterea a treia a unui număr, produce numărul 64, ce număr a fost la început?

De ce avem nevoie de radicali?

Un laborator de analiză a sunetului măsoară energia unui semnal audio. Cercetătorii observă că intensitatea percepută de ureche nu crește direct proporțional cu energia, ci mult mai lent.

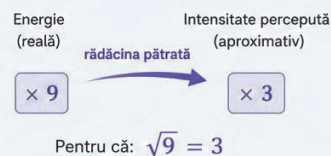
Pentru a „aduce” valorile foarte mari la o scară ușor de interpretat, aplicațiile audio folosesc transformări bazate pe **rădăcini și puteri**.



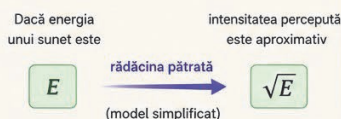
Concluzie importantă

Dacă energia se mărește de 9 ori, senzația auditivă nu pare de 9 ori mai puternică.

În unele modele simplificate, percepția poate fi aproximată prin extragerea **rădăcinii pătrate** din energie.



DE LA ENERGIE LA PERCEPȚIE



Exemplu numeric

Energie (E)	Intensitate percepută (aprox. $\sqrt{E}$)
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
100	10

E crește mult...
...dar percepția crește mult mai lent.

Imaginează-ți un buton de volum.

Fiecare „salt” pe scară înseamnă o înmulțire a energiei. Dar urechea noastră simte doar o creștere mică.



ÎNTREBARE DE REFLECȚIE



Cum putem „recupera” valoarea inițială a unei mărimi atunci când știm doar **rezultatul unei puteri**?

Exemplu:
 $x^2 = 64$



Soluția unică în $[0, \infty)$ este $\sqrt{64} = 8$.

Dar, deoarece $(-8)^2 = 64$, în $\mathbb{R}$ soluțiile sunt $x = -8$ și $x = 8$.

În lecțiile anterioare s-au studiat proprietățile funcției putere de grad n , $n \in \mathbb{N}^*$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, demonstrându-se că este bijectivă doar dacă gradul este impar. Însă, restricția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^n$ este bijectivă $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ca urmare ecuația $x^n = a$ are o unică soluție, $\forall a \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n = 1$, ecuația $x^1 = a$, $a \geq 0$ are soluția $x = a$, situație care nu conduce la construcția sau la determinarea unor elemente noi. Pentru $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, unica soluție din intervalul $[0, \infty)$ a ecuației $x^n = a$, $a \geq 0$ se notează $\sqrt[n]{a}$ și conduce la definirea **radicalului de ordin n (n arbitrar) dintr-un număr pozitiv**.

Din bijectivitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ se deduce că ecuația $x^{2n+1} = a$, $a \in \mathbb{R}$ are o unică soluție reală, care se notează $\sqrt[2n+1]{a}$ și conduce la definirea **radicalului de ordin impar dintr-un număr real**.

Dacă $a = 0$, atunci unica soluție a ecuației $x^n = 0$ este $x = 0$, indiferent dacă n este par sau impar, deci: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Funcția putere

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$

n impar

f este bijectivă

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
(bijectivă)

n par

f nu este bijectivă pe $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
(nu este bijectivă)

2. Restricția pe $[0, \infty)$

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^n$

Funcția este **bijectivă** $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Rezultat important:

Ecuatia $x^n = a$

are o **unică soluție** $\forall a \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Cazuri particulare

$n = 1$

Ecuatia $x^1 = a, a \geq 0$ are soluția unică $x = a$.

$n \geq 2$

Unica soluție din $[0, \infty)$ a ecuației $x^n = a, a \geq 0$ se notează $\sqrt[n]{a}$ și definește **radicalul de ordin n (n arbitrar) dintr-un număr pozitiv**.

4. Consecință din bijectivitate

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*$ este bijectivă.

Rezultă că ecuația $x^{2n+1} = a, a \in \mathbb{R}$ are o **unică soluție reală**.

Această soluție se notează $\sqrt[2n+1]{a}$ și definește **radicalul de ordin impar dintr-un număr real**.

Exemple:

- $\sqrt[3]{a}$ – radical de ordin 3
- $\sqrt[5]{a}$ – radical de ordin 5
- $\sqrt[7]{a}$ – radical de ordin 7
- ...

5. Cazul $a = 0$

Dacă $a = 0$, atunci unica soluție a ecuației $x^n = 0$ este $x = 0$, indiferent dacă n este par sau impar, adică:

$\sqrt[n]{0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

IDEA CENTRALĂ: Bijectivitatea funcțiilor de putere pe domenii potrivite garantează existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor $x^n = a$ și conduce la definiția radicalilor.

$x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$

1. Radical de ordin par dintr-un număr pozitiv



DEFINIȚIE

Unica soluție pozitivă a ecuației $x^{2p} = a$, unde $a \geq 0$ și $p \in \mathbb{N}^*$, se notează $\sqrt[2p]{a}$ și se numește **radicalul de ordin $2p$ din numărul pozitiv a** .



OBSERVAȚII

- radicalul de ordin par se definește doar pentru numere pozitive;
- radicalul de ordin par dintr-un număr pozitiv este, el însuși, un număr pozitiv;
- $\sqrt[2]{a} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a}, \forall a \geq 0$ (se numește **rădăcina pătrată a numărului pozitiv a**);
- $\sqrt[2p]{a}$, pentru $a \geq 0$ și $p \in \mathbb{N}^*$, se numește **rădăcina de ordin $2p$ a numărului pozitiv a** .
- $\sqrt[2p]{0} = 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$;
- $(\sqrt[2p]{a})^{2p} = a, \forall a \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$ ($\sqrt[2p]{a}$ este soluție a ecuației $x^{2p} = a$, deci verifică ecuația);
- $\sqrt[2p]{a^{2p}} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$.

Atenție! Pentru orice număr real a , puterea cu exponent par a lui a este un număr pozitiv, deci poate fi definit $\sqrt[2p]{a^{2p}}$, dar, prin definiție, acest radical este și el un număr pozitiv, chiar dacă numărul a este negativ. Ceea ce înseamnă că, dacă $a < 0$, atunci $\sqrt[2p]{a^{2p}} \neq a$.



EXEMPLE

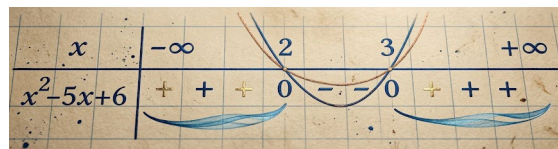
- 1) $(\sqrt[4]{5})^4 = 5;$ 2) $\sqrt[4]{5^4} = 5;$ 3) $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5.$

În exemplele 2 și 3, membrul stâng conține același număr: $5^4 = (-5)^4 = 625$, deci $\sqrt[4]{5^4} = \sqrt[4]{(-5)^4} = 5 = |-5|$.

Condițiile de existență pentru radicalul de ordin par derivă din definiție: $\sqrt[2p]{E(x)}$ este definit dacă și numai dacă $E(x) \geq 0$.

EXEMPLU

Valorile reale ale lui x pentru care $\sqrt[6]{x^2 - 5x + 6}$ este bine definit se deduc din condiția $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, care este o inecuație de gradul al doilea.



Ecuția atașată, $x^2 - 5x + 6 = 0$ are discriminantul $\Delta = 25 - 24 = 1$, iar soluțiile ($\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$) sunt $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$. Soluția inecuației este: $x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

2. Radical de ordin impar dintr-un număr real**DEFINIȚIE**

Unica soluție reală a ecuației $x^{2p+1} = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ și $p \in \mathbb{N}^*$, se notează $\sqrt[2p+1]{a}$ și se numește **radicalul de ordin $2p + 1$ din numărul real a** .

Diferența majoră între radicalul de ordin impar și radicalul de ordin par este aceea că cel de ordin impar se poate defini și pentru numere negative.

OBSERVAȚII

- radicalul de ordin impar se definește pentru orice număr real;
- dacă $a \geq 0$, atunci $\sqrt[2p+1]{a} \geq 0$ și reciproc; dacă $a < 0$, atunci $\sqrt[2p+1]{a} < 0$ și reciproc;
- $\sqrt[2p+1]{a}$, pentru $a \in \mathbb{R}$ și $p \in \mathbb{N}^*$ se numește **rădăcina de ordin $2p + 1$ a numărului real a** ;
- $\sqrt[2p+1]{0} = 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$;
- $(\sqrt[2p+1]{a})^{2p+1} = a, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$
- $(\sqrt[2p+1]{a}$ este soluție a ecuației $x^{2p+1} = a$, deci verifică ecuația);
- $\sqrt[2p+1]{a^{2p+1}} = a, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$;
- $\sqrt[2p+1]{-a} = -\sqrt[2p+1]{a}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$

(Cum $(\sqrt[2p+1]{-a})^{2p+1} = -a$ și $(-\sqrt[2p+1]{a})^{2p+1} = (-1)^{2p+1} \cdot (\sqrt[2p+1]{a})^{2p+1} = -a$, iar soluția ecuației $x^{2p+1} = -a$ este unică, rezultă egalitatea celor două numere).

EXEMPLE

- 1) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$;
- 2) $(\sqrt[3]{-3})^3 + \sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[7]{(-3)^7} = -3 + |-3| + (-3) = -3 + 3 - 3 = -3$;
- 3) $\sqrt[9]{-512} = -\sqrt[9]{512} = -\sqrt[9]{2^9} = -2$.

Pentru radicalul de ordin impar nu se impun condiții speciale de existență, acesta fiind definit pentru orice număr real. Este suficient ca expresiile de sub radicalul de ordin impar să existe, deci să fie numere reale.

EXERCIȚII REZOLVATE

1. Determină mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care expresia $E(a) = \sqrt[3]{\frac{a+3}{a^2-4}}$ este bine definită.

Valorile lui a pentru care $E(a)$ este bine definită se determină impunând condiția ca fracția $\frac{a+3}{a^2-4}$ să existe, adică numitorul ei să fie diferit de zero: $a^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq 4 \Leftrightarrow |a| \neq 2 \Leftrightarrow a \neq \pm 2$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

2. Pentru ce numere x , expresia $E(x) = \sqrt[4]{\sqrt{7-3x}} \sqrt{2x-3}$ este bine definită?

Numărul x apare și la ordinul radicalului și sub radical. Radicalul exterior este de ordin par, deci $\sqrt{2x-3}$ trebuie să fie mai mare sau egal cu 0, așadar $\sqrt{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 0$, iar $7-3x$ poate fi ordinul unui radical doar dacă este număr natural mai mare sau egal ca 2.

$$\begin{cases} 7-3x \in \mathbb{N} \text{ și } 7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3} \text{ și } 3x \in \mathbb{Z} \\ 2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ deci } x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right] \text{ și } 3x \in \mathbb{Z}. \text{ Dar } 3x \in \left[\frac{9}{2}, 5\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow 3x \in \{5\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{\frac{5}{3}\right\}. \text{ Verificare: Pentru } x = \frac{5}{3}, E\left(\frac{5}{3}\right) = \sqrt[4]{\sqrt{\frac{1}{3}}} \text{ și este bine definită.}$$

3. Operații cu radicali și proprietăți ale radicalilor

(1) Înmulțirea radicalilor de același ordin

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \forall a, b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} = \sqrt[2n+1]{a \cdot b} \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

EXEMPLE

$$\text{a) } \sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24} = \sqrt[4]{54 \cdot 24} = \sqrt[4]{(6)^4} = 6; \quad \text{b) } \sqrt[5]{-2} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$$

Proprietatea se generalizează:

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_p} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p}, \forall a_1, a_2, \dots, a_p \geq 0, p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2;$$

$$\sqrt[2n+1]{a_1} \cdot \sqrt[2n+1]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n+1]{a_p} = \sqrt[2n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p}, \forall a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Reflectăm: Este $\sqrt[4]{(-2) \cdot (-8)}$ bine definit? Poate fi scris ca $\sqrt[4]{-2} \cdot \sqrt[4]{-8}$?



(2) Împărțirea radicalilor de același ordin

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\ \forall a \geq 0, \forall b > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} = \sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} \\ \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

EXEMPLE

$$\text{a) } \frac{\sqrt[6]{56}}{\sqrt[6]{7}} = \sqrt[6]{\frac{56}{7}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{(\sqrt{2})^6} = \sqrt{2};$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}}{\sqrt[3]{x^5+x^4+x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1+x+x^2}{x^5+x^4+x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1+x+x^2}{x^3(1+x+x^2)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Atenție! Raportul a două numere negative este pozitiv, deci radicalul de ordin par al unui astfel de raport este definit, în timp ce, separat, radicalii din numărător, respectiv din numitor nu se definesc.

Este **bine definit**:

$$\sqrt[4]{\frac{-2}{-8}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

raportul este pozitiv:

$$\frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} > 0$$

**NU este corect** să scriem:

$$\sqrt[4]{\frac{-2}{-8}} = \frac{\sqrt[4]{-2}}{\sqrt[4]{-8}}$$

$\sqrt[4]{-2}$ nu este definit
(radical de ordin par
definit numai pentru
numere pozitive)

$\sqrt[4]{-8}$ nu este definit
(radical de ordin par
definit numai pentru
numere pozitive)

De ce nu
putem „desface”
radicalul?

Proprietatea $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ este valabilă
numai când $a \geq 0$ și $b > 0$ pentru n par
(sau, în general, când radicalii sunt definiți).

Dacă a și b au același semn negativ,
→ raportul $\frac{a}{b}$ este pozitiv (deci radicalul din stânga
este definit), dar radicalii $\sqrt[n]{a}$ și $\sqrt[n]{b}$ nu sunt definiți
pentru n par.

**CONDIȚIE OBLIGATORIE**

Pentru ca egalitatea

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

să aibă loc (în special pentru n par),
trebuie ca $a \geq 0$ și $b > 0$.



Chiar dacă $\sqrt[4]{\frac{-2}{-8}}$ este bine definit, acesta nu poate fi scris ca $\frac{\sqrt[4]{-2}}{\sqrt[4]{-8}}$,
dat fiind că acești doi radicali nu au fost definiți (radicalul de ordin par se definește doar pentru numere pozitive).
Așadar, **condiția de pozitivitate a celor două numere din raportul de sub radical este obligatorie pentru ca egalitatea să aibă loc.**

(3) Ridicarea radicalilor la putere

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\forall a \geq 0, \forall m, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$$

$$(\sqrt[2n+1]{a})^m = \sqrt[2n+1]{a^m}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

**EXEMPLE**

$$a) \left(\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\right)^5 = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \sqrt[10]{\frac{1}{32}};$$

$$b) \left(\sqrt[7]{-\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt[7]{(-\sqrt{3})^2} = \sqrt[7]{3}.$$

(4) Simplificarea ordinului radicalului și a exponentului puterii de sub radical cu același număr natural

$$\sqrt[n \cdot k]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\forall a > 0, \forall k, n \in \mathbb{N}^*, k, n \geq 2, p \in \mathbb{Z}^*$$

Se simplifică ordinul radicalului
și exponentul puterii de sub radical
prin același număr natural, $k \geq 2$.

$$\sqrt[(2n+1) \cdot k]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[2n+1]{a^p}$$

$$\forall a > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2, p \in \mathbb{Z}^*$$

Atenție! Dacă $a < 0$ și k este par,
iar p impar, această egalitate nu are
loc!

**EXEMPLE**

$$a) \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$$

b) $\sqrt[6]{(-2)^{10}}$ este bine definit și este număr pozitiv. Simplificarea prin 2 a ordinului radicalului și a exponentului puterii de sub radical ar conduce la $\sqrt[3]{(-2)^5}$, care este bine definit, dar este un număr negativ, deci cele două numere nu sunt egale.

(5) Amplificarea ordinului radicalului și a exponentului puterii de sub radical cu același număr natural

$$\sqrt[2n]{a} = \sqrt[2n \cdot k]{a^k}$$

$$\forall a \geq 0, \forall k, n \geq 2, k, n \in \mathbb{N}$$

Se amplifică ordinul radicalului și exponentul puterii de sub radical cu același număr natural, $k \geq 2$.

$$\sqrt[2n+1]{a} = \sqrt[(2n+1) \cdot k]{a^k}$$

$$\forall a \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Atenție! Dacă $a < 0$ și k este par, această egalitate nu are loc!

EXEMPLE

a) $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[3]{-3}$ este un număr negativ, în timp ce $\sqrt[3 \cdot 2]{(-3)^2} = \sqrt[6]{9}$ este un număr pozitiv.

c) Numărul $N = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$ este număr natural, deși nu pare.

Produsul celor doi radicali se poate efectua doar dacă se aduc la același ordin, care va fi cel mai mic multiplu comun al celor două ordine, respectiv 6.

$$N = \sqrt[3 \cdot 2]{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \sqrt[6]{9-8} = \sqrt[6]{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

(6) Compunerea radicalilor

$$\sqrt[2n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[2n \cdot p]{a}$$

$$\forall a \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2$$

$$\sqrt[2n+1]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[(2n+1) \cdot p]{a}$$

$$\forall a \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2$$

Dacă p este impar, egalitatea are loc pentru oricare $a \in \mathbb{R}$.

EXEMPLE

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[12]{10}$

b) Numărul $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[6]{\sqrt{5}}}$ se poate scrie sub forma unui singur radical:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[6]{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[3 \cdot 2]{5}}{\sqrt[6 \cdot 5]{5}} = \frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[30]{5}} = \frac{\sqrt[6 \cdot 5]{5}}{\sqrt[30]{5}} = \frac{\sqrt[30]{5^5}}{\sqrt[30]{5}} = \sqrt[30]{5^4} = \sqrt[15]{5^2}.$$

(7) Compararea radicalilor

$$\sqrt[2n]{a} \leq \sqrt[2n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

unde $a, b \geq 0$

$$\sqrt[2n+1]{a} \leq \sqrt[2n+1]{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$

EXEMPLU

Compararea numerelor $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ și $\sqrt[5]{\frac{1}{25}}$ nu se poate face direct, deoarece radicalii nu au același ordin. Cel mai mic multiplu comun al ordinelor celor doi radicali este 15, deci vom aduce ambii radicali la ordin 15 (proprietatea 5) prin amplificare: $\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3 \cdot 5]{\left(\frac{1}{5}\right)^5} = \sqrt[15]{\frac{1}{3125}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{25}} = \sqrt[5 \cdot 3]{\left(\frac{1}{25}\right)^3} = \sqrt[15]{\frac{1}{15625}}$. Cum $\frac{1}{3125} > \frac{1}{15625}$, rezultă (conform proprietății 7) $\sqrt[15]{\frac{1}{3125}} > \sqrt[15]{\frac{1}{15625}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{5}} > \sqrt[5]{\frac{1}{25}}$.



(8) Scoaterea factorilor de sub radical

$$\sqrt[2n]{a^{2n \cdot k}} = a \cdot \sqrt[2n]{a^k}$$

$$\forall a \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{(2n+1) \cdot k}} = a \cdot \sqrt[2n+1]{a^k}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ impar}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{(2n+1) \cdot k}} = |a| \cdot \sqrt[2n+1]{a^k}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ par}$$

EXEMPLE

a) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2};$

c) $\sqrt[4]{(-2)^{12} \cdot 3^5} = \sqrt[4]{[(-2)^3]^4 \cdot 3^4 \cdot 3} = |(-2)^3| \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{3} = 24\sqrt[4]{3};$

b) $\sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^{3 \cdot 3} \cdot 2} = 2^3 \sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2};$

d) $\sqrt[6]{(-3)^6 \cdot 2} = |-3| \sqrt[6]{2} = 3\sqrt[6]{2}.$

(9) Introducerea factorilor sub radical

$$a \cdot \sqrt[2n]{b} = \sqrt[2n]{a^{2n} \cdot b}$$

$$\forall a, b \geq 0$$

$$a \cdot \sqrt[2n]{b} = -\sqrt[2n]{a^{2n} \cdot b}$$

$$\forall b \geq 0, \forall a < 0$$

$$a \cdot \sqrt[2n+1]{b} = \sqrt[2n+1]{a^{2n+1} \cdot b}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

EXEMPLE

a) $-2\sqrt[7]{2} = \sqrt[7]{(-2)^7 \cdot 2} = \sqrt[7]{-256};$

b) $-2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{-24};$

c) $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48};$

d) $2\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3} = \sqrt[6]{192}.$

Observație: Dacă la radicalul de ordin 3 factorul negativ intră sub radical la puterea egală cu ordinul radicalului, la radicalul de ordin par această proprietate nu funcționează pentru că se modifică semnul numărului inițial!

Formulele radicalilor compuși (doar pentru radicali de ordinul 2)

Radicalii de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, unde A, B sunt numere raționale pozitive, cu $A > \sqrt{B}$ și $\sqrt{B} \notin \mathbb{Q}$, pot fi scriși ca suma altor doi radicali. Transformarea este convenabilă doar dacă cei doi radicali noi au formă mai simplă decât cei inițiali.

Se calculează $C = \sqrt{A^2 - B}$. Dacă acesta este număr rațional, iar A este tot un număr rațional, atunci este convenabilă transformarea:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

EXEMPLE

1) $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$

Radicalul trebuie adus la forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$, deci prima dată se introduce factorul 3 sub radical:

$$\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \sqrt{7 + \sqrt{45}}, \text{ de unde } A = 7, B = 45, \text{ iar } C = \sqrt{49 - 45} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{7+2}{2}} + \sqrt{\frac{7-2}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}.$$

2) $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$

Radicalul trebuie adus la forma $\sqrt{A - \sqrt{B}}$, deci prima dată se introduce factorul 4 sub radical:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{9 - \sqrt{32}}, \text{ de unde } A = 9, B = 32, \text{ iar } C = \sqrt{81 - 32} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9+7}{2}} - \sqrt{\frac{9-7}{2}} = \sqrt{8} - 1 = 2\sqrt{2} - 1.$$

3) $\sqrt{6 + \sqrt{3}}$



Cum $A = 6$, $B = 3$ și $C = \sqrt{36 - 3} = \sqrt{33}$, radicalul inițial devine $\sqrt{6 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{33}}{2}} + \sqrt{\frac{6 - \sqrt{33}}{2}}$, formă care este mai complicată decât cea inițială, deci nu se poate conta pe optimizarea calculului în această formă. Transformarea NU este avantajoasă în acest caz.

Media aritmetică, media geometrică și media armonică a n numere pozitive

Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt numere pozitive, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci:

media aritmetică a celor n numere:

$$m_a(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

media geometrică a celor n numere:

$$m_g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

media armonică a celor n numere:

$$m_h(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Inegalitatea mediilor:

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$m_h(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq m_g(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq m_a(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă numerele sunt egale.

• Inegalitatea mediilor •

1 Pentru 2 numere strict pozitive a, b :

$$\underbrace{\frac{2ab}{a+b}}_{\text{media armonică}} \leq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{media geometrică}} \leq \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{media aritmetică}}$$

2 Pentru 3 numere strict pozitive a, b, c :

$$\underbrace{\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}}_{\text{media armonică}} \leq \underbrace{\sqrt[3]{abc}}_{\text{media geometrică}} \leq \underbrace{\frac{a+b+c}{3}}_{\text{media aritmetică}}$$

4. Expresii conjugate algebric

Optimizarea calculelor, în special a celor cu fracții ai căror numitori conțin radicali, presupune diverse transformări sau artificii de scriere, până la obținerea unor forme convenabile ale numerelor cu care se operează. **Raționalizarea numitorilor** este o astfel de transformare și urmărește eliminarea radicalilor de la numitorii fracțiilor, prin amplificarea fracțiilor cu expresii sau cu numere convenabile, astfel încât la numitor să se obțină numere sau expresii fără radicali.



DEFINIȚIE

Două expresii (sau numere) care conțin radicali se numesc **conjugate algebric** dacă produsul lor nu mai conține radicali.



EXEMPLE

1) $\sqrt[3]{3}$ și $\sqrt[3]{9}$ sunt numere care conțin radicali, dar $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$ nu mai conține radicali. Se deduce că $\sqrt[3]{3}$ și $\sqrt[3]{9}$ sunt numere conjugate algebric.

2) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ și $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sunt expresii care conțin radicali, dar $(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 3 - 5 = -2$ nu mai conține radicali. Expresiile $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ și $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sunt conjugate algebric.

Pentru raționalizarea numitorilor și pentru optimizarea calculelor este important să cunoști perechi de numere/expresii conjugate. Acestea sunt deduse pe baza formulelor algebrice cunoscute, a operațiilor cu radicali și a proprietăților acestora.

Perechi de numere/ expresii conjugate uzuale		Produsul celor două numere/ expresii conjugate algebric	Condiții de definire
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	$a > 0$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$	$a \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}} = a$	$a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$\sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[n]{a^{n-k}}$	$\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$	$a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, k \in \mathbb{N}, k < n$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$	$a, b > 0$
$\sqrt{a} - b$	$\sqrt{a} + b$	$(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2$	$a > 0, b \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a} - b$	$\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$	$(\sqrt[3]{a} - b)(\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2) = a - b^3$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a} + b$	$\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$	$(\sqrt[3]{a} + b)(\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2) = a + b^3$	$a, b \in \mathbb{R}$

Observație: Conjugata unei expresii de pe prima coloană se găsește în a doua coloană, iar conjugata expresiei de pe a doua coloană este perechea ei de pe prima coloană. Trebuie să acorzi atenție ambelor coloane pentru a recunoaște ușor conjugatele acestor expresii.



GENERALIZARE

1. Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, și $a, b > 0$, expresiile $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ și $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$ sunt conjugate algebric și $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $a, b \in \mathbb{R}$, expresiile $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ și $\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}$ sunt conjugate algebric și $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a + b$



EXEMPLE

- 1) Conjugatul algebric al numărului $\sqrt[7]{3^4}$ este numărul $\sqrt[7]{3^3}$. Produsul celor două numere este 3.
- 2) Conjugata algebrică a expresiei $\sqrt{x^2 + 1} - x$ ($x \in \mathbb{R}$) este expresia $\sqrt{x^2 + 1} + x$. Produsul lor este: $(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x) = x^2 + 1 - x^2 = 1$.
- 3) Conjugata algebrică a expresiei $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$ este $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$. Produsul lor este: $(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = 3 + 2 = 5$.



EXEMPLE DE RAȚIONALIZĂRI ALE NUMITORILOR

$$1) \frac{3}{\sqrt[4]{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{6^3}}{\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{6^3}} = \frac{3\sqrt[4]{216}}{\sqrt[4]{6^4}} = \frac{3\sqrt[4]{216}}{6} = \frac{\sqrt[4]{216}}{2}.$$

$$2) \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2})} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt[3]{2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{6} = \frac{\sqrt[6]{27 \cdot 16}}{3} = \frac{\sqrt[6]{432}}{3}.$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2) \cdot (\sqrt{5}+2)} + \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} + \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} =$$

$$= \sqrt{5} + 2 + \sqrt{7} - \sqrt{5} = 2 + \sqrt{7}.$$

$$4) \frac{5}{\sqrt[3]{2}-3} = \frac{5(\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+3^2)}{(\sqrt[3]{2}-3) \cdot (\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+3^2)} = \frac{5(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+9)}{(\sqrt[3]{2})^3-3^3} = \frac{5(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+9)}{-25} = -\frac{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+9}{5}.$$

$$5) \frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} = \frac{4(\sqrt[3]{3}+1)}{(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1) \cdot (\sqrt[3]{3}+1)} = \frac{4(\sqrt[3]{3}+1)}{(\sqrt[3]{3})^3+1^3} = \frac{4(\sqrt[3]{3}+1)}{4} = \sqrt[3]{3}+1.$$

$$6) \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}}{5-\sqrt[3]{4}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}) \cdot (5+5\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2})}{5^3-(\sqrt[3]{4})^3} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}) \cdot (25+5\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{125-4} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}) \cdot (25+5\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{121}.$$

$$7) \frac{12}{\sqrt[6]{108}+\sqrt[3]{2}-\sqrt{12}-2}. \text{ Numitorul fracției se transformă în produs: } \sqrt[6]{108}+\sqrt[3]{2}-\sqrt{12}-2 =$$

$$= \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} + \sqrt[3]{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} - 2\sqrt{3} - 2 = (\sqrt[3]{2}-2) \cdot (\sqrt{3}+1),$$

apoi se amplifică fracția cu expresiile conjugate algebric ale celor două expresii din paranteze:

$$\frac{12}{\sqrt[6]{108}+\sqrt[3]{2}-\sqrt{12}-2} = \frac{12}{(\sqrt[3]{2}-2) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{12(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4)(\sqrt{3}-1)}{(2-8)(3-1)} = -\frac{(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4)(\sqrt{3}-1)}{(2-8)(3-1)}.$$

$$8) \frac{1}{\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{2}+1} = \frac{\sqrt[5]{2}+1}{(\sqrt[5]{2^4}-\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^2}-\sqrt[5]{2}+1)(\sqrt[5]{2}+1)} = \frac{\sqrt[5]{2}+1}{(\sqrt[5]{2})^5+1} = \frac{\sqrt[5]{2}+1}{3}.$$



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII (PORTOFOLIU DE GÂNDIRE CRITICĂ)

A cincea provocare: **Poate inteligența artificială să înțeleagă matematica?**

Un elev trasează ca sarcină unui asistent IA următoarea cerință: „Raționalizează numitorul expresiei.” IA produce un răspuns complet și corect. Elevul afirmă: „Se face dovada că IA înțelege matematica.” Profesorul răspunde: „Nu sunt convins.” *Cine are dreptate?*

Reflectează și răspunde:

- Există diferență între: • a produce un răspuns corect; • a înțelege de ce este corect?
- Dacă o persoană aplică mecanic un algoritm fără să știe motivul fiecărui pas, putem spune că înțelege?
- Cum ai verifica dacă un răspuns generat de IA este într-adevăr corect?
- Ce poate face mai bine: • calculatorul? • omul?

Discută în echipă:

Alegeți un exercițiu de raționalizare din această lecție. Rezolvați-l:
• întâi folosind doar calcule; • apoi explicând sensul fiecărui pas.
Care variantă demonstrează mai bine înțelegerea?

Ideea mare: *Calculul poate fi automatizat. Înțelegerea nu poate fi delegată integral. Reflectează asupra următoarei afirmații: „Execut algoritmul sau înțeleg algoritmul?”*



Funcția radical

EXEMPLE

1. Un agricultor vrea să împrejmuiască un teren pătrat, dar știe doar aria suprafeței acestuia, $A = 400 \text{ m}^2$. Pentru construirea gardului are însă nevoie să știe lungimea laturii pătratului.

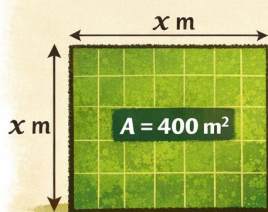
Modelarea matematică: Dacă x este lungimea laturii pătratului, atunci aria suprafeței este $A = x^2$, deci $x = \sqrt{A} = 20 \text{ (m)}$. Funcția folosită este $f(A) = \sqrt{A}$, numită funcție radical de ordin 2, și apare natural când „inversăm” o relație de tip ridicare la pătrat (pătratică).

2. Un inginer trebuie să construiască un rezervor cubic cu volum $V = 27 \text{ m}^3$, așadar are nevoie să știe muchia cubului.

Modelarea matematică: Dacă x este lungimea muchiei cubului, atunci $V = x^3$, deci $x = \sqrt[3]{V} = 3 \text{ (m)}$. Funcția folosită este $f(V) = \sqrt[3]{V}$, numită radical de ordin 3, și apare când „inversăm” o relație de tip ridicare la cub (cubică).

EXEMPLU: CALCULUL LUNGIMII LATURII UNUI TEREN PĂTRAT

Un agricultor are un teren pătrat cu aria $A = 400 \text{ m}^2$.



Modelare matematică:

$$\begin{aligned} A &= x^2 \\ x &= \sqrt{A} \\ &= \sqrt{400} \\ &= 20 \text{ m} \end{aligned}$$

Funcția folosită: $f(A) = \sqrt{A}$

„Inversăm” relația:

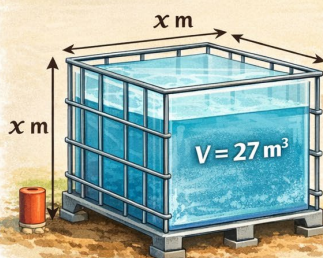
$x^2 \rightarrow x \rightarrow$ Radical de ordin 2.

$$\sqrt{A} \rightarrow 20 \text{ m}$$

„Rădăcina” pătrată

EXEMPLU: CALCULUL MUCHIEI UNUI REZERVOR CUBIC

Un inginer trebuie să construiască un rezervor cubic cu volum de $V = 27 \text{ m}^3$, așa că are nevoie să știe muchia cubului.



Modelare matematică:

$$\begin{aligned} V &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{V} \\ &= \sqrt[3]{27} \\ &= 3 \text{ m} \end{aligned}$$

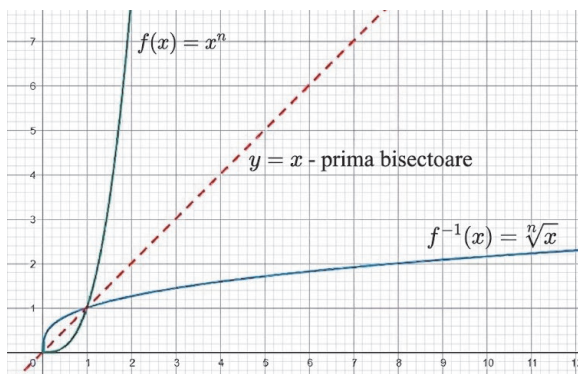
Funcția folosită: $f(V) = \sqrt[3]{V}$

„Inversăm” relația:

$x^3 \rightarrow x \rightarrow$ Radical de ordin 3.

$$\sqrt[3]{27} \rightarrow 3 \text{ m}$$

„Rădăcina” cubică



Funcțiile radical sunt modele naturale pentru recuperarea unei dimensiuni dintr-o mărime compusă (de exemplu, arie sau volum).

Bijectivitatea funcției putere de grad n , $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, asigură existența funcției inverse a acesteia indiferent de grad. Inversa acestei funcții este $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și se numește **funcția radical de ordin n** , iar reprezentările grafice ale celor două funcții sunt curbe simetrice față de prima bisectoare.

DEFINIȚIE

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, funcția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ se numește **funcția radical de ordin n** .

Observație: Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, impar, funcția putere de grad n este bijectivă pe $\mathbb{R}$, ceea ce permite definirea inversei ei, funcția radical de ordin impar, pe toată mulțimea numerelor reale.

Din definiția funcției inverse se deduc primele relații pe care le satisface funcția radical:

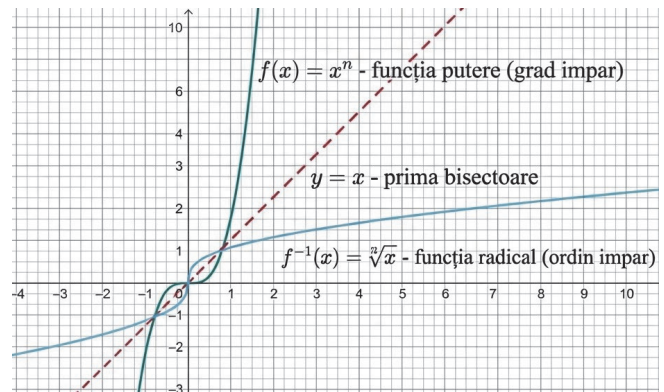
$$(\sqrt[n]{x})^n = x, \forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Pentru funcția radical de ordin impar, relațiile se extind la mulțimea numerelor reale:

$$(\sqrt[2p+1]{x})^{2p+1} = x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt[2p+1]{x^{2p+1}} = x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$$



TEOREMĂ

Funcția radical de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ este strict crescătoare.

Temă: Utilizând strict monotonia funcției putere de grad n , restricționată la intervalul $[0, \infty)$, demonstrează strict monotonia funcției radical de ordin n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

TEOREMĂ

Funcția radical de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n impar, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și impară.

Temă: Utilizând strict monotonia funcției putere de grad impar, demonstrează strict monotonia funcției radical de ordin impar n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar din proprietățile radicalilor de ordin impar, demonstrează imparitatea acestei funcții.

EXERCITIUL REZOLVAT

Determină valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{-3x^2 + 24x - 16} + \sqrt[7]{-2x^2 + 16x - 31}$.

Rezolvare:

Folosind formele canonice ale funcțiilor de gradul al doilea de sub cei doi radicali, se obține:

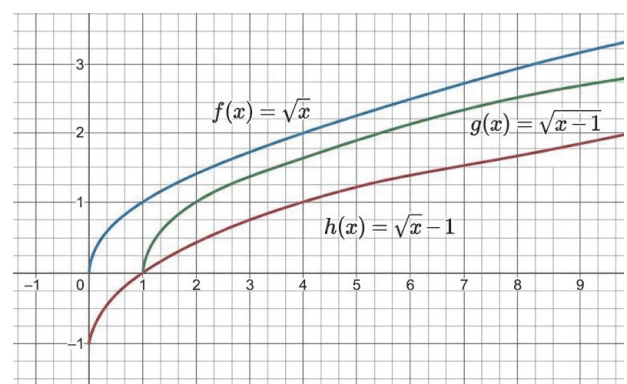
$f(x) = \sqrt[5]{32 - 3(x - 4)^2} + \sqrt[7]{1 - 2(x - 4)^2}$. Din $(x - 4)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obținem $32 - 3(x - 4)^2 \leq 32$ și $1 - 2(x - 4)^2 \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funcțiile radical de ordin 5, respectiv de ordin 7 sunt strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, așadar $\sqrt[5]{32 - 3(x - 4)^2} \leq \sqrt[5]{32} = 2$ și $\sqrt[7]{1 - 2(x - 4)^2} \leq \sqrt[7]{1} = 1$, de unde $f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Cum $f(4) = 3$, rezultă că valoarea maximă a funcției este 3 și se atinge în $x = 4$.

Lectură grafică:

Pornind de la reprezentarea grafică a funcției radical, se pot construi, prin diverse translații, reprezentările grafice ale unor funcții compuse cu funcția radical. În imagine sunt reprezentate funcțiile $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$ și $h(x) = \sqrt{x} - 1$.

● Funcția f este funcția de bază, cu domeniul de definiție $[0, \infty)$ și cu imaginea $[0, \infty)$.

● Funcția g se obține compunând funcția radical de ordin 2, respectiv f , cu funcția de gradul întâi $x \rightarrow x - 1$. Domeniul maxim de definiție al lui g se obține impunând condiția $x - 1 \geq 0$, iar imaginea



este intervalul $[0, \infty)$. Curba reprezentativă a funcției g are exact aceeași formă cu cea a funcției f și se obține printr-o translație spre dreapta, cu o unitate, din reprezentarea grafică a lui f .

● Funcția h se obține compunând funcția de gradul întâi $x \rightarrow x - 1$ cu funcția radical de ordin 2, respectiv f . Domeniul de definiție al lui h este același cu domeniul de definiție al lui f , respectiv $[0, \infty)$, iar $Im(h) = [-1, \infty)$. Curba reprezentativă a funcției h are exact aceeași formă cu cea a funcției f și se obține printr-o translație în jos, cu o unitate, din reprezentarea grafică a lui f .



ACTIVITATE DE ÎNVĂȚARE (PE GRUPE)

Deformarea unui material

Studiind deformarea unei bare metalice în funcție de variația temperaturii față de temperatura inițială, un cercetător constată că deformarea (în mm) este dată de relația: $d(x) = \sqrt[3]{|x|}$, unde x este variația temperaturii (în $^{\circ}\text{C}$).

I. 1. Calculează:

a) $d(8)$; b) $d(-8)$; c) $d(0)$.

2. Completează tabelul:

x	-27	-1	0	1	27
$d(x)$					

3. Compară: a) $d(8)$ și $d(-8)$; b) $d(1)$ și $d(27)$.

4. Explică de ce apare $|x|$ în formulă, în contextul problemei.

5. Determină variația temperaturii x , știind că $d(x) = 2$.

II. 1. Reprezintă graficul funcției $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x) = \sqrt[3]{|x|}$ (sugestie: calculează câteva valori, observă simetria și utilizează graficul funcției radical de ordin 3)

2. Demonstrează că funcția este pară.

3. Compară funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ și $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x) = \sqrt[3]{|x|}$, pentru $x > 0$. Care dintre ele are o creștere mai rapidă? Justifică.

III. 1. Primul material studiat se deformează după legea $d_1(x) = \sqrt[3]{|x|}$, iar un alt material are deformarea $d_2(x) = 2\sqrt[3]{|x|}$. Care dintre ele se deformează mai mult pentru aceeași variație de temperatură?

2. Calculează diferența dintre deformări pentru aceeași variație de temperatură și stabilește cum se modifică această diferență când $|x|$ crește.



EXERCITII PROPUSE

A.

1. Calculează: a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$; b) $\sqrt[4]{256}$; c) $\sqrt[6]{(-2)^{12}}$; d) $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$; e) $\sqrt[6]{\frac{1}{x^6}}$, $x \neq 0$; f) $\sqrt{0,0025}$.

2. Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care: a) $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}$; b) $\sqrt[4]{x} = \sqrt{6}$; c) $\sqrt[6]{x^2} = 2$.

3. Află valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care expresia $E(a)$ este bine definită, în fiecare dintre situațiile:

a) $E(a) = \sqrt[5]{\frac{1}{a}}$; b) $E(a) = \sqrt[4]{3a-1}$; c) $E(a) = \sqrt[3]{a^2-1}$; d) $E(a) = \sqrt{\frac{3a-1}{a^2-1}}$.

4. Calculează: a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{72}$; b) $\sqrt[4]{\frac{2}{32}}$; c) $\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$; d) $\sqrt[3]{76-44\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{76+44\sqrt{3}}$.

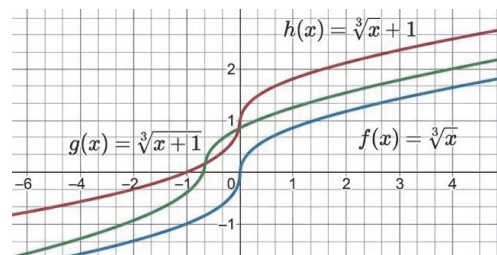
5. Scrie numerele următoare folosind un singur radical:

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}}$; b) $\sqrt[6]{3\sqrt[3]{2}\sqrt{5}}$; c) $\sqrt{y} \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[4]{y}, y \geq 0$; d) $\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x^5}}}{\sqrt{x^3\sqrt{x\sqrt{x}}}}, x > 0$.

6. Scrie în ordine crescătoare numerele: a) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[6]{6}$; b) $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}$.
7. Scoate factori de sub radicali: a) $\sqrt[3]{81 \cdot 16}$; b) $\sqrt[4]{(-2)^6}$; c) $\sqrt[4]{\frac{x^8}{y^4}}, x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$; d) $\sqrt[5]{\frac{9\sqrt{3}}{64}}$.
8. Introdu factorii din fața radicalului sub radical: a) $2\sqrt[2]{7}$; b) $-3\sqrt[5]{2}$; c) $-2\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; d) $-\frac{1}{3}\sqrt[2]{27}$.
9. Completează tabelul următor cu expresiile conjugate algebric și cu produsul acestora:

Expresia	$\sqrt[5]{2}$		$\sqrt[4]{3} - 1$		$\sqrt[3]{2} + 2$	$\sqrt[4]{7^3}$
Conjugata algebrică		$\sqrt[3]{5} + 1$		$\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$		
Produsul						

10. a) Citește graficele din imaginea alăturată și, pentru fiecare funcție în parte, stabilește domeniul de definiție, imaginea funcției, precum și soluțiile ecuațiilor $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, respectiv $h(x) = 0$.



b) Explică în ce mod se obțin curbele reprezentative ale funcțiilor g și h din reprezentarea grafică a funcției f .

11. Folosind monotonia funcției radical, rezolvă:

a) $\sqrt{3x+1} \geq \sqrt{2x^2+1}$; b) $\sqrt[5]{1-x} > \sqrt[5]{x^2-1}$; c) $\sqrt{x+2} \leq x$; d) $\sqrt{x-6} > x$.

12. Calculează media aritmetică, media geometrică și media armonică pentru seturile de numere:

a) 1, 3, 9; b) 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 ; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{6\sqrt{3}}, \frac{36}{\sqrt{3}}$.

B.

13. Verifică dacă sunt adevărate afirmațiile:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = 1$; b) $\sqrt{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; c) $\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14+6\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$.

14. Compară numerele

$a = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$ și $b = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{4}-\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$.

15. Raționalizează numitorii următoarelor fracții:

a) $\frac{86}{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; b) $\frac{9}{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}$; c) $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$; d) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$; e) $\frac{34}{\sqrt[3]{9}+2}$; f) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$;
g) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; h) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$; i) $\frac{12}{\sqrt[6]{128}-\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}-1}$; j) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; k) $\frac{339}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{7}}$.

16. Află valorile reale ale numărului y pentru care expresia $E(y)$ este bine definită, în cazurile:

a) $E(y) = \sqrt{|y-1|} + \sqrt[4]{y^2+3}$; b) $E(y) = \sqrt{1-y} + \sqrt[12]{y-1}$; c) $E(y) = \sqrt[3]{1-\frac{1}{y}} - \sqrt[4]{3-|y|}$.

17. Determină mulțimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sqrt[6]{x^2-2(m+1)x+m+3}$ să existe pentru orice număr real x .

18. Demonstrează că: a) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) dacă $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$ și $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, atunci $x = a$ și $y = b$;

c) există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$.

19. Calculează sumele următoare:

a) $S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$;

b) $S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{k^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{(k+1)^2}}$;

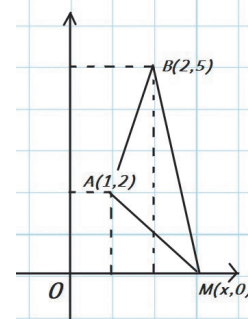
c) $S_3 = \sum_{k=1}^n \sqrt{2k - \sqrt{4k^2 - 1}}$;

d) $S_4 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + 2\sqrt{k(k+1)}}$.

20. a) Demonstrează identitatea $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
 b) Demonstrează că, dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}$.
 c) Demonstrează că inegalitatea de mai sus (*inegalitatea mediilor*) devine egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$.
 d) Rezolvă, în $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xyz = 1 \end{cases}$.
21. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 27$ este bijectivă și determină inversa ei.

C.

22. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt[3]{2 + \sqrt{a}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{a}} = 2$.
23. Demonstrează că funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$ este strict descrescătoare și află valoarea maximă a ei.
24. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 29}$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maximal de definiție al funcției.
- a) Determină mulțimea D .
 b) Analizează imaginea alăturată și stabilește cum modelează funcția dată configurația geometrică din imagine.
 c) Află valoarea minimă a funcției, când x parcurge integral mulțimea D .
 d) Formulează o problemă de geometrie sau una practică, folosind configurația din imagine sau alta asemănătoare, pe care să o modelezi utilizând funcția radical, urmărind optimizarea unor valori (aflarea valorii maxime sau a valorii minime).



25. Determină numerele raționale x pentru care are loc egalitatea: $\sqrt[2x-1]{\sqrt[8-2x]{\left(\frac{1}{3-x}\right)^6}} = \sqrt[7-2x]{\sqrt{5/x}}$.

26. Se consideră seturile de numere reale (a_1, a_2, a_3, a_4) care satisfac, simultan, proprietățile:

$$(1) \sqrt[8]{a_1^2} + \sqrt[16]{a_2^4} + \sqrt[24]{a_3^6} + \sqrt[32]{a_4^8} = 12; \quad (2) \prod_{k=1}^4 (1 + \sqrt[4]{|a_k|}) = 256.$$

- a) Demonstrează că, dacă (a_1, a_2, a_3, a_4) este un set de numere reale satisfăcând condițiile (1) și (2), atunci setul de numere $(\pm a_{i_1}, \pm a_{i_2}, \pm a_{i_3}, \pm a_{i_4})$ satisface condițiile (1) și (2), oricum ar fi alese semnele $\pm$ și numerele diferite $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- b) Determină toate seturile de patru numere reale cu proprietățile (1) și (2) și precizează numărul lor.

27. Se consideră numerele reale a, b, c cu proprietatea $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$. Demonstrează că $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a + b + c}$.

28. a) Demonstrează că, dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$, atunci $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- b) Demonstrează că $\sqrt[n]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[n]{\sqrt{5} - 2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

29. Stabilește dacă următoarele numere sunt raționale sau iraționale:

$$a) N = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}; \quad b) P = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

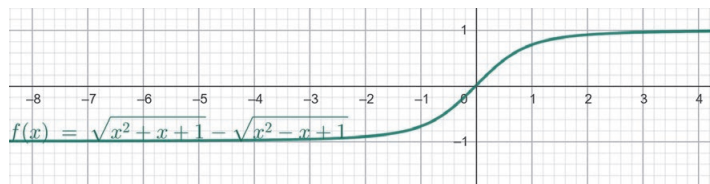
30. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

- a) Demonstrează că f este funcție impară.

- b) Demonstrează că funcția f nu este surjectivă.

- c) Demonstrează că $\text{Im} f = (-1, 1)$.



31. Folosind monotonia funcției radical, rezolvă inecuațiile:

$$a) \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 14x - 15} \geq x - 3; \quad b) \frac{\sqrt{7 - 2x}}{x - 2} \leq 1; \quad c) 2\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 2} \leq 3\sqrt[4]{x^2 - 4};$$

$$d) \sqrt[3]{3x - 1} + 2x - 4 \leq \sqrt[3]{x + 3}; \quad e) \sqrt[4]{x^4 - 5x^2 + 4} \geq x - 1.$$

Ecuatii și inecuații cu radicali

◆ **Ecuatiile și inecuațiile iraționale** sunt cele care conțin necunoscuta sau necunoscutele (și) sub radical.

◆ O ecuație sau o inecuație irațională se numește **compatibilă** dacă are soluții și **incompatibilă** dacă nu are soluții.

◆ Un număr real se numește **soluție** pentru o ecuație sau o inecuație irațională dacă verifică ecuația sau inecuația dată, respectiv, dacă înlocuind necunoscuta cu acel număr real se obține o egalitate, respectiv o inegalitate adevărată.

◆ A rezolva o ecuație irațională sau o inecuație irațională înseamnă a determina toate soluțiile acesteia.

Exemple de ecuații și inecuații iraționale (conțin necunoscuta sub radical)	Exemple de ecuații și inecuații care conțin radicali, dar nu intră în categoria ecuațiilor și inecuațiilor iraționale (nu conțin necunoscuta sub radical)
$\sqrt[3]{3-2x} = 2$	$3 - 2x = \sqrt[3]{2}$
$\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$	$\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2} = 3x + 7$
$\sqrt[4]{x^4 + 3x^2 - 9} \geq x$	$\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 \leq 0$
$3\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+1} \leq \sqrt[4]{x^2-1}$	$2^x > \sqrt[3]{2}$
$\frac{x-1}{\sqrt{2x+3}} = 4$	$\frac{x^2+1}{\sqrt{2}} = 2x$

Reține cei 3 pași obligatorii pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor iraționale:

✓ **Pasul 1: Impunerea condițiilor de existență** pentru expresiile care intră în componența ecuației (revezi condițiile de existență impuse radicalilor de ordin par, respectiv de ordin impar) **și a condițiilor de compatibilitate**.

Exemple:

● La ecuația $\sqrt{2-x} = x$ se impune condiția de existență $2-x \geq 0$, căci radicalul este de ordin par, dar și condiția de compatibilitate $x \geq 0$, căci un radical de ordin par este totdeauna un număr pozitiv, deci nu ar putea fi egal cu x , dacă acesta ar fi negativ.

● Sistemul de condiții este $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cu soluția finală (după intersectarea celor două intervale) $D = [0, 2]$, ceea ce arată că soluțiile acestei ecuații trebuie căutate în acest interval.

● La ecuația $\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+3}} = -3$ condiția de existență se impune fracției, respectiv $x+3 \neq 0$, căci radicalul de ordin impar nu are nevoie de alte condiții restrictive de existență, acesta fiind definit pe $\mathbb{R}$. În plus, radicalul de ordin impar poate fi atât număr pozitiv, cât și negativ, deci nu este nevoie de alte condiții de compatibilitate. Singura condiție impusă conduce la $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, domeniu în care se caută soluția.

● La ecuația $\sqrt[4]{2-x} + 3\sqrt[5]{2x-1} - \sqrt{x-5} = x$, condițiile de existență pentru radicalii de ordin 2 și de ordin 4 conduc la sistemul de inecuații $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases}$ cu soluție $\emptyset$. Așadar, expresiile nu sunt bine definite simultan, iar mulțimea soluțiilor ecuației este, din start, $S = \emptyset$.

● La ecuația $\sqrt[4]{3-x} + \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[4]{x-3} = 2$, sistemul de condiții $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ are o singură soluție, $x = 3$, care verifică ecuația, deci, fără altă rezolvare, ecuația are soluția unică $x = 3$.

● La inecuația $\sqrt[4]{x^4 + 3x^2 - 4} \leq x$ se impune condiția de existență $x^4 + 3x^2 - 4 \geq 0$, care se reduce la rezolvarea unei inecuații de gradul al doilea, dar și condiția de compatibilitate $x \geq 0$, căci radicalul de ordin par este număr pozitiv, deci nu poate fi mai mic decât un număr negativ. Sistemul de condiții este $\begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cu soluția finală, după intersecția celor două mulțimi, $D = [1, \infty)$. După rezolvarea efectivă a inecuației date, soluția obținută la rezolvare se intersectează cu D , aflându-se astfel soluția finală.

● La inecuația $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq x$ se impune condiția de existență a radicalului de ordin par, respectiv $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, ceea ce conduce la $x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$. Dar nu este necesară o condiție de compatibilitate, ci o abordare pe cazuri:

► Dacă $x \in (-\infty, -1]$, atunci inecuația este satisfăcută de orice element al intervalului, căci radicalul de ordin par este număr pozitiv și va fi mai mare decât orice număr negativ. Așadar intervalul $(-\infty, -1]$ va fi parte a soluției inecuației inițiale, fără alte transformări.

► Dacă $x \in [3, \infty)$, atunci ambii membri ai inecuației sunt pozitivi și putem folosi monotonia funcției putere pentru a obține o inecuație echivalentă cu prima, ridicând la puterea a doua cei doi membri: $x^2 - 2x - 3 \geq x^2$. Soluția acestei inecuații se intersectează cu intervalul $[3, \infty)$ și se obține a doua parte a soluției inecuației inițiale.

Cele două mulțimi obținute ca părți ale soluției finale din cele două cazuri se reunesc și formează soluția finală.

✓ **Pasul 2: Rezolvarea ecuației sau a inecuației** prin transformări ale acestora care elimină radicalii. După fiecare transformare se revăd condițiile de existență sau de compatibilitate impuse, iar dacă este cazul se impun condiții noi.



Exemple de transformări care elimină radicalii și metode de rezolvare:

● $\sqrt[n]{E(x)} = F(x)$, unde $E(x), F(x)$ sunt funcții de variabilă reală $x \in D$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, unde D este domeniul de existență obținut în urma rezolvării condițiilor de existență și de compatibilitate. Se ridică ambii membri ai ecuației la puterea n pentru eliminarea radicalului, obținându-se $E(x) = (F(x))^n$. Mulțimea soluțiilor acestei ecuații se intersectează cu mulțimea D .

● $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} = 2$, $x \in [-2, 2]$ din condițiile de existență

Eliminarea radicalilor nu se poate realiza dintr-o singură ridicare la pătrat, așadar vor fi *transformări multiple până la eliminarea totală a radicalilor*.

$(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x})^2 = 4 \Leftrightarrow x+2 + 2\sqrt{4-x^2} + 2-x = 4$, cu soluții $-2, 2$ care verifică ecuația.

Uneori este utilă separarea unui radical înainte de ridicarea la putere, pentru simplificarea calculelor.

● $\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)(7-x)} + \sqrt[3]{(7-x)^2} = 3$

Utilizarea *expresiilor conjugate algebric* simplifică adesea scrierea. Ecuația se înmulțește cu conjugata algebrică a expresiei din membrul stâng, apoi se ridică noua ecuație la puterea a treia:

$$(\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{7-x})(\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)(7-x)} + \sqrt[3]{(7-x)^2}) = 3(\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{7-x}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{7-x}) = 9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{7-x} = 3$$

Se ridică la puterea a treia după formula algebrică $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$:

$2+x+7-x+3\sqrt[3]{(2+x)(7-x)}(\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{7-x}) = 27$, iar suma celor doi radicali de ordin 3 se înlocuiește cu 3 (termenul liber al ecuației transformate). Noua ecuație este

$9\sqrt[3]{(2+x)(7-x)} = 18 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)(7-x)} = 2$ și prin ridicare la puterea a treia se elimină radicalul.

● $\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt{x+3} = -1$, $x \in [0, \infty)$ după impunerea condițiilor de existență pentru radicalul de ordin 2 ($x \geq -3$) și a condițiilor de compatibilitate $\sqrt[3]{2x-1} + 1 \geq 0$ ($x \geq 0$).

Simpla separare a radicalilor și ridicarea succesivă la putere nu este avantajoasă în orice situație. Sunt utile, uneori, *diverse notații convenabile*.

Notațiile $\sqrt[3]{2x-1} = a \in \mathbb{R}$ și $\sqrt{x+3} = b \geq 0$, conduc la $\begin{cases} 2x-1 = a^3 \\ x+3 = b^2 \end{cases}$. Eliminând x din cele două ecuații, obținem $a^3 - 2b^2 = -7$. Dar și ecuația inițială reprezintă o relație între a și b : $a - b = -1$.

Se rezolvă sistemul $\begin{cases} a^3 - 2b^2 = -7 \\ a - b = -1 \end{cases}$, în general prin substituție, apoi se află valorile lui x .

● $\sqrt[3]{5x+2} + 3\sqrt[4]{x+11} + \sqrt{x-1} = 11$, cu $x \in [1, \infty)$ după rezolvarea condițiilor de existență.

În afara transformărilor algebrice menționate, de reținut este și *utilizarea injectivității unor funcții* în rezolvarea unor ecuații.

În exemplul ales, membrul stâng este o funcție strict crescătoare, fiind o sumă de compuneri ale unor funcții radical (strict crescătoare) cu funcții de gradul I cu coeficient dominant pozitiv (strict crescătoare). Funcția $f(x) = \sqrt[3]{5x+2} + 3\sqrt[4]{x+11} + \sqrt{x-1}$ este injectivă, deci ecuația $f(x) = 11$ are cel mult o soluție. Observând că $x = 5$ verifică ecuația, rezultă că $x = 5$ este unica soluție.

✓ **Pasul 3: Verificarea soluțiilor.** Prin ridicări succesive la putere nu se obțin totdeauna ecuații echivalente (care au aceeași mulțime de soluții) cu cele inițiale, așadar selectarea soluțiilor ecuației inițiale se face prin verificarea acestora în ecuația inițială.

Pentru inecuații, monotonia funcției radical și a funcției putere definite pe $[0, \infty)$ ne asigură de echivalența inecuațiilor obținute prin ridicări la putere pentru eliminarea radicalilor.

Exemplu: $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+1} = -2$

Condițiile de existență conduc la $x \in \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$. Prin reordonarea termenilor în cei doi membri și eliminarea radicalilor, după două ridicări succesive la pătrat, se obține ecuația fără radicali $x^2 - 8x = 0$, cu soluții $x = 0$ și $x = 8$. Verificând aceste soluții în ecuația inițială se observă că $x = 0$ nu verifică ecuația, iar $x = 8$ verifică ecuația, așadar mulțimea soluțiilor este $\{8\}$. În realitate, ecuația avea nevoie de condiții suplimentare de compatibilitate pe parcurs.

3 PAȘI ÎN REZOLVAREA ECUAȚIILOR ȘI INECUAȚIILOR IRAȚIONALE

PASUL 1 Stabilirea condițiilor	PASUL 2 Eliminarea radicalilor	PASUL 3 Verificarea soluțiilor
✓ Condiții de existență: • $\sqrt{(\dots)} \geq 0$ (ordin par) • $\sqrt{(\dots)} > 0$ oricare număr real (ordin impar) ✓ Condiții de compatibilitate: • expresiile trebuie să fie definite • sensul ecuației trebuie păstrat 💡 Fără acest pas → risc de soluții greșite!	✓ Metode: • ridicare la putere (2, 3 etc.) • transformării algebrice ⚠ Atenție: • după fiecare pas → verifică condițiile • pot apărea condiții noi! 💡 Transformările trebuie făcute cu grijă!	✓ Important: • pot apărea soluții false! ✓ Ce faci: • înlocuiești soluțiile în ecuația inițială • păstrezi doar soluțiile corecte ⚠ Verificarea este obligatorie!

Pentru inecuații:

- ✓ Funcția radical și funcția putere pe $[0, \infty)$ sunt **monotone**
- ➔ Inecuațiile obținute prin ridicare la putere sunt **echivalente** (dacă sunt respectate condițiile)



EXERCITII PROPUSE

A.

1. Care dintre următoarele ecuații sau inecuații se încadrează în categoria ecuațiilor sau inecuațiilor iraționale?

- a) $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = x$; b) $\sqrt[3]{3} + \sqrt{x} = x$;
c) $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} = x$; d) $\sqrt[3]{x} + \sqrt{2} = 2$.

2. Care dintre următoarele numere reale este soluție pentru ecuația $\sqrt[4]{x^3} = x$?

- a) 1; b) 0; c) -1; d) 2.

3. Care este domeniul de existență și de compatibilitate ale ecuației: $\sqrt[4]{x^2 - 1} = 2 - x$?

4. Explică de ce nu pot avea soluții următoarele ecuații, fără a încerca să le rezolvi.

- a) $\sqrt[4]{2x + 10} = -3$; b) $\sqrt{-x^2} = \sqrt{2x^2 + 1}$; c) $\sqrt[4]{1 + 3x} + \sqrt{x - 3} = 0$; d) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 10} = 1$.

5. Rezolvă ecuațiile:

- a) $\sqrt{1 - 5x} = 4$; b) $\sqrt{2x + 6} = 2$; c) $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{2x - 3}$; d) $\sqrt{x + 2} = 1 + \sqrt{2x - 3}$.

6. Stabilește dacă următoarele perechi de ecuații sunt echivalente (au aceeași mulțime de soluții):

- a) $\sqrt{(x + 3)^2} = 2$ și $x + 3 = 2$; b) $\sqrt[3]{x^2 + x + 1} = 1$ și $x^2 = -x$;
c) $\sqrt{x} + 2 = \sqrt{3x} + 1$ și $(\sqrt{x} + 2)^2 = (\sqrt{3x} + 1)^2$.

7. Rezolvă ecuațiile folosind, eventual, expresii conjugate algebric:

- a) $\sqrt{x^2 + 3x + 6} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 2$; b) $\frac{5}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 8}} = 1$;
c) $\sqrt[3]{(2x + 4)^2} - \sqrt[3]{(2x + 4)(12 - 2x)} + \sqrt[3]{(12 - 2x)^2} = 4$; d) $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$;
e) $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 2} = \sqrt{30 + x} - \sqrt{6 + x}$

8. Rezolvă ecuațiile folosind, eventual, notații convenabile:

- a) $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 18$; b) $\sqrt[3]{3x - 4} - \sqrt{x + 5} = -1$;
c) $\sqrt[3]{4x^2 - 20x + 25} + 2x - 3 = \sqrt[3]{2x - 5}$; d) $\sqrt[3]{(x - 1)^2} - 3\sqrt[3]{(x + 1)^2} = 2\sqrt[3]{x^2 - 1}$.

9. Stabilește mulțimea soluțiilor ecuațiilor:

- a) $\sqrt[4]{4 - x} + \sqrt[3]{2x^2 - 5} + \sqrt[4]{x - 4} = 3$; b) $\sqrt[3]{2x^3 - 1} + 3\sqrt[4]{x - 6} - 5\sqrt{5 - x} = 2$;
c) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt[6]{x^3 - 3x - 2} + \sqrt[4]{x^4 - x^3 - 8} = 0$; d) $\sqrt{x - 1} = \sqrt[3]{1 - x}$.

10. Rezolvă ecuațiile, folosind injectivitatea unor funcții:

- a) $\sqrt{x + 2} + 3\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 2} + \sqrt{5x - 1} = 10$;
b) $\sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt{1 - x} = 1$; c) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{17 - x}$.

11. Explică de ce inecuațiile următoare nu au soluții, fără a încerca să le rezolvi.

- a) $\sqrt{2 - x} + \sqrt{x - 3} \geq -1$; b) $\sqrt[6]{x + 1} + \sqrt[4]{x + 3} + x^2 \leq -5$;
c) $(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2})\left(\frac{1}{\sqrt{x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2}}\right) < 4$.

12. Rezolvă inecuațiile:

- a) $\sqrt[4]{3x + 5} > -8$; b) $\sqrt{x - 1} < \sqrt{2 - x}$; c) $\frac{\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt[4]{x + 2}}{x + 3} > 0$; d) $\sqrt[6]{4x^2 - 9x + 5} \leq 0$;
e) $\sqrt{x + 7} < x$; f) $\sqrt{3x + 4} \geq x$; g) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 7x - 1} \geq x - 1$; h) $\sqrt{\frac{2x - 1}{x + 2}} - \sqrt{\frac{x + 2}{2x - 1}} \geq \frac{7}{12}$.



B.

13. Rezolvă ecuațiile și inecuațiile următoare:

- a) $\sqrt[4]{x^4 - 3x^2 + 2} = x$; b) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{4x + 1} = -2$; c) $\sqrt[3]{7 + x\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - x\sqrt{2}} = 2$;
 d) $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$; e) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;
 f) $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$; g) $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = \frac{2-x}{2+x}$; h) $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$;
 i) $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{x}$; j) $\sqrt[3]{8x+6} + \sqrt[3]{5x+3} = \sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{10x+8}$; k) $\frac{(\sqrt{x+7} - \sqrt{x+3})^2}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x+3}} = 2$.

14. Rezolvă ecuațiile și inecuațiile următoare:

- a) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 7x - 1} \geq x - 1$; b) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} \geq \frac{7}{12}$; c) $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$;
 d) $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$; e) $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x-1} \geq 2$; f) $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} > \sqrt[3]{2x-1}$; g) $\frac{\sqrt{3-2x}}{x} \leq 1$

C.

15. Rezolvă ecuațiile:

- a) $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$; b) $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
 c) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$; d) $\frac{1}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{1}{x-3\sqrt{x}+2} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{4}$; e) $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x+1} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$;
 f) $3 + \sqrt[3]{7x+4} = \sqrt[10-2x]{6x+1}$; g) $\frac{\sqrt{17+x} + \sqrt{17-x}}{\sqrt{17+x} - \sqrt{17-x}} = \frac{x}{2}$; h) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$;
 i) $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1$.

16. Rezolvă inecuațiile:

- a) $(x-2)^2 \cdot (x-3)^2 \cdot \sqrt[4]{x-8} \geq 0$; b) $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$;
 c) $\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0$; d) $\frac{1 - \sqrt{1-9x^2}}{x} < 1$.

17. Se consideră ecuația $mx - (2m+3)\sqrt{x+1} + 2m+2 = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$.

- a) Află $m \in \mathbb{R}$ pentru care $6 + 4\sqrt{3}$ este soluție a ecuației.
 b) Află valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația admite o singură soluție reală.
 c) Află valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația admite două soluții reale.

18. Află numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, știind că

$$\sqrt{a_1 - 1} + 2\sqrt{a_2 - 4} + \dots + n\sqrt{a_n - n^2} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}$$

19. Rezolvă ecuațiile, discutând compatibilitatea și numărul de soluții reale în funcție de parametrul real a :

- a) $\sqrt{x+5} = \sqrt{a-x}$; b) $\sqrt{a + \sqrt{x+a}} = x$; c) $\sqrt{x^2 + 3a^2} - \sqrt{x^2 - 3a^2} = x\sqrt{2}$.

20. Rezolvă inecuațiile, discutând compatibilitatea și mulțimea soluțiilor reale în funcție de parametrul real a :

- a) $x - \sqrt{a-2x} < 0$; b) $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$; c) $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a$.



TEST DE EVALUARE

Subiectul I (30 puncte)

- (10p) Determină coordonatele vârfului parabolei asociate funcției de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$. Precizează valoarea maximă a funcției și imaginea sa, $\text{Im}(f)$.
- (10p) Determină domeniul maxim de definiție $D \subset \mathbb{R}$ pentru funcția $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4x + 3} + \sqrt[5]{2x - 1}$.
- (10p) Studiază paritatea sau imparitatea funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x^7 - 3x^3$. Justifică răspunsul folosind definiția.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

- Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin legile $f(x) = 3x - 2$ și $g(x) = x^2 - x + 1$.
 - (15p) Determină expresia analitică a funcției compuse $f \circ g$. Folosind forma canonică sau proprietățile funcției de gradul al doilea, justifică faptul că funcția $f \circ g$ este mărginită inferior.
 - (15p) Demonstrează că funcția f este bijectivă și determină expresia funcției sale inverse, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

- Se consideră funcția $f: [1, \infty) \rightarrow [2, \infty)$, definită prin $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
 - (10p) Demonstrează că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.
 - (10p) Demonstrează că funcția f este bijectivă și verifică faptul că funcția sa inversă are expresia $f^{-1}: [2, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$.
 - (10p) Rezolvă, în intervalul $[1, \infty)$, ecuația $f(x) = 2x - 1$.

Timp de lucru efectiv: 50 de minute.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII (PORTOFOLIU DE GÂNDIRE CRITICĂ)

Provocarea finală: Ce este, de fapt, o funcție?

După terminarea capitolului, trei elevi oferă definiții diferite:

Elevul A: O funcție este o formulă;

Elevul B: O funcție este un grafic.; *Elevul C:* O funcție este o regulă care transformă informații.

Toți trei susțin că au dreptate.

Reflectează și răspunde:

- Care definiție ți se pare cea mai apropiată de ceea ce ai învățat?
- Poate o funcție să existe fără formulă?
- Poate o funcție să existe fără grafic?
- Dacă două funcții au formule diferite, pot descrie același fenomen?
- Ce ai răspunde acum unui elev de gimnaziu care te întreabă: „La ce folosesc funcțiile?”

Privește în urmă... În acest capitol ai întâlnit: funcții afine; funcții de gradul al doilea; funcții putere; funcții radical; compuneri; funcții injective, surjective, bijective; inversa unei funcții inversabile; monotonie, semn, paritate, curbura.

Întrebare-cheie. Care idei despre funcții crezi că îți va fi utilă și peste zece ani?

Ideea mare: O funcție nu este doar un obiect matematic. Este una dintre cele mai puternice modalități prin care oamenii descriu schimbarea, dependența și relațiile dintre fenomene.



FUNCTII TRIGONOMETRICE. ECUAȚII TRIGONOMETRICE

4

Trigonometria este o ramură a matematicii apărută odată cu geometria, încă din Antichitate, din necesități practice, însăși denumirea sa fiind compusă din cuvintele grecești *trigonos* (triunghi/triunghiular) și *metron* (măsură), însemnând *măsurarea triunghiului*. Astfel, trigonometria face o legătură între elementele triunghiului – laturi și unghiuri. În clasele gimnaziale au apărut primele elemente de trigonometrie, în contextul studiului triunghiului dreptunghic, introducând noțiunile de *sinus*, *cosinus*, *tangentă* și *cotangentă* ca rapoarte remarcabile între laturile acestui tip de triunghi. În acest capitol, extindem studiul triunghiului dreptunghic la cel al triunghiului oarecare, în principal pentru cele 3 cazuri fundamentale de determinare a triunghiului (L.L.L., L.U.L., U.L.U.). Mai mult, vom extinde noțiunile de *sinus*, *cosinus* și *tangentă* de la rapoarte de laturi la funcții numerice, definite pe $\mathbb{R}$, în raport cu care vom studia proprietățile lor, alături de alte funcții elementare precum funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, putere, radical etc.

Unități de măsură pentru unghiuri și arce.

Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice

În clasele gimnaziale ai învățat că *unghiurile* și *arcele de cerc* se măsoară în *grade* (sexagesimale). Astfel îți este prea bine cunoscut că unghiurile unui triunghi echilateral au măsura de 60° , unghiul drept al triunghiului dreptunghic are măsura de 90° , unghiul alungit are măsura de 180° , iar unghiul nul are măsura de 0° (prin convenție, fiind cazul în care laturile unghiului coincid). Așadar, măsurile unghiurilor sunt numere cuprinse în intervalul $[0, 180]$.

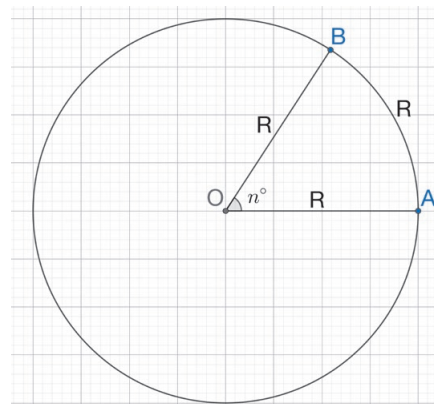
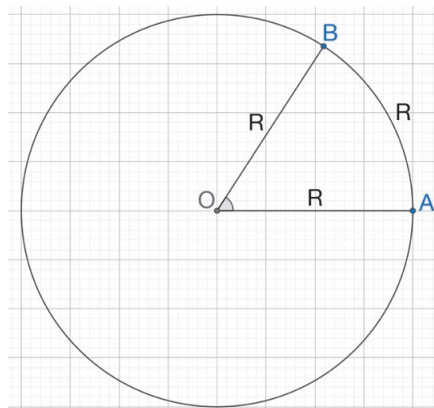
De asemenea, măsuri exprimate în *grade* (sexagesimale) au și *cercul* (360°), *semicercul* (180°) și, în general, orice *arc de cerc*, fiind independente de raza cercului.

Reamintim că unghiul AOB din figura alăturată se numește *unghi la centru* pentru cercul cu centrul în O și că măsura arcului de cerc AB , cuprins între laturile unghiului AOB , este egală cu măsura acestui unghi. Putem vorbi și de arcul mare AB , care are măsura de $360^\circ - n^\circ$, unde am notat n° măsura arcului mic.

Reținem că operăm cu *măsuri de unghiuri* de la 0° la 180° , inclusiv, respectiv cu *măsuri de arce* de la 0° la 360° , inclusiv. Submultipli gradului sunt *minutul* ($1^\circ = 60'$) și *secunda* ($1' = 60''$).

Definirea funcțiilor trigonometrice ca funcții numerice a condus la introducerea unei noi unități de măsură pentru arce și unghiuri. Putem măsura arcele și în unitatea de măsură luată pentru rază (cm, m, km etc.).

Ne reamintim că lungimea unui cerc cu raza R este dată de formula: $L_{\text{cerc}} = 2 \cdot \pi \cdot R$. Lungimea *arcului mic* AB , cuprins între laturile unghiului AOB (de măsură n°) este dată de formula: $L_{AB} = \frac{\pi \cdot R \cdot n^\circ}{180^\circ}$. *Observă figura alăturată, utilizează regula de 3 simplă și vei obține formula! De cele mai multe ori, mai ales în contexte reale, este mai util să cunoști și să utilizezi metode, decât să memorezi formule.*



DEFINIȚIE

Spunem că un arc de cerc AB are măsura **1 radian** dacă lungimea sa este egală cu raza cercului din care provine.

Consecință: Dacă raza unui cerc este 1, atunci cercul are 2π radiani, semicercul are π radiani etc. În acest caz, arcul AP are măsura 1 radian, dacă lungimea arcului este egală cu 1.

Așadar, *măsura în radiani a unui unghi* este măsura în radiani a arcului (mic) de cerc al cărui centru O este în vârful unghiului, arcul aparținând interiorului unghiului.

Dacă măsura unghiului AOP este de n° , atunci lungimea arcului mic $\widehat{AP} = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}$, $n \in [0, 180]$. Pe de altă parte, lungimea arcului este 1, deci $n = \frac{180}{\pi}$. În concluzie, un unghi (arc) de 1 radian are măsura în grade n° cu $n = \frac{180}{\pi}$, o valoare aproximativă fiind de $57^\circ 17' 44''$ (corespunzătoare aproximării $\pi \simeq 3,1415$).

Reținem corespondențele: $\alpha \text{ (radiani)} \rightarrow \left(\frac{180 \cdot \alpha}{\pi}\right)^\circ$; $n^\circ \rightarrow \frac{\pi \cdot n}{180} \text{ (radiani)}$

Pentru aceste corespondențe putem apela la *regula de 3 simplă*: π radiani 180°
 α (= ?) n°

și obținem relația $\alpha = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}$ (măsura în radiani).

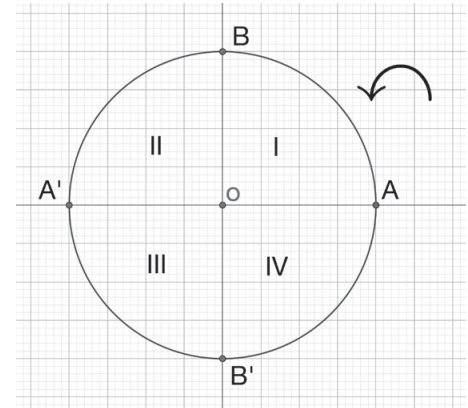
În tabelul următor sunt evidențiate o serie de exemple de corespondențe între cele două tipuri de măsuri.

Grade	0°	15°	30°	36°	60°	90°	120°	135°	180°
Radiani	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

Funcția de înfășurare

Considerăm planul geometric raportat la un sistem xOy (de axe perpendiculare) și cercul de centru O și rază 1, notat $C(O, 1)$, reprezentate în figura alăturată. Similar cu axa, care este caracterizată de un sens de parcurs, asociem un *sens de parcurs al cercului*, numit *sens trigonometric* (sens *direct*/sens *pozitiv*/sens *invers acelor de ceasornic*) în ordinea A, B, A', B' . Celălalt sens (opus), în ordinea A, B', A', B îl vom numi *sens invers trigonometric* (sens *negativ*).

În plan, axele Ox și Oy delimitează 4 zone numite **cadrane**. Interiorul unghiului AOB este numit *cadranul I*, interiorul unghiului BOA' este numit *cadranul al II-lea* ș.a.m.d.



DEFINIȚIE

Cercul $C(O, 1)$, pe care am introdus un sens pozitiv de parcurgere invers acelor de ceasornic, se numește **cerc trigonometric**.

În mulțimea arcelor cercului trigonometric, un rol important îl au arcele cu originea în punctul $A(1, 0)$.

Exemplu: arcul AB (cu lungimea $\frac{\pi}{2}$), arcul ABA' (cu lungimea π) etc. Tot cercul (privit ca arcul care pornește din A și se termină în A) are lungimea 2π .

Funcții trigonometrice

Păstrând notațiile din imaginea anterioară, introducem o funcție $p: \mathbb{R} \rightarrow C(O, 1)$ care asociază fiecărui număr real x un punct $p(x)$ pe cercul $C(O, 1)$. Pentru o mai bună înțelegere, intuitiv, vom considera cercul trigonometric ca fiind un *mosor* pe care se înfășoară, în sens trigonometric, o dreaptă d , imaginată ca un *fir fără grosime*, tangentă la cerc în punctul A . Acest punct determină pe dreapta d două semidrepte cu originea în A . Dacă $C \in d$ este situat în semiplanul determinat de dreapta Ox ce conține B , atunci $[AC$ este una dintre semidrepte, cealaltă fiind semidreapta opusă $[AC'$.

Fiecărui număr real pozitiv x îi asociem un punct M pe semidreapta $[AC$, astfel încât $AM = x$. Analog asociem numerelor negative puncte pe semidreapta $[AC'$. „Înfășurând” semidreapta $[AC$ pe cerc, în sens trigonometric, facem să corespundă numărului pozitiv x un unic punct M_x pe cercul trigonometric. Definim: $p(x) = M_x$. Analog, definim $p(x)$ pentru x negativ, înfășurând semidreapta $[AC'$ în sens invers trigonometric pe cerc. Prin definiție: $p(0) = A$.



REȚINEM

x este un număr real, iar $p(x)$ este un punct al cercului trigonometric.

Alte valori ale funcției p găsiți prezente în tabelul următor:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	2π
$p(x)$	A	B	A'	B'	B'	A'	A



REFLECTĂM

Cine este $p(1)$? Este punctul M_1 pe cerc, în *cadranul I*, astfel încât lungimea arcului mic $\widehat{AM}_1$ are lungimea 1. Similar, $p(-3) = M_{-3}$, unde $M_{-3} \in$ *cadranului III*, pentru care lungimea arcului mic $\widehat{AM}_{-3}$ este 3 (Atenție, ne referim la lungime, deci asociem valori pozitive!).

Mai mult, dacă $x \in [0, 2\pi)$ putem spune că $p(x)$ este un punct M_x aparținând $C(O, 1)$, pentru care lungimea arcului mic $\widehat{AM}_x$ este x . În aceste condiții, putem vorbi de *restricția funcției p la intervalul $[0, 2\pi)$* .

Folosind această restricție, putem obține $p(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru aceasta, este suficient să asociem lui x un alt număr, $x^* \in [0, 2\pi)$, iar $p(x) = p(x^*)$. Numărul x^* îl numim **redusul** lui x la $[0, 2\pi)$ și-l obținem astfel: $x = 2\pi \cdot \left[\frac{x}{2\pi}\right] + x^*$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a .

Într-adevăr, x^* este unic și aparține $[0, 2\pi)$, deoarece $\frac{x}{2\pi} - 1 < \left[\frac{x}{2\pi}\right] \leq \frac{x}{2\pi} \Leftrightarrow x - 2\pi < 2\pi \left[\frac{x}{2\pi}\right] \leq x$.

Cum $x^* = x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi}\right]$, rezultă că $x^* \in [0, 2\pi)$.

Așadar $p(x)$ poate fi stabilit în două etape: mai întâi reducem x la x^* , și apoi luăm $p(x) = p(x^*)$.



DEFINIȚIE

Funcția $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(0, 1)$ definită prin $p(x) = p(x^*)$, unde x^* este redusul lui x la $[0, 2\pi)$, se numește **funcție de înfășurare** (sau **funcția de acoperire a cercului**).

Definiția dată justifică proprietatea funcției p de a-și repeta valorile: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, p(x + 2k\pi) = p(x)$.



EXEMPLU REZOLVAT

În ce cadran se află numărul $p(100)$?

Rezolvare:

Cum $100 : 2\pi \approx 15,9$, deci $\left[\frac{100}{2\pi}\right] = 15$, obținem $100 = 2\pi \cdot 15 + r$, unde r este redusul lui 100 la $[0, 2\pi)$ ($r = 100^\circ$). Cum $r = 100 - 30\pi \approx 5,75$, obținem $p(100) = p(r) \approx p(5,75) \in$ *cadranul IV*.



EXERCITII PROPUSE

- Exprimă în grade, minute și secunde (n°) valorile următoare: a) $n = 12,34$; b) $n = 36,05$; c) $n = 89,16$.
- Exprimă în radiani următoarele măsuri de arce: $0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 150^\circ; 300^\circ; 12^\circ; 21^\circ 15'$.
- Exprimă în grade următoarele măsuri de arce: $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 5\pi, 3$.
- Pe un cerc de rază 3 se situează punctele A și B care determină arcul mic AB de măsură 30° . Determină lungimea arcului AB .
- Pe un cerc de rază R se consideră punctele A și B astfel încât lungimea arcului AB este 2π . Exprimă măsura în grade a arcului AB . Caz particular $R = 1$.
- Suma lungimilor a două cercuri este 120 cm, iar suma lungimilor arcelor corespunzătoare la două unghiuri la centru egale în cele 2 cercuri este 40 cm. Determină măsura unghiului la centru, în grade și radiani.
- Un ventilator face 660 rotații/minut. Exprimă în grade și radiani măsura arcului descris de un punct al elicei într-o secundă.
- Într-un cerc de rază 3 se consideră un arc de măsură 1 radian. Determină lungimea arcului.
- Determină măsura a două arce, știind că diferența măsurilor lor este $\frac{\pi}{12}$, iar suma este 36° . Exprimă rezultatul în grade, apoi în radiani.
- Exprimă în radiani și grade măsura unui arc de cerc de rază 4 care are lungimea 8.

11. Determină lungimea arcului de cerc de rază 3 care are măsura 100° .
12. Corespunzător unui arc de rază 3, unghiul la centru are măsura 2 radiani. Exprimă în radiani măsura unghiului la centru ce corespunde aceluiași arc într-un cerc de rază 1.
13. Evaluează măsura unghiului format de acele minutar și orar ale unui ceasornic la ora 12:15. Compară răspunsul cu al colegului de bancă. De ce anume din contextul dat trebuie să ținem cont pentru a obține o măsurare a unghiului cât mai corectă?

Pentru următoarele exerciții rămân valabile notațiile de la cercul trigonometric și de la funcția de înfășurare)

14. Determină x^* pentru $x \in \left\{-6; -3; 14; 39; \frac{67\pi}{4}\right\}$.
15. Determină punctele $p\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $p\left(\frac{5\pi}{3}\right)$, $p\left(\frac{1234\pi}{3}\right)$ și $p(2\pi)$ de pe cercul trigonometric.
16. În ce cadran se situează punctele $p(2)$; $p(4)$; $p(6)$; $p(7)$?
17. Demonstrează că $AM_1 = M_3M_6$.
18. Demonstrează că triunghiul $AM_{\frac{2\pi}{3}}M_{\frac{4\pi}{3}}$ este echilateral, inclusiv prin reprezentare grafică.
19. Stabilește natura patrulaterului $AM_{\frac{\pi}{6}}A'A_{\frac{5\pi}{6}}$.



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII

Enigma matematicianului: Câte puncte sunt într-un punct?

Un elev afirmă: „Pe cercul trigonometric, fiecărui număr real îi corespunde exact un punct.”

Un coleg îi răspunde: „Atunci punctul $A(1,0)$ ar trebui să corespundă unui singur număr.”

Totuși, $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, -2\pi, -4\pi$ corespund toate unui aceluiași punct.

Cine greșește?

Reflectează și răspunde:

1. Un punct poate avea infinit de multe „adrese”?
2. De ce funcția de înfășurare nu este injectivă?
3. Ce informație pierdem atunci când trecem de la număr la punct?
4. Cum ai putea recupera această informație?

Ideea mare: Uneori mai multe drumuri diferite conduc în același loc. Trigonometria este primul capitol în care întâlnim această idee.



Funcții periodice

În natură întâlnim fenomene și procese care se repetă identic, după un anumit interval de timp, cum ar fi fazele Lunii sau marea – mișcări periodice de urcare și coborâre a nivelului apei mărilor și oceanelor, care se repetă zilnic. Aceste fenomene sunt cauzate de forțele gravitaționale exercitate de Lună și Soare asupra Pământului. Un alt exemplu este pendulul gravitațional (de la fizică), un dispozitiv care evidențiază mișcarea periodică influențată de gravitație. Tocmai de aceea, timpul necesar pentru o oscilație completă (dus-întors) se numește *perioadă*. Și *funcția de înfășurare* arată o „variație” periodică a valorilor sale.



DEFINIȚIE

Fie $T \in \mathbb{R}$, $T \neq 0$ și $D \subset \mathbb{R}$. O funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **periodică**, de **perioadă** T , dacă sunt îndeplinite condițiile: a) $x \pm T \in D$, $\forall x \in D$; b) $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$.



EXEMPLE DE FUNCȚII PERIODICE

1) Funcția de înfășurare $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(0,1)$ este *periodică* de *perioadă* 2π : $p(x + 2\pi) = p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $x + 2\pi \in \mathbb{R}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2) Funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = \text{restul împărțirii lui } x \text{ la } 5$ este *periodică* de *perioadă* 5. Pentru orice număr întreg x , restul împărțirii lui $x + 5$ la 5 este restul împărțirii lui x la 5, deci $f(x + 5) = f(x)$ și $x \pm 5 \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.



OBSERVAȚII

● Pentru funcțiile cu domeniul de definiție $\mathbb{R}$, prima condiție din definiția funcției periodice este îndeplinită.

● Dacă $T \in \mathbb{R}^*$ este perioadă, atunci nT , $n \in \mathbb{N}^*$ este de asemenea perioadă. *Justifică!*

● Dacă o funcție admite o perioadă, atunci ea are perioadă oricât de mare în valoare absolută. Prin urmare, domeniul de definiție al unei funcții periodice nu poate fi o mulțime/un interval mărginit.

● Dacă $T \in \mathbb{R}^*$ este perioadă, atunci $-T$ este perioadă.

Într-adevăr, $x - T \in D$ și $f(x) = f(x - T + T) = f(x - T)$, $\forall x \in D$.



DEFINIȚIE

Dacă o funcție periodică are o *cea mai mică perioadă pozitivă*, aceasta se numește **perioadă principală**.



OBSERVAȚII

1. Funcția de înfășurare p are *perioada principală* egală cu 2π .

Într-adevăr, la introducerea funcției am justificat că 2π este perioadă a funcției p . Demonstrăm că *nu poate avea o perioadă pozitivă mai mică decât* 2π , prin reducere la absurd. Presupunem că există $T \in \mathbb{R}$, $0 < T < 2\pi$, astfel încât $p(x + T) = p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ obținem $p(T) = p(0) = A(1, 0)$. Pentru $x = \pi$ obținem $p(\pi + T) = p(\pi) = A'(-1, 0)$, adică intervalul $(0, \pi + T)$ al axei reale se înfășoară pe arcu AA' de lungime π , contradicție.

2. Există funcții periodice care *nu* au perioadă principală.

Exemplu: Considerăm funcția $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (numită *funcția lui Dirichlet*).

Demonstrăm că orice număr rațional $r \in \mathbb{Q}^*$ este perioadă. Într-adevăr:

$\chi(x + r) = \begin{cases} 1, & x + r \in \mathbb{Q} \\ 0, & x + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \chi(x)$. În plus, *niciun număr irațional nu este perioadă*. Verifică! În concluzie, deoarece nu există un cel mai mic număr rațional pozitiv, funcția χ nu are perioadă principală.



3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică și $T > 0$ o perioadă a sa.

Demonstrăm că $\text{Im } f = f([0, T))$. Deoarece $[0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow f([0, T)) \subset f(\mathbb{R}) = \text{Im } f$.

Demonstrăm și incluziunea contrară, $f(\mathbb{R}) \subset f([0, T))$. Fie $y \in f(\mathbb{R})$, atunci $\exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = f(x)$. Dar $x = T \cdot x/T = T \cdot ([x/T] + \{x/T\}) = T \cdot [x/T] + T \cdot \{x/T\}$, adică $x - T \cdot [x/T] = T \cdot \{x/T\} \in [0, T)$. Atunci $y = f(x) = f(x - T \cdot [x/T]) = f(T \cdot \{x/T\}) \in f([0, T))$.



REȚINEM

Studiul oricărei proprietăți a unei funcții periodice poate fi analizat pe un interval de lungimea unei perioade, eventual a perioadei principale.

Ilustrăm cu două exemple:

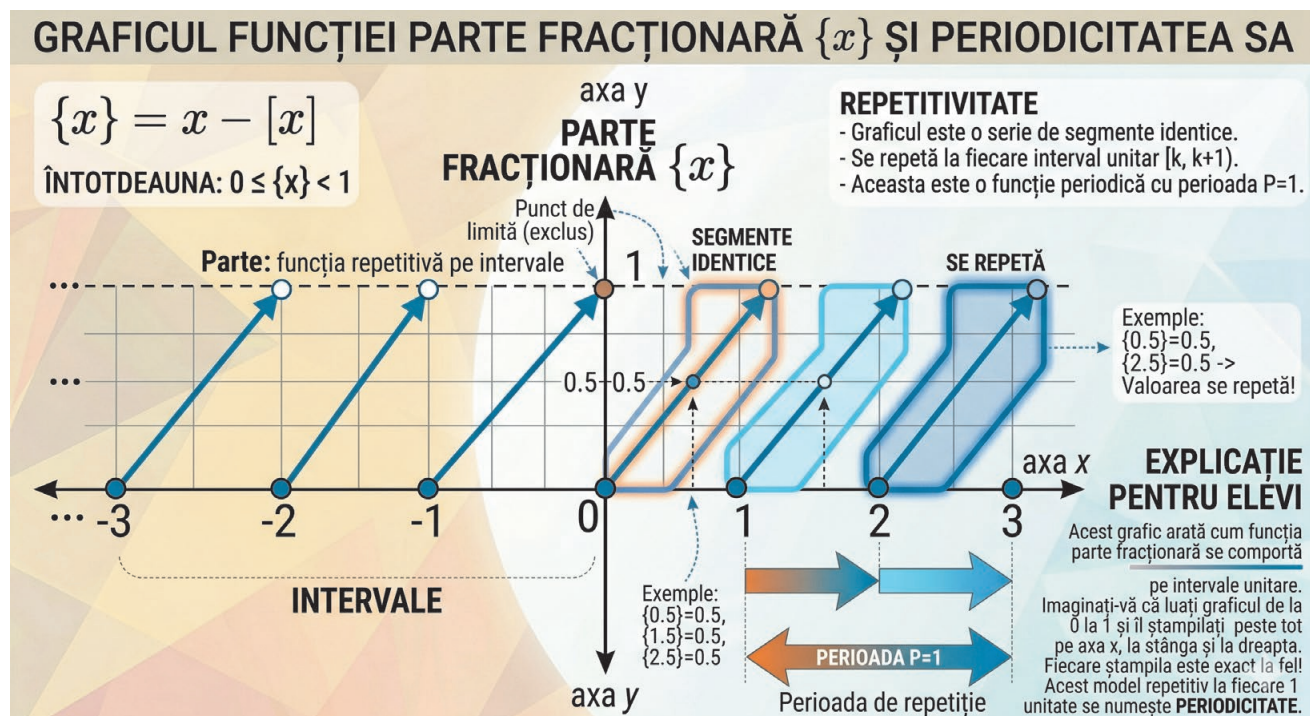
a) Reprezentarea grafică a funcțiilor periodice

Cum reprezentăm grafic o funcție periodică?

- o reprezentăm pe un interval convenabil $[a, a + T)$, unde T este perioada;
 - translatăm graficul obținut (stânga-dreapta, de-a lungul axei Ox), corespunzător fiecărei perioade.
- Astfel funcția parte fracționară este periodică, cu perioada principală 1, cu legea dată de $f(x) = \{x\}$.

Verifică!

Reprezentăm funcția pe intervalul $[0, 1)$. Pentru $x \in [0, 1)$, $f(x) = \{x\} = x$, ca segment de dreaptă cu capăt închis în punctul de abscisă 0 și deschis în punctul de abscisă 1. Apoi reprezentăm pe fiecare perioadă același segment, prin translație.



b) Demonstrarea unei identități

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}] - [2x]$.

i) Demonstrăm că f este periodică, de perioadă $\frac{1}{2}$.

ii) Verificăm că pentru $\forall x \in [0, \frac{1}{2})$, avem $f(x) = 0$.

iii) Demonstrăm că $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$ (Identitatea lui *Hermite*, matematician francez, 1822-1901).

Rezolvare

$$i) f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x + 1] - [2x + 1] = \left[x + \frac{1}{2}\right] + (1 + [x]) - (1 + [2x]) = f(x).$$

$$ii) \text{ Dacă } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \text{ atunci } [x] = 0, \left[x + \frac{1}{2}\right] = 0, [2x] = 0, \text{ deci } f(x) = 0.$$

iii) Conform cu i) și ii), egalitatea se prelungește pentru orice $x \in \mathbb{R}$.



PROPRIETATE

Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodice de perioade T_1 , respectiv T_2 . Dacă $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, atunci funcțiile $f + g$ și $f \cdot g$ sunt periodice.

Rezolvare: Considerăm $m, n \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, cu $(m, n) = 1$ (prime între ele). Atunci $nT_1 = mT_2$ ($= T$). Obținem $(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x + nT_1) + g(x + mT_2) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ (deoarece nT_1 și mT_2 sunt perioade). Prin *analogie*, demonstrează pentru produsul funcțiilor!



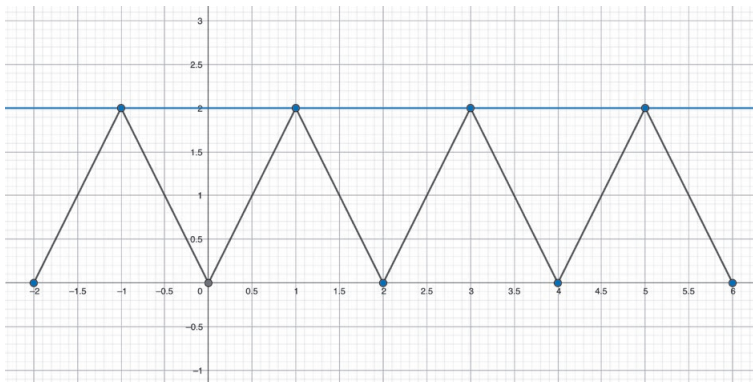
RETINEM

Rezultatul acestui exercițiu îl vom folosi în demonstrarea periodicității unor funcții!

Atenție, în lecțiile următoare vom vedea exemple de funcții f, g periodice, de perioade T_1, T_2 , cu $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dar funcțiile $f + g$, respectiv $(f \cdot g)$ sunt neperiodice!

EXERCITII PROPUSE

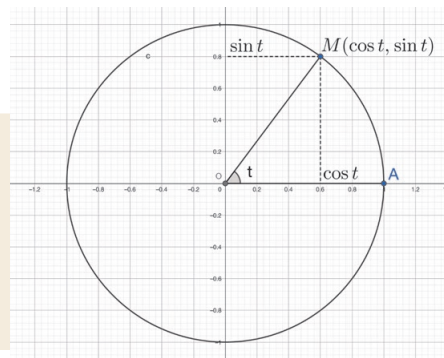
1. Verifică faptul că funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$ este periodică, de perioadă principală 2.
2. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - [x]$, $x \in [n, n + 1)$ este periodică, de perioadă principală 1. Este funcția monotonă? Este funcția mărginită?
3. (**Activitate în pereche**) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcție periodică, iar T_1 și T_2 sunt perioade ale sale. Justificați că $T_1 + T_2$ și $T_1 - T_2$ sunt perioade ale funcției.
4. a) Dacă T_1 și T_2 sunt perioade pentru funcțiile periodice f , respectiv g , cu proprietatea că $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, demonstrează că $f + g$ este periodică.
b) Demonstrează că dacă g este periodică, atunci $f \circ g$ este funcție periodică.
5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile: $f(x + 3) \leq f(x) + 3$ și $f(x + 2) \geq f(x) + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrează că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$ este periodică de perioadă 6.
6. Se consideră $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ o funcție cu proprietatea că există $a > 0$ astfel încât $f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$, $\forall x \in D_f$. Demonstrează că funcția este periodică.
7. Dă exemplu de o funcție periodică și monotonă. Ce situație particulară au funcțiile care îndeplinesc ambele proprietăți?
8. (**Activitate pe grupe**) În figura alăturată este reprezentat graficul unei funcții periodice f (de tip fierăstrău).
a) Determinați perioada principală a acesteia.
b) Ce strategii folosiți pentru a obține valorile lui $f(4,5)$ și $f(-3,7)$? Discuție la nivel de grup.
c) Dacă g este o restricție la intervalul $[0, 2)$ a funcției f , determinați legea $g(x)$.



Funcțiile trigonometrice sinus și cosinus

În clasa a VII-a, pentru $x \in (0, 90^\circ)$ am definit numerele $\sin x^\circ, \cos x^\circ$ ca fiind rapoarte între catete și ipotenuza unui triunghi dreptunghic. *Amintește-ți formulele asociate!* Vom extinde aceste rezultate la sinusul și cosinusul unui unghi obtuz. Pentru aceasta, introducem două funcții numerice, definite pe $\mathbb{R}$, tot cu denumirile de *sinus* și *cosinus*.

Prin *funcția de înfășurare*, introdusă anterior, am asociat numărului real t un punct M_t pe cercul trigonometric. Coordonatele acestui punct sunt *cosinusul* și *sinusul* numărului t . Mai exact, dacă $M_t(x_t, y_t)$, atunci $x_t^2 + y_t^2 = 1$ (*explică!*), deci $x_t, y_t \in [-1, 1]$.



DEFINIȚIE

Vom numi **cosinus**, funcția care face să-i corespundă fiecărui număr real t abscisa x_t a punctului M_t . Deci $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $\cos(t) = x_t$.

Vom numi **sinus**, funcția care face să-i corespundă fiecărui număr real t ordonata y_t a punctului M_t . Deci $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $\sin(t) = y_t$.

Vom păstra, prin *abuz de limbaj*, aceeași notație pentru sinusul/cosinusul unui unghi, indiferent de modul de exprimare (grade sau radiani). *Atenție!* Trebuie să faci mereu distincție între $\sin n^\circ$ și $\sin n$.

Exemple de valori ale funcțiilor sinus și cosinus

Numărului 0 îi asociem punctul $M_0 = A(1, 0)$; astfel, $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$.

Numărului $\frac{\pi}{2}$ îi asociem punctul $M_{\frac{\pi}{2}} = B(0, 1)$; astfel, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Numărului $-\pi$ îi asociem punctul $M_{-\pi} = A'(-1, 0)$; astfel, $\cos(-\pi) = -1$; $\sin(-\pi) = 0$.

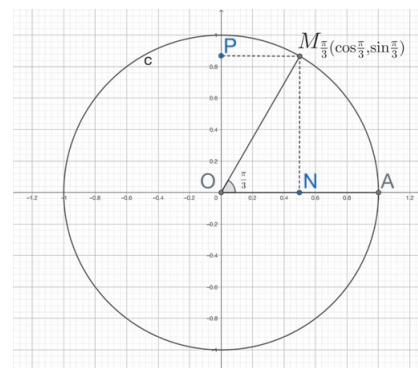
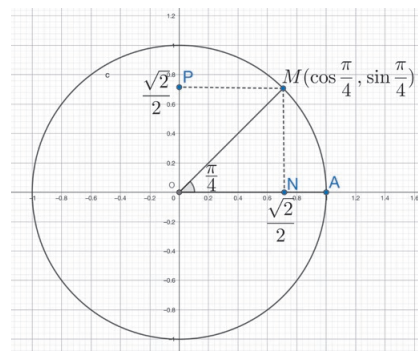
OBSERVAȚII

1. Dacă $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, putem vorbi despre un *unghi ascuțit* de măsură t radiani. Definiția numerelor $\cos t$ și $\sin t$ dată cu ajutorul triunghiului dreptunghic coincide cu cea dată acum. Verificăm afirmația pentru $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\}$.

• $t = \frac{\pi}{4}$. Considerăm N și P proiecțiile punctului $M_{\frac{\pi}{4}}$ pe axele Ox respectiv Oy . Conform definiției, $\sin \frac{\pi}{4} = M_{\frac{\pi}{4}}N$ și $\cos \frac{\pi}{4} = M_{\frac{\pi}{4}}P$. Observăm că $\triangle OM_{\frac{\pi}{4}}N$ este dreptunghic isoscel cu ipotenuza 1. Rezultă $ON = M_{\frac{\pi}{4}}P = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Obținem relații cunoscute: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

• $t = \frac{\pi}{3}$. Cum $\triangle OM_{\frac{\pi}{3}}N$ este dreptunghic, având $\angle OM_{\frac{\pi}{3}}N = \frac{\pi}{6}$, cateta opusă este $ON = \frac{1}{2} OM_{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$. Obținem $\cos \frac{\pi}{3} = M_{\frac{\pi}{3}}P = ON = \frac{1}{2}$. Din teorema lui Pitagora obținem $M_{\frac{\pi}{3}}N = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Reținem, fiind util: $\cos n^\circ = \cos \frac{\pi n}{180^\circ}$



2. Formula fundamentală a trigonometriei: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Într-adevăr, considerând punctul M_x pe cercul trigonometric și N proiecția sa pe axa Ox , aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle OM_xN$ dreptunghic: $M_xN^2 + ON^2 = OM_x^2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Consecință: Din formula anterioară, reiese că $\sin^2 x, \cos^2 x \in [0, 1]$. Regăsim că $\sin x, \cos x \in [-1, 1]$, adică funcțiile sinus și cosinus sunt mărginite.



REȚINEM

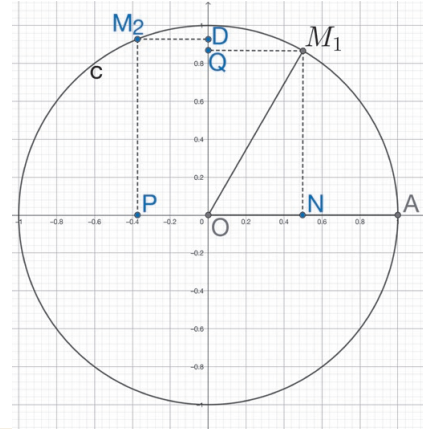
În clasa a XI-a, apelând la cunoștințe mai avansate de matematică, se va demonstra că funcțiile sinus și cosinus sunt *surjective*. Până atunci, acceptăm această proprietate fără demonstrație!

EXERCITIUL REZOLVAT

Comparăm numerele $\sin 1$ și $\sin 2$.

Rezolvare: Considerăm $M_1(\cos 1, \sin 1), M_2(\cos 2, \sin 2)$. Conform definiției, $\sin 1 = M_1N$ și $\sin 2 = M_2P$ (distanțele la axa Ox).

$M_1 \in \text{cadranul I}, M_2 \in \text{cadranul II}$. Deoarece $\frac{\pi}{2} - 1 > 2 - \frac{\pi}{2}$, rezultă că M_2 este mai apropiat de $M_{\frac{\pi}{2}}$ decât M_1 , și deci $M_2P > M_1N \Rightarrow \sin 2 > \sin 1$.



3. Între coordonatele a și b ale unui punct P aparținând cercului trigonometric avem relația:

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ (ecuația cercului trigonometric).}$$

Din relație rezultă $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$ sau $a = \pm\sqrt{1 - b^2}$, iar alegerea semnului se face în funcție de cadranul de apartenență. Observăm că $a, b \in [-1, 1]$.

Reciproc, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y^2 = 1$, atunci există $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel încât $x = \cos \theta$ și $y = \sin \theta$.



EXERCITIUL REZOLVAT

Demonstrează că $\sin x + \cos x \neq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Presupunem că $\sin x + \cos x = 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Din $\sin x \leq 1, \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\sin x = 1, \cos x = 1$ și $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$, fals.



EXERCITII PROPUSE

- (Activitate în pereche)** Desenați pe hârtie milimetrică un triunghi dreptunghic ABC , $A = 90^\circ$, cu $AB = 10$ cm și $\widehat{ABC} = 40^\circ$ (cu raportorul). Ce valori reprezintă $\sin 40^\circ$ și $\cos 40^\circ$? Comparați rezultatele obținute, apoi faceți o medie a rezultatelor obținute.
- Utilizând definiția, calculează: $\sin 0, \cos 0, \sin \frac{3\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{4\pi}{3}, \sin 150^\circ, \cos 330^\circ$.
- Se consideră punctul M pe cercul trigonometric. Precizează coordonatele punctului M dacă:
 - $\cos \widehat{AOM} = \frac{1}{3}, M \in \text{cadranul I};$
 - $\sin \widehat{AOM} = \frac{2}{5}, M \in \text{cadranul II}.$
- Compară numerele $\cos 1$ și $\cos 5$. Compară și strategia ta de rezolvare cu a altor colegi.
- Demonstrează că: a) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x + \cos x \neq -2;$ b) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \cdot \cos x \neq \pm 1.$
- (Activitate pe grupe)** Demonstrați că $\forall x \in \mathbb{R}$ avem:
 - $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x;$
 - $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x;$
 - $\cos^3 x - \sin^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x);$
 - $\sin^4 x - \cos^4 x = -(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x).$
 Abordați întâi independent, apoi discutați strategiile de rezolvare la nivelul grupei.

7. Demonstrează că:
- $(a\cos x + b\sin x)^2 + (a\sin x - b\cos x)^2 = a^2 + b^2, \forall x \in \mathbb{R};$
 - $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\cos x + b\sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$
8. Știind că $\sin x + \cos x = a$, calculează $\cos^4 x + \sin^4 x$.
9. Știind că $\sin x + \cos x = a$ și $\sin^6 x + \cos^6 x = b$, stabilește o relație între a și b . Compară rezultatul tău cu cel al colegului de bancă.
10. Verifică faptul că $\sqrt{4\sin^2 x + \cos^4 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x}$ nu depinde de x .
11. Demonstrează că $\frac{1}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2\cos x + \frac{1}{\sin x}} + \frac{1}{2\sin x + \frac{1}{\cos x}}$, oricare $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- Putem generaliza identitatea la orice x real? Justifică (contraexemplu).
12. Determină imaginea funcțiilor:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\sin x - 3;$
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |1 - \sin x| + |1 + \sin x|;$
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x.$

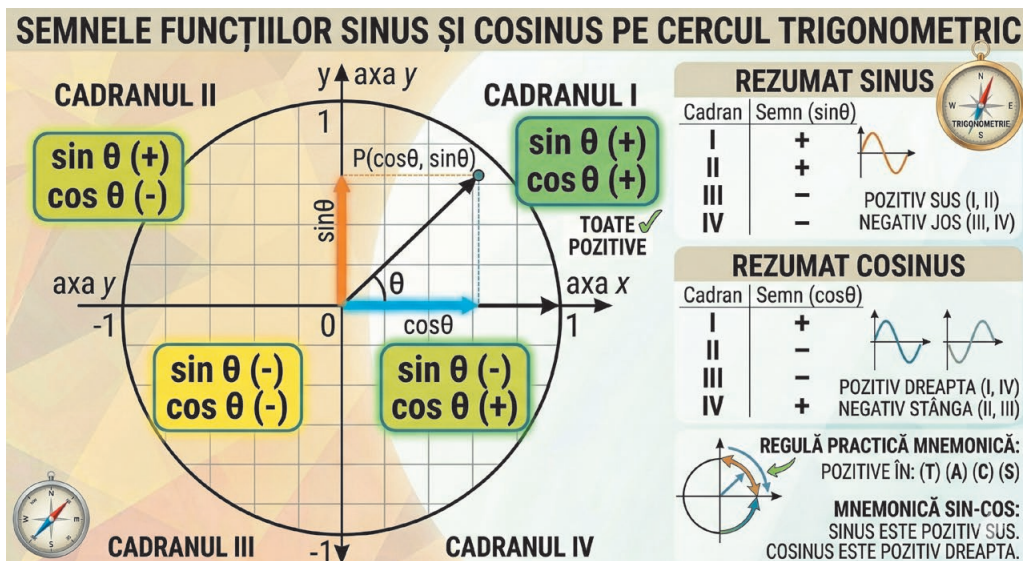
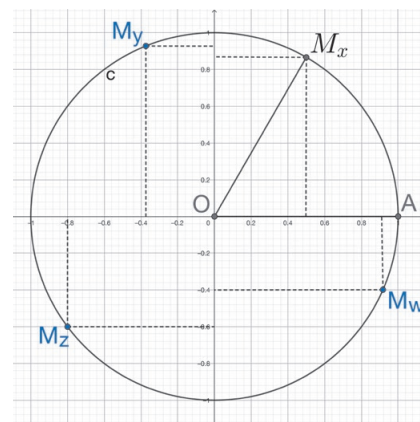
A. Proprietăți ale funcțiilor sinus și cosinus

Semnul funcțiilor sinus și cosinus

Semnul funcției sinus (cosinus) pe un interval I este dat de semnul numărului $\sin x$ ($\cos x$), $x \in I$.

Semnele numerelor $\sin x$ și $\cos x$ se obțin ținând seama de apartenența punctului M_x la cadranele determinate de axele de coordonate și de semnul abscisei și ordonatei unui punct în aceste cadrane. Observând și figura alăturată:

$M_x \in \text{cadrantul I} \Rightarrow \sin x > 0, \cos x > 0,$
 $M_y \in \text{cadrantul II} \Rightarrow \sin y > 0, \cos y < 0;$
 $M_z \in \text{cadrantul III} \Rightarrow \sin z < 0, \cos z < 0,$
 $M_w \in \text{cadrantul IV} \Rightarrow \sin w < 0, \cos w > 0.$



Luând în considerare și cazul de egalitate cu 0, putem stabili pe $[0, 2\pi)$ semnul funcției sinus (cosinus):

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	++++	1	++++	0	----	-1	----	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	++++	0	----	-1	----	0	++++	1

EXEMPLE REZOLVATE

1. Determină semnul produsului $\sin \sqrt{3} \cdot \sin \sqrt{7} \cdot \sin \sqrt[3]{32}$.

Rezolvare: $\sqrt{3}$ și $\sqrt{7}$ aparțin intervalului $(0, \pi)$, deci $\sin \sqrt{3} > 0, \sin \sqrt{7} > 0; \sqrt[3]{32} \approx 3,17$, deci $\sqrt[3]{32} \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ și $\sin \sqrt[3]{32} < 0$. Rezultă că produsul este negativ.

2. Determină $|\cos x|$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Rezolvare: În cazul $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ rezultă $\cos x \in (-1, 0)$, deci $|\cos x| = -1$. În cazul $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, $\cos x = 0$, deci $|\cos x| = 0$.

Reflecție: Pentru oricare x număr real, care este mulțimea valorilor lui $|\cos x|$?

3. a) Determină $x \in [0, 2\pi)$ pentru care $\cos x = \sin x$. b) Determină $x \in [0, 2\pi]$ pentru care $|\cos x| = |\sin x|$.

Rezolvare:

a) Din definiție rezultă că x aparține bisectoarei cadranelor I și III. Rezultă $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

b) $|\cos x| = |\sin x| \Leftrightarrow \cos x = \sin x$ sau $\cos x = -\sin x$, deci $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\} \cup \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

4. a) Câte soluții are ecuația $\cos x = -\frac{1}{3}, x \in [0, 2\pi)$?

b) Se consideră $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, astfel încât $\cos x = -\frac{1}{3}$. Determină $\sin x$.

c) Stabilește semnul numerelor: i) $\sin 62^\circ$; ii) $\sin 62$.

Rezolvare:

a) Funcția cosinus este negativă în cadranele II și III. Deoarece este surjectivă, rezultă că în intervalul $[0, 2\pi)$ ecuația $\cos x = -\frac{1}{3}$ are două soluții.

b) Din teorema fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ rezultă $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Deoarece $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (cadrantul II), $\sin x > 0$, deci $\sin x = +\sqrt{1 - (-\frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) i) $62^\circ \in \text{cadrantul I}$, deci $\sin 62^\circ > 0$;

ii) $62 = 9 \cdot 2\pi + r$, unde r este redusul lui 62 la $[0, 2\pi)$. Astfel, $r = 62 - 18\pi \approx 62 - 56,54 = 5,46$. Pentru că $5,46 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, rezultă că $62 \in \text{cadrantul IV}$, deci $\sin 62 < 0$.



EXERCITII PROPUSE

1. Determină $\sin x$ în cazurile:

a) $\cos x = \frac{1}{3}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

b) $\cos x = \frac{1}{3}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

c) $\cos x = -\frac{4}{5}, x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

2. Determină $\cos x$ în cazurile:

a) $\sin x = -\frac{24}{25}, x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$;

b) $\sin x = \frac{3}{5}, x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$;

c) $\sin x = -\frac{4}{5}, x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

3. Stabilește semnul fiecărui produs:

a) $\cos 1 \cdot \cos 2 \cdot \cos 3 \cdot \cos 4$; b) $\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 5 \cdot \sin 6$;

c) $\sin \sqrt{3} \cdot \cos \sqrt{5} \cdot \cos \sqrt{7} \cdot \sin \sqrt[3]{216}$.

4. Stabilește semnul fiecărei sume: a) $\sin 1 + \sin 3 + \sin 6$;

b) $\cos 1 + \cos 6$; c) $\sin 70^\circ - \cos 100^\circ$.

5. Determină partea întreagă a numerelor: a) $\sin \frac{13\pi}{12}$;

b) $\sin 44$;

c) $\sin 49$;

d) $\cos \pi^2$.

6. Stabilește semnul numerelor: a) $\sin \frac{76\pi}{11}$;

b) $\cos \frac{107\pi}{9}$;

c) $\cos 5$;

d) $\sin 2,6$;

e) $\sin 340^\circ$.

7. Determină semnul numărului $\sin(3\cos 2)$.

8. (**Activitate în pereche**) Există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $[\sin x] + [\cos x] = 2$? Formulați independent câte un raționament, apoi discutați între voi.

9. Determină $x \in [0, 2\pi)$ pentru care: a) $\sin x \cdot \cos x < 0$;

b) $\sin x \cdot \cos x > 0$.

10. Determină $x \in [0, 2\pi]$ astfel încât: a) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) < 0$;

b) $\sin(x + \frac{\pi}{6}) \cdot \cos x > 0$.



11. Determină $t \in [0, 2\pi]$ pentru care avem: a) $\sin t = \cos t$; b) $\sin t = -\cos t$.
12. Determină $t \in [0, 2\pi]$ pentru care $|\sin t + \cos t| = |\sin t| + |\cos t|$.
13. **(Activitate pe grupe)** Se consideră $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \cos x \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că $\sin^n x + \cos^n x \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Abordați cerința individual, apoi discutați strategiile aplicate la nivelul grupeii.

B. Periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus

TEOREMĂ

Funcțiile $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ și $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ sunt periodice, având perioada principală 2π .

Considerăm utilă prezentarea raționamentului (demonstrației) pentru această teoremă.

S-a prezentat deja că funcția de înfășurare $p: \mathbb{R} \rightarrow C(0, 1)$ este periodică, de perioadă principală 2π . Astfel, $p(x + 2\pi) = p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M_{x+2\pi} = M_x$, așadar coordonatele punctelor M_x și $M_{x+2\pi}$ sunt egale. Rezultă $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ și $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, ceea ce semnalează că funcțiile sunt periodice, având mulțimea perioadelor $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Rămâne să justificăm că 2π este chiar perioada principală. Prin reducere la absurd, presupunem că $\exists T \in (0, 2\pi)$ astfel încât $\sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$, egalitatea revine la $\sin T = \sin 0 = 0$, ceea ce este echivalent cu $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Însă $k\pi \in (0, 2\pi)$, de unde $k = 1$ și atunci: $\sin(x + \pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, egalitatea devine $\sin \frac{3\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 = 1$ (fals).

Analog se demonstrează că 2π este perioadă principală și pentru $\cos$.

EXERCIȚII REZOLVATE

1. Demonstrează că $\cos \frac{19\pi}{3} \in \mathbb{Q}$ și $\sin 420^\circ \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Rezolvare: $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$ (deoarece 6π este perioadă), deci $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

$\sin(420^\circ) = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ$, deci $\sin(420^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = |\sin x|$ este periodică, având perioada principală π .

Rezolvare:

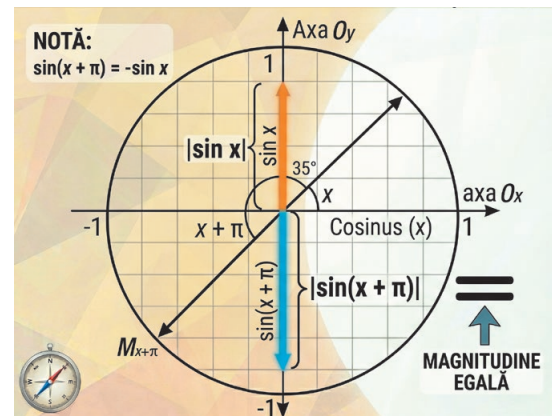
Trebuie să demonstrăm că $|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$ (1). Punctele M_x și $M_{x+\pi}$ sunt diametral opuse în cerc. Egalitatea (1) este echivalentă cu egalitatea distanțelor de la cele 2 puncte la axa Ox , ceea ce este ușor de demonstrat având în vedere triunghiurile dreptunghice evidențiate în figură (verifică!).

Demonstrăm prin reducere la absurd că π este perioada principală:

Fie $T \in (0, \pi)$ astfel încât $|\sin(x + T)| = |\sin x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2). Punând $x = 0$ în (2) obținem $|\sin T| = |\sin 0| = 0 \Rightarrow T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Însă $k\pi \in (0, \pi)$ este falsă, contradicție.

3. Vei învăța la fizică despre mișcarea oscilatorie armonică, de exemplu mișcarea unui pendul gravitațional, a unui resort (arc) etc. Legea de mișcare este descrisă de o funcție sinus sau cosinus de forma: $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ sau $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$; $s(t)$ este o funcție periodică de timp care se numește *elongație* (deplasare), care – uzual – se măsoară în metri, centimetri.

- Perioada T este timpul pentru o oscilație completă (secunde).
- A = *amplitudinea* (deplasarea maximă de la poziția de echilibru).
- ω = se numește *pulsăție* și este legată de *frecvența* f ; $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ (se măsoară în rad/s).
- φ este *faza inițială*.



În contextul dat, considerăm funcția de lege $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Demonstrăm că $T = \frac{2\pi}{\omega}$ este perioadă.
Rezolvare: Într-adevăr $s(t + T) = A \sin(\omega(t + T) + \varphi) = A \sin(\omega t + \omega T + \varphi) = A \sin((\omega t + \varphi) + 2\pi) = s(t)$.

Observație: Prin analogie, se poate demonstra un rezultat mai general: dacă o funcție g are perioada $T > 0$, atunci funcția $x \rightarrow g(ax + b)$, $a \in \mathbb{R}^*$, are perioada $\frac{T}{|a|} > 0$.

4. a) Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 9x + \sin 21x$ este periodică.

b) Demonstrează că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \chi(x) + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ nu este periodică (χ este funcția lui Dirichlet).

Rezolvare: a) Observăm că f este suma a două funcții g și h cu legile $g(x) = \cos 9x$ și $h(x) = \sin 21x$. Conform observației anterioare, g este periodică cu perioada principală $T_1 = \frac{2\pi}{9}$, iar h este periodică cu perioada principală $T_2 = \frac{2\pi}{21}$.

Am demonstrat anterior că dacă $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, atunci $g + h$ este periodică. Într-adevăr, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{21}{9} \in \mathbb{Q}$, deci $3T_1 = 7T_2 = \frac{2\pi}{3}$ este perioadă a funcției. Poți demonstra că este chiar perioada principală pentru f . (Verifică!)

b) Presupunem că există $T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $g(x + T) = g(x) \Leftrightarrow \chi(x + T) + \sin(x + T) = \chi(x) + \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1). Analizăm cazurile:

● Pentru $T \in \mathbb{Q}$, (1) devine $\chi(x) + \sin(x + T) = \chi(x) + \sin x \Leftrightarrow \sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$, adică $T \notin \mathbb{Q}$, contradicție.

● Pentru $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, particularizând $x = 0$ în (1) obținem $\chi(T) + \sin T = \chi(0) + \sin 0 \Leftrightarrow \sin T = 0 \Leftrightarrow T = k\pi$; $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, deci (1) $\Leftrightarrow \chi(x + k\pi) + \sin(x + k\pi) = \chi(x) + \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 1$ obținem $\chi(1 + k\pi) + \sin(1 + k\pi) = \chi(1) + \sin 1 \Leftrightarrow 0 + \sin(1 + k\pi) = 1 + \sin 1$ (2). Pentru k par, (2) $\Leftrightarrow \sin 1 = 1 + \sin 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ (fals). Pentru k impar, (2) $\Leftrightarrow \sin(1 + \pi) = 1 + \sin 1 \Rightarrow -\sin 1 = 1 + \sin 1 \Rightarrow \sin 1 = -0,5$, fals (deoarece $\sin 1 > 0$); contradicție. Așadar în ambele cazuri avem contradicție.

Observație: Funcția g din exemplul 4b) este o sumă de funcții periodice, care nu este periodică!

EXERCITII PROPUSE

1. a) Calculează: $\sin \frac{101\pi}{2}$; $\sin 2026\pi$; $\sin \frac{204\pi}{3}$; $\cos 5\pi$; $\cos\left(-\frac{205\pi}{6}\right)$; $\cos \frac{187\pi}{3}$; $\sin 750^\circ$; $\cos(-1020^\circ)$.

b) Dacă $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $\cos \theta = \frac{1}{3}$, calculează $\sin \theta$; $\cos(\theta + 17\pi)$; $\sin(\theta - 25\pi)$.

c) Dacă $\sin \theta = -\frac{2}{3}$, $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, calculează $\cos \theta$; $\sin(\theta + 20\pi)$; $\cos(\theta - 15\pi)$.

d) Se consideră $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $\sin \varphi = \frac{1}{4}$. Demonstrează că $\exists \alpha \in (15, 20)$ astfel încât $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

2. (**Activitate în pereche**) Pentru funcțiile următoare, domeniul de definiție este $\mathbb{R}$. Demonstrați că numărul T este perioadă:

a) $f_1(x) = 3\cos 2x - \cos 4x$, $T = \pi$; b) $f_2(x) = \cos^2 x - \sin \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$; c) $f_3(x) = 1 + \sin \frac{\pi}{2}x$, $T = 4$;

d) $f_4(x) = \sin \pi x - \frac{x}{2} + \left[\frac{x}{2}\right]$, $T = 2$; e) $f_5(x) = |\cos \pi x|$, $T = 1$; f) $f_6(x) = [\cos 3x]$, $T = \frac{4\pi}{3}$.

3. Dă exemplu de număr $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{\cos ax}$ este periodică.

4. Este funcția $f: [-4\pi, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$ periodică?

5. Funcțiile următoare sunt definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$ și sunt periodice. Determină perioada principală:

a) $f_1(x) = \sin 3x + \cos 6x$;

b) $f_2(x) = \sin 3x - \sin 4x$;

c) $f_3(x) = 2\sin(3x + 4)$;

d) $f_4(x) = \sin 42x + \cos 35x$.

6. Justifică faptul că funcțiile următoare, definite pe $\mathbb{R}$, nu sunt periodice:

a) $f(x) = x + \cos 2x$;

b) $f(x) = \sin x - x^2$.

7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [\sin x]$.

a) Reprezintă grafic restricția lui f la $[0, 2\pi]$. b) Reprezintă grafic funcția f pe $\mathbb{R}$.

c) Reprezintă grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = [\cos x]$.

8. Demonstrează că dacă $x = \frac{720\pi}{180 - \pi}$, atunci $\sin x^\circ = \sin x$.



C. Paritatea și imparitatea funcțiilor sinus și cosinus



TEOREMĂ

Funcția $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este impară: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$.

Funcția $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este pară: $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$.

Demonstrație. Fie $x \in \mathbb{R}$ și punctele M_x și M_{-x} pe cercul trigonometric. $\exists k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = 2k\pi + x^*$, unde $x^* \in [0, 2\pi)$, deci putem presupune că $x \in [0, 2\pi)$.

Observăm că punctele M_x și M_{-x} sunt simetrice față de diametrul AA' (axa Ox), deci M_x are coordonatele $(\cos x, \sin x)$, iar M_{-x} are coordonatele $(\cos(-x), \sin(-x))$. Deducem că $\cos(-x) = \cos x$ și $\sin(-x) = -\sin x$ (deoarece abscisele punctelor M_x și M_{-x} sunt egale, iar ordonatele sunt opuse).



EXEMPLE

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\frac{7\pi}{4} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



EXERCIȚII REZOLVATE

1. Verifică faptul că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x \cdot \cos x$ este impară.

Rezolvare: $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x)$, pentru orice x real.

2. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + \sin x$ nu este nici pară, nici impară.

Rezolvare: Într-adevăr, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, deci $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ și $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară și funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(\sin x)$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(\cos x)$. Demonstrează că g este impară și că h este pară.

Rezolvare: $sg(-x) = f(\sin(-x)) = f(-\sin x) = -f(\sin x) = -g(x)$; $h(-x) = f(\cos(-x)) = f(\cos x) = h(x)$, pentru orice x real.

4. Se consideră funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impară și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = g(x) + \sin x$. Dacă $P(a, b)$ aparține graficului funcției f , demonstrează că $P'(-a, -b)$ aparține de asemenea graficului funcției f .

Rezolvare: Funcția f este impară, fiind sumă de funcții impare.

Atunci $f(-a) = g(-a + \sin(-a)) = -(g(a) + \sin a) = -f(a) = -b$.



EXERCIȚII PROPUSE

1. Demonstrează că următoarele funcții sunt pare:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 x; \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^2 + \cos 3x; \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin^2 x}.$$

2. Demonstrează că următoarele funcții sunt impare: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x^3$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^5 + \sin 3x$.

3. Calculează $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-17\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x$ nu este nici pară, nici impară.

5. (Activitate în pereche)

a) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară. Demonstrați că funcțiile $x \rightarrow f(x) + \sin^2 x$ și $x \rightarrow f(\cos x)$ sunt pare.

b) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară. Demonstrați că funcțiile $x \rightarrow g(x) = f(x) + \sin x \cos x$ și $x \rightarrow h(x) = f^3(\sin x)$ sunt impare.

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(a + b) + f(a - b) = 2f(a) + 2f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrează că $f(0) = 0$.

b) Dă exemplu de funcție f , nenulă.

c) Demonstrează că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + \cos x$ este pară.



D. Reducerea la primul cadran

Considerăm $x \in \mathbb{R}$. Ținând cont de periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus, calculul lui $\sin x$ și $\cos x$ se va reduce practic la calculul redusului x^* din relația $x = 2k\pi + x^*$, $k \in \mathbb{Z}$ și $x^* \in [0, 2\pi)$. Obținem $\sin x = \sin x^*$, $\cos x = \cos x^*$. Se mai spune că *reducem* argumentul lui $\sin$ și $\cos$ la intervalul $[0, 2\pi)$. În plus, formulele următoare permit **reducerea argumentului la intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ (reducerea la primul cadran)**.



TEOREMĂ

- (1) Pentru $x \in [0, 2\pi)$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- (2) Pentru $x \in [0, 2\pi)$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

Demonstrație: Este suficient să observăm în figura alăturată că punctele P_x și $P_{\pi-x}$ sunt simetrice față de Oy, iar punctele P_x și $P'_{\pi+x}$ sunt simetrice față de O. Formulele se prelungesc apoi la $x \in \mathbb{R}$. De asemenea $\sin(2\pi - x) = -\sin x$; $\cos(2\pi - x) = \cos x$. (3)

Cum utilizăm aceste formule în calcul?

1. Reducem $x \in \mathbb{R}$ la $x^* \in [0, 2\pi)$.
2. Dacă $x^* \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ (cadranul II), calculăm $\pi - x^*$ și folosim formulele (1): $\sin x^* = \sin(\pi - x^*)$, $\cos x^* = -\cos(\pi - x^*)$.
3. Dacă $x^* \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (cadranul III), calculăm $x^* - \pi$ și $\cos x^* = -\cos(x^* - \pi)$; $\sin x^* = -\sin(x^* - \pi)$ (formulele (2)).
4. Dacă $x^* \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (cadranul IV), calculăm $2\pi - x^*$ și apoi formulele (3) sau putem utiliza paritatea (imparitatea) și periodicitatea funcțiilor.

Practic, dacă x' este redusul lui x la *cadranul I*, atunci $\sin x = \pm \sin x'$ și $\cos x = \pm \cos x'$, alegerea semnului făcându-se după semnul funcției din cadranul în care se află x .



EXEMPLE

$$\frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi); \cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(-\frac{53\pi}{6}) = \cos \frac{53\pi}{6} = \cos(8\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Asociază etapele de calcul cu etapele de raționament descrise, pentru a verifica faptul că ai înțeles procedeul!

Formule: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Justificare: Putem considera $x \in [0, 2\pi)$ și analizăm cazurile:

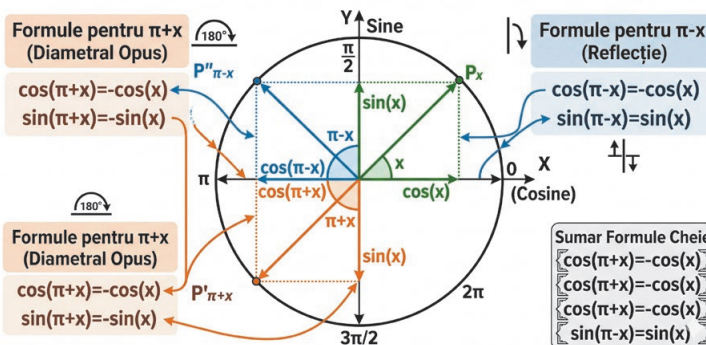
I. $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x = \text{distanța lui } M_x \text{ la } Oy = \text{distanța lui } M_{\frac{\pi}{2}-x} \text{ la } Ox = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, din congruența de triunghiuri dreptunghice.

II. $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos x = -\cos(\pi - x) = -\sin(\frac{\pi}{2} - (\pi - x)) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, din imparitatea funcției $\sin$.

Analog tratăm cazurile $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Formula (2) se deduce din (1): $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)) = \sin x$.

REDUCEREA LA PRIMUL CADRAN: Formule pentru $\pi+x$ și $\pi-x$





EXERCITII REZOLVATE

1. Verifică egalitățile:

a) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, pentru orice x real. b) $\frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ} = 1$.

Rezolvare:

a) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2 x$; $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

b) Ținem cont că $\sin(90^\circ - x^\circ) = \cos x^\circ$.

2. $\sin\left(\frac{90\pi}{180 + \pi}\right)^\circ = \cos\left(\frac{90\pi}{180 + \pi}\right)^\circ$

Rezolvare: $\sin\left(\frac{90\pi}{180 + \pi}\right)^\circ = \sin\left(\frac{90\pi}{180 + \pi} \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi^2}{2(180 + \pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{2(180 + \pi)}\right) =$
 $= \cos\left(\frac{180\pi + \pi^2 - \pi^2}{2(180 + \pi)}\right) = \cos\frac{180\pi}{2(180 + \pi)} = \cos\left(\frac{90\pi}{180 + \pi}\right)$.



EXERCITII PROPUSE

1. Calculează $\sin$ și $\cos$ pentru $x \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}, \frac{125\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{200\pi}{3}\right\}$.

2. Calculează $\sin$ și $\cos$ pentru $x \in \{330^\circ; -240^\circ; 135^\circ; 225^\circ\}$.

3. Se consideră $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\cos x = -\frac{3}{5}$. Calculează: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

4. Calculează: a) $E = \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

b) $F = \sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, unde x este număr real.

5. Determină partea întreagă și partea fracționară a numerelor: a) $\sin\frac{14\pi}{13}$; b) $\sin 45$; c) $\cos \pi^3$.

6. Stabilește semnul numerelor: a) $\sin\frac{108\pi}{9}$; b) $\sin\frac{\pi}{3}\cos 50$; c) $\sin(3\cos 3)$; d) $\cos^2 100$.

7. Demonstrează că:

a) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$; b) $\sin\left(x + \left(2n + 1\right)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

8. (Activitate în pereche) Demonstrați că:

a) $2^n \cos\frac{n\pi}{3} \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; b) $(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; c) $2^n \sin\frac{(2n-3)\pi}{6} \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

9. Determină $\sin x$ din ecuația $\cos^2(x - 990^\circ) + 2\cos(x - 990^\circ) = 3$.

10. Rescrie într-o formă mai simplă:

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi)$; b) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(x + 2\pi)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$; d) $\frac{\sin(x + 180^\circ) - \cos(x + \frac{3\pi}{2})}{\sin^2 123}$.

11. Verifică dacă $\sin\left(a + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - a\right)$, pentru orice a real.

12. Calculează: $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$; $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 360^\circ$.

13. Determină $\cos x$ din relația $\sin\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{17\pi}{2}\right) + \sin(-19\pi)$.

14. Demonstrează că $\cos\left(\frac{360\pi}{180 + \pi}\right)^\circ = \cos\left(\frac{360\pi}{180 + \pi}\right)$.



Funcțiile tangentă și cotangentă

În clasele gimnaziale s-a definit *tangentă* unui unghi ascuțit dintr-un triunghi dreptunghic ABC , de catete AB și AC , ca fiind *raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată unghiului*, $tgx = \frac{AB}{AC}$ (sau inversa acestei fracții). Cum $\sin x = \frac{AB}{BC}$ și $\cos x = \frac{AC}{BC}$, am dedus că $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$. La fel pentru cotangentă, $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Vom folosi în continuare acest raport pentru a defini tangentă (cotangentă) oricărui număr real pentru care rapoartele au sens. Vom ține cont că: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi$ sau $x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, respectiv $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$



DEFINIȚIE

Se numește **tangentă** funcția $tg: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Exemplu: Folosindu-ne de cele învățate la funcțiile sinus și cosinus, $tg \frac{5\pi}{6} = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Atenție! Pentru $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, tangentă nu este definită.



DEFINIȚIE

Se numește **cotangentă** funcția $ctg: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$.

1. Interpretare geometrică

Fie dreapta a tangentă în punctul A la $C(0, 1)$ și $x \in [0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Atunci $M_x \in C(0, 1) \setminus \{B, B'\}$.

Fie $\{T_x\} \in OM_x \cap a$. Din fig.1, unde $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, observăm că $tgx = AT_x$.

Dacă $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ (fig.2), N proiecția lui M_x , atunci $\triangle OM_x N \sim \triangle OT_x A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{M_x N}{AT_x} = \frac{ON}{OA} = \frac{ON}{1} \Leftrightarrow \frac{M_x N}{ON} = AT_x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{-\cos x} = AT_x \Rightarrow tgx = -AT_x.$$

Analog procedăm pentru $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ și obținem $tgx = \pm AT_x$. La fel $ctgx = \pm BQ_x$, unde Q_x este intersecția dreptei OM_x cu tangentă în B la $C(0, 1)$.

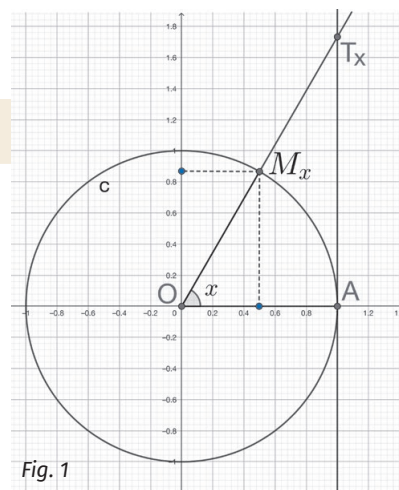


Fig. 1

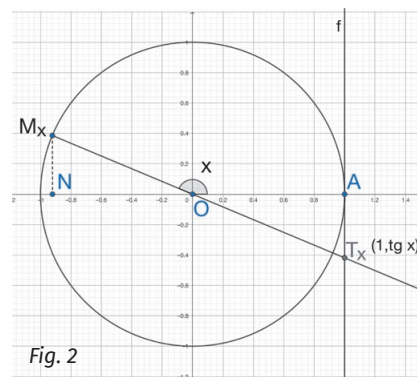


Fig. 2



INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A TANGENTEI PE CERCUL TRIGONOMETRIC

CADRANUL II $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

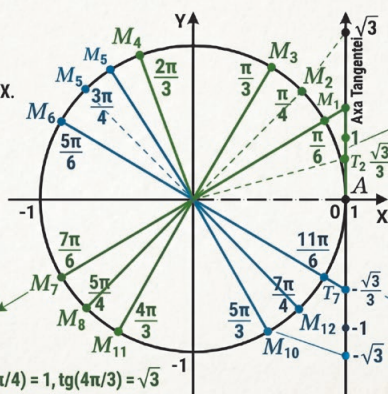
Raza intersectează axa tangentei **DEDESUBTUL** axei OX . Tangenta este **NEGATIVĂ**.

Exemple: $tg(2\pi/3) = -\sqrt{3}$,
 $tg(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

CADRANUL III $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

Raza intersectează axa tangentei **DEASUPRA** axei OX . Tangenta este **POZITIVĂ**.

Exemple: $tg(7\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $tg(5\pi/4) = 1$, $tg(4\pi/3) = \sqrt{3}$



CADRANUL I $(0, \frac{\pi}{2})$

Raza intersectează axa tangentei **DEASUPRA** axei OX . Tangenta este **POZITIVĂ**.

Exemple: $tg(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $tg(\pi/4) = 1$, $tg(\pi/3) = \sqrt{3}$

CADRANUL IV $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

Raza intersectează axa tangentei **DEDESUBTUL** axei OX . Tangenta este **NEGATIVĂ**.

Exemple: $tg(5\pi/3) = -\sqrt{3}$,
 $tg(7\pi/4) = -1$, $tg(11\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



OBSERVAȚII

1. Dacă $x \in \mathbb{R}$ atunci $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x^*$, $x^* \in [0, 2\pi)$.
2. Interpretarea geometrică poate fi luată drept definiție pentru tangentă și cotangentă.
3. Interpretarea geometrică a tangentei și cotangentei arată că ambele funcții sunt *surjective* și *neinjective*.
4. Să examinăm următorul tabel de valori ale tangentei, obținute cu calculatorul științific:

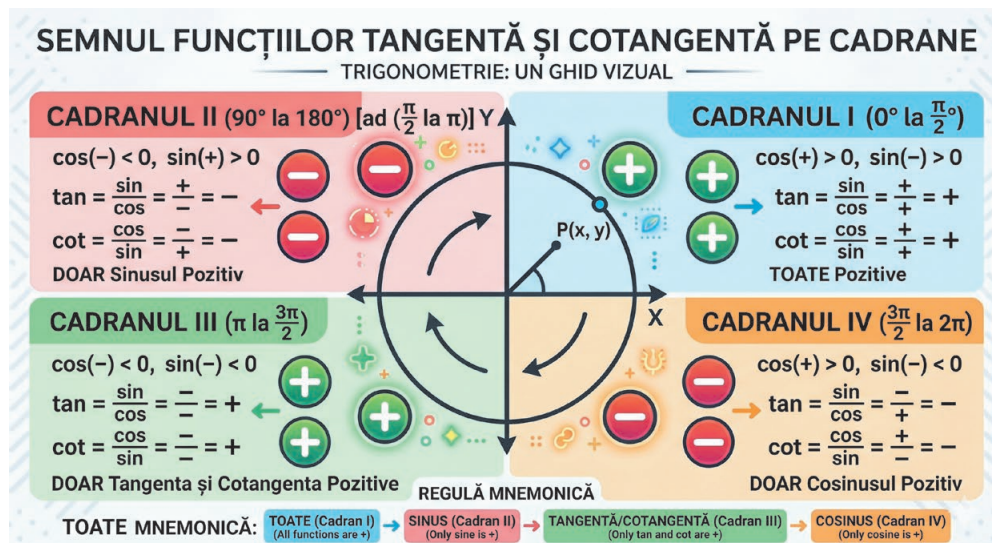
x	88°	89°	$89,5^\circ$	$89,9^\circ$	$89,99^\circ$	$89,999^\circ$
$\operatorname{tg} x$	28,63	57,28	114,58	572,95	5729,57	57295,77

Ce observăm? Pentru valori ale argumentului apropiate de 90° , valorile tangentei cresc oricât de mult. Spunem despre o astfel de funcție că este *nemărginită*. La fel și cotangentă este *funcție nemărginită*. Acest fapt îl putem observa și prin lectură grafică.

2. Proprietăți ale funcțiilor tangentă și cotangentă

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ pentru care au sens expresiile:

- 1) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
- 2) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$;
- 3) $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$; $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.
- 4) Funcțiile tangentă și cotangentă sunt *impare*.
- 5) Funcțiile tangentă și cotangentă sunt *periodice*, având *perioada principală* π .
- 6) Semnul pe cadrane (vezi imaginea alăturată).



Pași de raționament

1), 2) reies *direct din definiție*: $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ etc.

3) $\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ etc.

4) Funcțiile sunt rapoarte dintre o funcție pară și una impară.

$$5) \operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Demonstrăm prin reducere la absurd că π este cea mai mică perioadă pozitivă pentru tangentă: fie $T \in (0, \pi)$, astfel încât $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$ (1), $\forall x$ pentru care ambii membri au sens. Pentru $x = 0$, (1) $\Rightarrow \operatorname{tg} T = 0 \Rightarrow \frac{\sin T}{\cos T} = 0 \Leftrightarrow \sin T = 0$, contradicție cu $T \in (0, \pi)$. La fel demonstrăm și pentru cotangentă.

6. Câturi de semne.

EXERCITII REZOLVATE

1. Demonstrează că: a) $\sin x < x < \operatorname{tg} x \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$;
b) $\sin x \leq x (\forall) x \in [0, \infty)$; c) $\operatorname{tg} 10^\circ > \frac{1}{6}$.

Rezolvare:

$$\text{a) Observăm că } \operatorname{Aria}(\triangle OAM_x) < \operatorname{Aria}(\text{sect} OAM_x) < \operatorname{Aria}(\triangle OAT_x) \Rightarrow \frac{OA \cdot M_x N}{2} < \frac{l(\widehat{AM_x}) \cdot R}{2} < \frac{OA \cdot AT_x}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

b) Dacă $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, atunci $\sin x \leq x$, de la punctul a).

Dacă $x \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$, adică $\sin x < x$.

$$\text{c) } \operatorname{tg} 10^\circ = \operatorname{tg} \frac{\pi}{18} > \frac{\pi}{18} > \frac{1}{6}.$$

2. Determină imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x$.

Rezolvare:

Putem scrie $f(x) = \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, pentru $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Notând $\operatorname{tg} x = t$, $t \in \mathbb{R}$ obținem funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \frac{2t + 3}{t^2 + 1}$, care are imaginea $[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}]$. Verifică!

$$\text{Deci } \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g \cup \{f(\frac{\pi}{2} + k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} = [\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}] \cup \{0\} = [\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}].$$

3. Calculează $S = \sum_{k=1}^n \operatorname{tg}(\frac{k\pi}{n+1})$.

Rezolvare: Ne folosim de imparitatea și periodicitatea funcției tangentă.

$$S = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{n+1} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{n+1} + \dots + \operatorname{tg} \frac{n\pi}{n+1} = -\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{n+1}) - \operatorname{tg}(-\frac{2\pi}{n+1}) - \operatorname{tg}(-\frac{3\pi}{n+1}) - \dots -$$

$$\operatorname{tg}(-\frac{n\pi}{n+1}) = -\operatorname{tg}(\pi - \frac{\pi}{n+1}) - \operatorname{tg}(\pi - \frac{2\pi}{n+1}) - \operatorname{tg}(\pi - \frac{3\pi}{n+1}) - \dots -$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \frac{n\pi}{n+1}) = -\operatorname{tg} \frac{n\pi}{n+1} - \operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{n+1} - \operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{n+1} - \dots - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1} = -S.$$

Din $S = -S$, deducem $S = 0$.

4. **Problemă practică.** Panta unui drum în urcare este 1% (afișată pe indicatorul de circulație). Care este diferența de altitudine (nivel) după 2 km?

Rezolvare:

Panta unei rampe reprezintă raportul dintre înălțimea și lungimea rampei, exprimate în metri. Așadar, urmărind figura 4, panta rampei este $\operatorname{tg} \alpha$.

În cazul nostru, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{100}$, iar din $\triangle OAB$ (dreptunghic) obținem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{AB}{2000} \Rightarrow AB = 20$ (m).

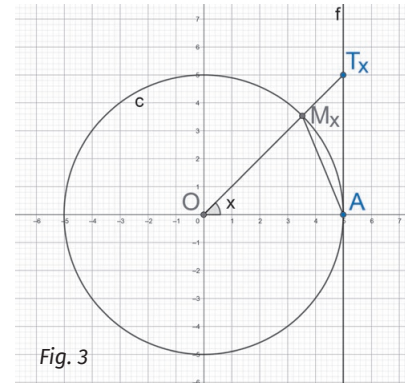


Fig. 3

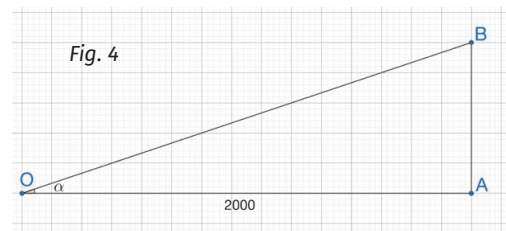


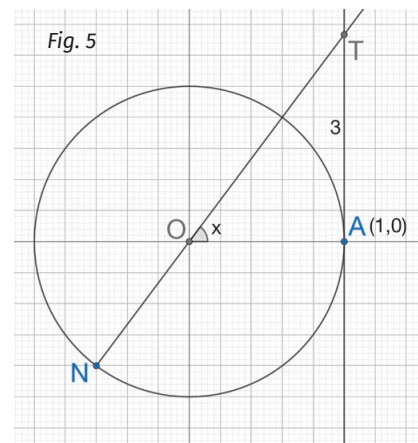
Fig. 4



EXERCIIȚII PROPUSE

În exercițiile următoare, în absența unor precizări, considerăm că expresiile au sens.

- Știind că $\sin x = \frac{2}{3}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, calculează: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.
- Știind că $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ și $\cos x = -\frac{1}{3}$, calculează: $\operatorname{tg} x$; $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}}$.
- (Activitate în pereche)** Calculați $\operatorname{tg} x$ pentru $x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2025\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \frac{2007\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \frac{2009\pi}{6}\}$.
Discutați și comparați între voi valorile obținute. Sunt acestea în număr mai mic decât valorile lui x ?
Explicați.
- Calculează $\operatorname{ctg} x$, pentru $x \in \{\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{103\pi}{4}, 31\frac{\pi}{6}, -81\frac{\pi}{2}\}$.
- Știind că $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ și $\operatorname{tg} x = -2$, calculează $\operatorname{ctg} x$, $\sin x$ și $\cos x$.
- a) Știind că $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\operatorname{ctg} x = 2$, calculează $\sin x + \cos x$.
b) În figura 5, dreapta AT este tangentă cercului trigonometric și $AT = 3$. Calculează $\operatorname{tg} x$, $\sin x$ și $\cos x$, pentru x corespunzător punctului de intersecție dintre OT și cerc.
- Funcțiile următoare sunt definite pe domeniul maxim de definiție, D , având legile $f(x) = \operatorname{tg} 2x - x$; $g(x) = \operatorname{ctg}^4 x - x^2$; $h(x) = 2\operatorname{tg}(\frac{4\pi}{3}x)$. Stabilește D pentru fiecare funcție și studiază dacă acestea sunt pare sau impare.
- Calculează $\operatorname{tg} x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, știind că $\sin^2 x - 6\cos^2 x = \sin x \cos x$.
- Calculează $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, știind că $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$.
- Justifică faptul că $\prod_{k=1}^8 \operatorname{tg} \sqrt{k} > 0$.
- Calculează $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 89^\circ$.
- Verifică faptul că expresiile următoare **nu** depind de x :
$$E = \frac{\operatorname{tg}(x + \pi) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)}{\operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x - 1}; \quad F = -\frac{\sin x + 2\cos x}{\frac{1}{2}\cos x} + \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} + 2\operatorname{tg} x.$$
- Știind că $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$ și $\cos x = \cos y$, rezultă $\sin x = \sin y$? Explică.
- Studiază periodicitatea funcțiilor:
a) $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} 3x$;
b) $f: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 x$;
c) $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{3k+1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg}(\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$.
- Verifică dacă: a) $\sin \frac{\pi}{9} < \frac{7}{20}$; b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- a) Știind că $a \neq 1$ și $\operatorname{tg} x = a$, calculează $\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x - \sin x}$;
b) Știind că $\sin x < \cos x$ și $\cos x = -\frac{1}{3}$, calculează $\operatorname{tg} x$.
- Determină imaginea funcțiilor:
a) $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\operatorname{tg} x + 3$;
b) $g: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$, observând că $\exists t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $x = \operatorname{tg} t$.





Reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice

Reprezentarea grafică a unei funcții constituie o modalitate de a vizualiza, prin desen, comportamentul valorilor acesteia. Avem în vedere două aspecte:

1. Realizarea reprezentării grafice a unor funcții trigonometrice
2. *Lectura grafică* a proprietăților unei funcții, apelând la reprezentări date sau realizate cu sprijinul instrumentelor digitale

Din considerente de simplificare a scrierii (vorbirii), în loc de „reprezentare grafică a funcției” vom scrie mai scurt „graficul funcției”.

Vom trasa graficul unei funcții *prin puncte*, pe baza unui tabel de valori cu argumente dintr-un interval *reprezentativ* al domeniului de definiție (ținând cont că funcția poate fi pară, impară, strict monotonă, periodică etc.). Pe un astfel de interval, admitem că aceste puncte pot fi unite, realizând astfel un grafic fără întreruperi (*continuu*).



REȚINEM

Unele grafice pot fi obținute prin anumite procedee, din grafice cunoscute sau realizate anterior.

Exemple:

- Graficul funcției $-f$ poate fi obținut din graficul funcției f , prin simetrie față de axa Ox .
- Graficul funcției $|f|$ se obține din graficul funcției f , prin înlocuirea graficului aflat sub axa Ox cu simetricul său față de axa Ox .
- Graficul funcției $x \rightarrow f(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se obține din graficul lui f , printr-o deplasare verticală a acestuia cu a unități (sus/jos, în funcție de semnul lui a).
- Graficul funcției $x \rightarrow f(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se obține din graficul lui f printr-o deplasare orizontală a acestuia cu a unități (stânga/dreapta, în funcție de semnul lui a).
- Graficul funcției $x \rightarrow b \cdot f(x)$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, îl obținem din graficul lui f , printr-o *dilatare* sau *contractare* (prin înmulțire cu b).

1. Graficele funcțiilor sinus și cosinus

• Un interval *reprezentativ* pentru graficul funcției sinus este $[-\pi, \pi]$, deoarece are lungimea 2π (perioada principală a funcției) și deoarece funcția este impară.

• Să observăm următorul tabel de valori:

Tabelul este *simetric* față de $\frac{\pi}{2}$, deci graficul va fi *simetric* față de verticala prin $\frac{\pi}{2}$.

Punctele ale căror coordonate au fost date în tabel pentru $[0, \frac{\pi}{2}]$ le-am reprezentat în figura 1, apoi am completat și celelalte puncte din $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Putem completa graficul și cu alte puncte de coordonate $(\frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12})$, $(\frac{5\pi}{12}, \sin \frac{5\pi}{12})$ etc. Unind punctele obținem **graficul funcției $\sin x$** .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

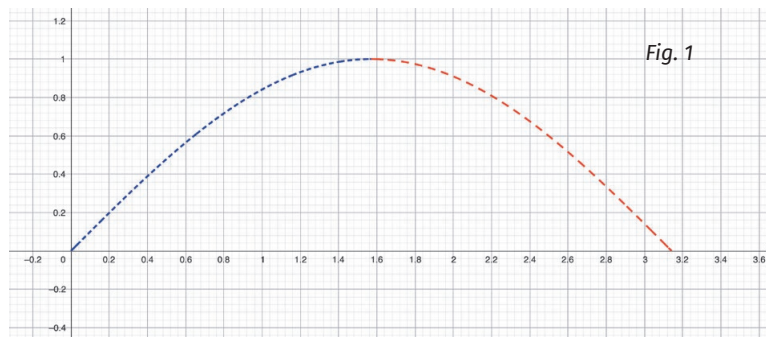


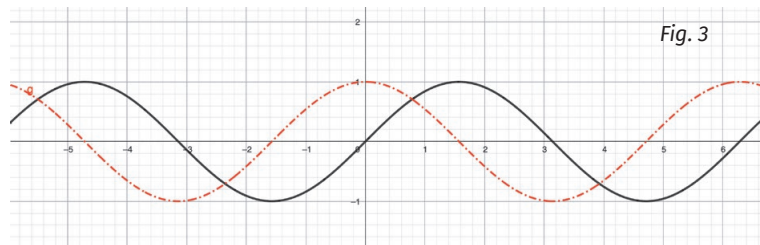
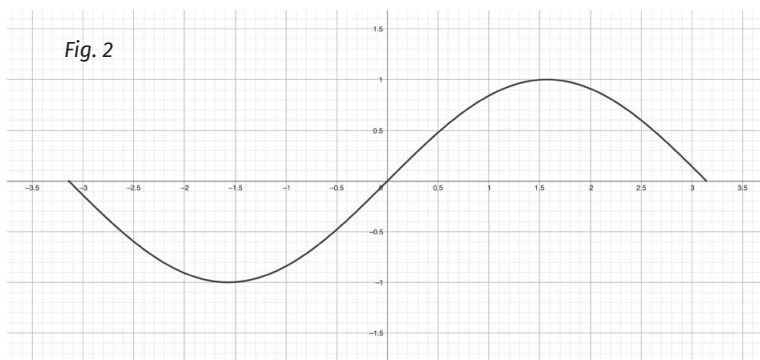
Fig. 1

Graficul din figura 2 este graficul funcției sinus pe intervalul $[-\pi, \pi]$, dedus din graficul anterior prin simetrie față de punctul O (am folosit imparitatea funcției sinus).

Graficul funcției sinus pe $\mathbb{R}$, se obține translătând graficul din figura 2 de-a lungul axei Ox (stânga, dreapta), deoarece sinus este periodică).

Graficul funcției sinus este numit și **sinusoidă**.

Asemănător, putem obține și graficul funcției cosinus. Putem însă să utilizăm și egalitatea $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ translătând sinusoida cu $\frac{\pi}{2}$, spre stânga (fig.3, graficul funcției cosinus reprezentant prin linia curbă punctată).



2. Lectura grafică

În afară de *periodicitate* și *simetrie* față de O , graficul funcției sinus admite *axe de simetrie* (de exemplu, $x = \frac{\pi}{2}$, dar aceasta nu este unică; explică!) și *centre de simetrie* (de exemplu punctul $(\pi, 0)$, nefiind unic).

Funcția sinus *nu este monotonă*, dar are *intervale de monotonie*. Astfel, pe fiecare dintre intervalele $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$, funcția sinus este *strict crescătoare*, iar pe fiecare dintre intervalele $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$, funcția sinus este *strict descrescătoare*. Într-unul din paragrafele următoare vom demonstra (riguros) aceste proprietăți.

De asemenea, pe fiecare dintre intervalele $[2k\pi, (2k + 1)\pi], k \in \mathbb{Z}$, funcția sinus este *concavă*, iar pe fiecare dintre intervalele $[(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi], k \in \mathbb{Z}$, funcția este *convexă*.

Funcția sinus *nu este injectivă*, dar este *surjectivă*.



IMPORTANT!

Restricția $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ este *bijectivă*, deci și *invertibilă* (fiind strict crescătoare și surjectivă; imaginea sa este intervalul $[-1, 1]$, egal cu codomeniul).

Asemănător, putem lectura graficul funcției cosinus pentru care considerăm studiul inițial la un același interval reprezentativ $[-\pi, \pi]$. Vom regăsi proprietățile sale importante.

3. Graficele funcțiilor tangentă și cotangentă

Funcția tangentă, fiind periodică de perioadă principală π , se comportă la fel pe orice interval de lungime π . Un interval *reprezentativ* poate fi considerat $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tangenta fiind impară. În baza unui tabel de valori pe $[0, \frac{\pi}{2})$, reprezentăm grafic aceste puncte. Unind punctele, apoi considerând simetria față de O și periodicitatea, putem obține **graficul funcției tangentă** ca cel reprezentat în figura 4.

Anterior a fost inclusă observația că, pe măsură ce x crește spre $\frac{\pi}{2}$, $\tan x$ crește nemărginit spre $+\infty$, apropiindu-se de dreapta verticală $x = \frac{\pi}{2}$. Spunem că $x = \frac{\pi}{2}$ este **asimptotă verticală** pentru graficul funcției tangentă. La fel, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$ etc. sunt asimptote verticale.

Asemănător, putem lectura **graficul funcției cotangentă**, axa Oy ($x = 0$) și dreptele $x = -\pi$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ fiind asimptote verticale, evidențiate și în figura alăturată.



Fig. 4

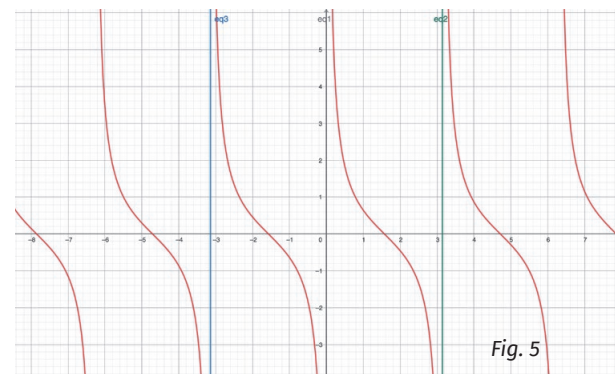


Fig. 5

Alte reprezentări grafice:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$.

a) Reprezintă grafic funcția f .

b) Lecturează grafic: imaginea funcției; numărul de soluții ale ecuației $f(x) = \frac{1}{2}, x \in [0, 3\pi]$. Determină intervalele de valori reale ale lui x în cazul $f(x) < 0$.

c) Reprezintă grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |f(x)|$. Precizează o perioadă a funcției g .

Rezolvare:

a) Graficul 6 este o sinusoidă traslată la stânga cu $\frac{\pi}{4}$.

b) Proiecția graficului pe axa Oy este $[-1, 1] = \text{Im}f$. Paralela la Ox , dusă printr-un punct de ordonată $\frac{1}{2}$, intersectează graficul în trei puncte pe $[0, 3\pi]$.

Graficul funcției f se află sub axa orizontală pe reuniunea intervalelor $(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

c) Graficul funcției g se obține din graficul funcției f , simetrizând față de Ox porțiunile aflate sub Ox . Observăm că o perioadă a funcției g este π . Din desen reiese că π este perioadă principală. Verifică!

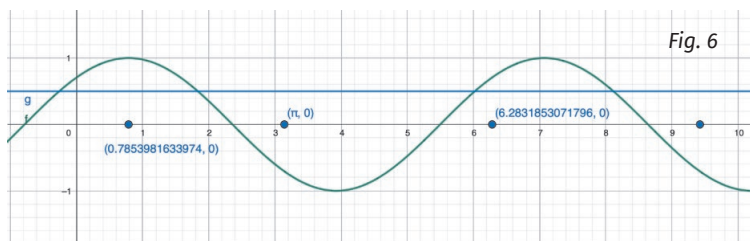


Fig. 6

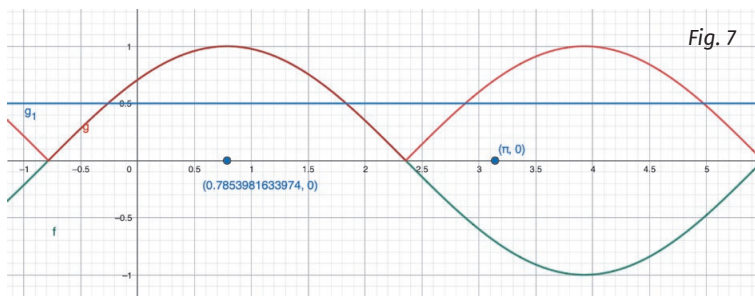


Fig. 7



EXERCITII PROPUSE

1. Reprezintă grafic funcțiile:

a) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\cos x$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

e) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctgx}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ -\cos x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin x|$;

d) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \pi x$;

f) $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}, x \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$.

2. În figura alăturată este reprezentat graficul cărei dintre funcțiile date de legile următoare:

a) x^2 ; b) $\operatorname{tg} x$; c) $\operatorname{tg}|x|$; d) $|\operatorname{ctg} x|$; e) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$?

3. Utilizând graficul funcției tg , compară numerele: $\operatorname{tg} 120^\circ$ și $\operatorname{tg} 2$.

4. Ordonează crescător numerele: $\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4$.

5. Ordonează descrescător numerele: $\sin 1, \sin 3, \cos 1, \cos 5$.

6. (Activitate pe grupe)

a) În același sistem de axe, reprezentați grafic funcțiile $|\sin x|$ și $|\cos x|$.

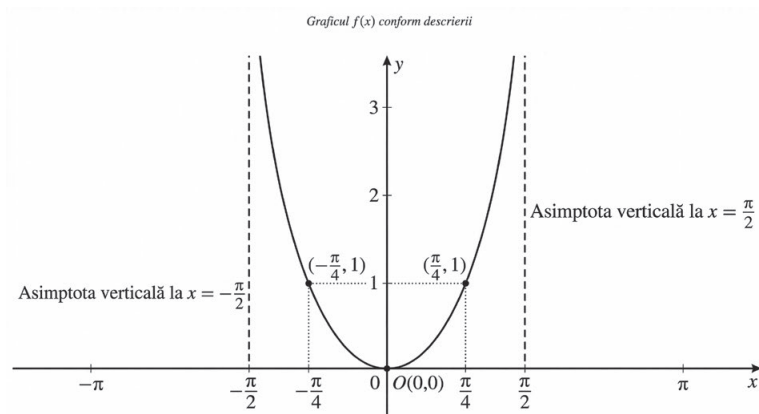
b) Utilizând reprezentarea grafică anterioară, stabiliți numărul soluțiilor ecuației $|\sin x| = |\cos x|, x \in (-\pi, 5\pi)$.

7. Demonstrează că $\sin(\cos x) < \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

8. Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, în cazurile: a) $f(x) = \max(\sin x, \frac{1}{2})$; b) $f(x) = \min(\cos x, \frac{1}{2})$.

9. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin x + 2f(\frac{\pi}{2}), \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Calculează $f(\frac{\pi}{2})$; b) Reprezintă grafic funcția.



Formule trigonometrice

A. Formule trigonometrice pentru suma și diferența unghiurilor



TEOREMĂ

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (1)$$

Demonstrație: Notăm M, N și P imaginile lui a, b , respectiv $a - b$ prin funcția de înfășurare pe cercul trigonometric. Atunci $A(1, 0)$, $M(\cos a, \sin a)$, $N(\cos b, \sin b)$, $P(\cos(a - b), \sin(a - b))$. Arcele MN și AP sunt egale, deci coardele $MN = AP$, de unde, utilizând formula distanței dintre două puncte*, obținem echivalent:

$$\begin{aligned} (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 &= (1 - \cos(a - b))^2 + (0 - \sin(a - b))^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 - 2\cos a \cos b - 2\sin a \sin b &= 2 - 2\cos(a - b) \Leftrightarrow \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}$$

*Reamintim formula distanței dintre două puncte date prin coordonate: în cazul $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$, $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Din formula cosinusului diferenței, deducem și formulele:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \quad (2)$$

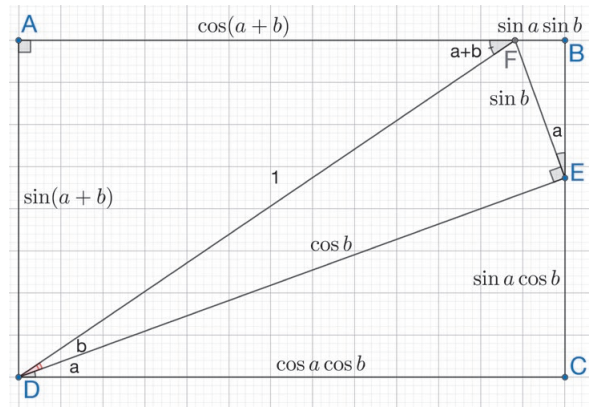
Demonstrație:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a - (-b)) = \\ &= \cos a + \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b; \\ \sin(a - b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

Reflecție: Observă cu atenție procedeul anterior și, prin analogie, dezvoltă demonstrația pentru cea de-a patra formulă, $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Desenul alăturat este o „demonstrație fără cuvinte” a acestor formule.

Urmărește $DE = 1$; $EB = \sin a \sin b$; $AB = DC$; $AD = BC$.



OBSERVAȚII

1. Acordă atenție reținerii corecte a formulelor! Sprijină-te pe reguli mnemotehnice.
2. Nu confunda $\cos(a - b)$ – cosinusul diferenței – cu $(\cos a - \cos b)$ – diferența cosinusurilor!
3. Formulele de reducere la cadranul I, deduse anterior, sunt cazuri particulare ale acestor formule.
4. Utilizând aceste formule, deducem valori exacte (exprimate prin radicali) și pentru alte arce remarcabile (fracții din π).



EXEMPLE

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \\ \text{b) } \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$



În trigonometrie, avem o expresie pe care o vom întâlni des, $f(x) = a \sin x + b \cos x$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Expresia $f(x)$ poate fi restrânsă la o formă utilă pentru studiul valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = a \sin x + b \cos x$. Pentru rescrierea expresiei, inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwarz* este sugestivă pe mulțimea numerelor reale: $(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$.

Astfel, $(a \sin x + b \cos x)^2 \leq (a^2 + b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow |f(x)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

Numărul obținut $\sqrt{a^2 + b^2}$ este o valoare importantă pentru funcție. Dând factor forțat $\sqrt{a^2 + b^2}$, obținem $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$. Deoarece $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, există $\varphi \in [0, 2\pi)$ astfel încât $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$ și $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$.

Folosindu-ne de formula sinusului de sumă, avem: $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ (*). Astfel, observăm că $\sqrt{a^2 + b^2}$ este valoarea maximă și $-\sqrt{a^2 + b^2}$ este valoarea minimă pentru funcția f . Justifică!

Vom folosi relația (*) în reprezentări grafice, rezolvări de ecuații și inecuații, dar o întâlnim și la fizică.

EXEMPLU

Legea de oscilație a unui punct material este dată sub forma $y(t) = 4(\sin 20t - \sqrt{3} \cos 20t)$. Studiem amplitudinea, perioada, pulsația și faza inițială (noțiuni explicate anterior).

Ecuația de mișcare poate fi restrânsă sub forma $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow y(t) = 8 \sin\left(20t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Rezultă $A = 8$; $\omega = 20$; $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10}$; $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Recomandare: Utilizează o aplicație digitală dedicată sau un asistent IA pentru a genera reprezentarea geometrică a graficului legii de oscilație date!

EXERCITII PROPUSE

1. Calculează:

a) $\cos 31^\circ \cos 1^\circ + \sin 31^\circ \sin 1^\circ$;

b) $\cos 29^\circ \cos 1^\circ - \sin 29^\circ \sin 1^\circ$;

c) $\sin 46^\circ \cos 14^\circ + \cos 46^\circ \sin 14^\circ$;

d) $\sin 74^\circ \cos 14^\circ - \sin 14^\circ \cos 74^\circ$.

2. Adu la o formă mai simplă expresiile următoare:

a) $\cos(x + y)\cos(x - y) - \sin(x + y)\sin(x - y)$; b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x$;

c) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; d) $\sin \frac{\pi}{21} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{21}$.

3. Calculează:

a) $\sin 75^\circ$; b) $\cos 15^\circ$; c) $\sin 105^\circ$; d) $\cos \frac{7\pi}{12}$; e) $\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{12}}{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{12}}$.

4. **(Activitate pe grupe)** Calculați independent, apoi discutați la nivel de grup strategiile utilizate:

a) $\cos(a + b + c)$; b) $\sin(a + b + c)$; c) $\frac{\cos(a + b + c) + \sin a \cos b \sin c + \sin b \cos a \sin c}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$;

d) $\frac{\sin(a + b + c) - \sin a \cos b \cos c}{\sin b \cos c - \sin c \cos b}$; e) $\frac{\sin(x + y) - 2 \sin x \cos y}{\cos(x + y) + 2 \sin x \sin y}$; f) $\frac{\cos(x - y) - 2 \sin x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$.

Pot fi toate expresiile anterioare definite pentru orice valori reale ale necunoscutelor ce intervin? Justificați.

5. Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin x = \frac{3}{5}$ și $\cos y = -\frac{24}{25}$, calculează:

$\sin(x + y)$; $\sin(x - y)$; $\cos(x + y)$; $\cos(x - y)$.

6. **(Activitate în pereche)** Verificați identitățile:

a) $\frac{\cos(a - b)}{\cos a \cos b} = 1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b$;

b) $\frac{\sin(a - b)}{\sin(a + b)} = \frac{1 - \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b}{1 + \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b}$.

Sunt aceste identități verificate pe întreaga mulțime a numerelor reale? Justificați.



7. Determină câte o relație între a și b , independentă de x , pentru fiecare dintre cazurile următoare:
 i) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a$ și $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b$; ii) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = a$ și $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = b$.
8. Rezolvă ecuația în mulțimea numerelor reale: $(\sin a \cos b)x^2 - (\cos(a - b))x + \sin b \cos a = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Implică rezolvarea ecuației discuție după valorile parametrilor a și b ? Explică.
9. Demonstrează prin inducție că, dacă $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < \frac{\pi}{2}$, atunci $\sin(a_1 - a_2) + \sin(a_2 - a_3) + \dots + \sin(a_{n-1} - a_n) \leq 0$, $\forall n \geq 2$.
10. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, demonstrează că:
 a) $|\cos(x - y)| \leq |\cos x| + |\cos y|$; b) $|\sin(x + y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$.
11. Demonstrează că $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq ax + b\sqrt{1 - x^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
12. a) Demonstrează egalitatea: $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x = \frac{1}{\sin 4x}$. Este aceasta verificată pentru orice x real? Explică.
 b) Calculează $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sin 2^k x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Precizează valorile lui x pentru care suma nu poate fi definită.
13. Demonstrează că triunghiul ABC pentru care $0 < \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B < 1$ este ascuțitunghic.
14. Știind că $a, b \in [-1, 1]$, demonstrează trigonometric: $\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.
15. Demonstrează că, dintre oricare șapte numere distincte din intervalul $[0, 1]$, se pot alege două, x și y , astfel încât: $0 \leq x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2} \leq \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

B. Formule trigonometrice pentru suma și diferența a două argumente (tangenta, cotangenta)

Completăm setul de formule studiat anterior cu o serie de formule pentru calculul tangentei (cotangentei) sumei și diferenței a două argumente.



TEOREMĂ

În condiții de bună definire a funcțiilor trigonometrice implicate și a rapoartelor prezente în expresiile date, avem:

$$\begin{aligned} (1) \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}; & (2) \operatorname{ctg}(a+b) &= \frac{\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}; \\ (3) \operatorname{tg}(a-b) &= \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}; & (4) \operatorname{ctg}(a-b) &= \frac{-\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b - 1}{-\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}. \end{aligned}$$

Demonstrație:

Este *suficient* (!) să demonstrăm formula (1).

$$\text{Astfel, } \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{(\cos a)(\cos b)(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)}{(\cos a)(\cos b)(1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b)} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}.$$

Demonstrarea celorlalte trei formule au la bază prima formulă și proprietățile de paritate/imparitate, respectiv legătura dintre tg și ctg . De exemplu, substituind pe b cu $-b$, obținem formulele pentru tangenta (cotangenta) diferenței.

OBSERVAȚIE

Aceste formule se aplică doar dacă expresiile au sens. De exemplu, $\operatorname{tg}(\pi/2 - a)$ are sens pentru orice $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dar dezvoltarea sa pe baza formulei (1) nu se poate face. Explică de ce!

Pe de altă parte, o rescriere este: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{ctg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$!



EXERCITII REZOLVATE

1. Știind că triunghiul ABC nu este dreptunghic, între tangentele unghiurilor triunghiului are loc relația:
 $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$.

Rezolvare: Din $A+B+C = \pi$, deducem $A+B = \pi - C$ și, aplicând formula (1), obținem

$$\operatorname{tg}(\pi - C) = \operatorname{tg}(A + B) \Leftrightarrow -\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B \Leftrightarrow \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Reținem! O astfel de identitate se numește *identitate condiționată*, în sensul în care variabilele sunt supuse uneia sau mai multor condiții.

2. Verifică faptul că $\operatorname{ctg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

$$\operatorname{Rezolvare:} \operatorname{ctg} 75^\circ = \operatorname{ctg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

3. Verifică identitățile:

$$\text{a) } \operatorname{tg} 3a = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}; \quad \text{b) } \operatorname{tg} 3a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - a\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + a\right) = \operatorname{tg} a; \quad \text{c) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{18}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\operatorname{Rezolvare:} \text{a) } \operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a + a) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}; \quad \operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(a + 2a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} 2a}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{tg} 3a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - a\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + a\right) &= \operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg} a}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg} a} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{tg} a}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg} a} = \\ &= \operatorname{tg} 3a \cdot \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 a} = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a} \cdot \frac{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a}{3 - \operatorname{tg}^2 a} = \operatorname{tg} a. \end{aligned}$$

$$\text{c) Folosește relația verificată la punctul b), înlocuind } a = \frac{\pi}{9}.$$



EXERCITII PROPUSE

- Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $y \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\sin x = 3/5$ și $\cos y = -1/2$, calculează:
 $\operatorname{tg}(x - y)$; $\operatorname{tg}(x + y)$; $\operatorname{ctg}(x - y)$; $\operatorname{ctg}(x + y)$.
- Calculează: $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
- Știind că $\operatorname{tg}(\pi/4 + x) = a$, calculează: $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
- Știind că $a + b + c = \pi/2$ și $3\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} c$, calculează $\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} c$.
- Verifică faptul că, dacă $A + B + C = \pi$, atunci $\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg} A = 1$.
- Demonstrează că: $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x$.
- Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \operatorname{tg} x$ nu este periodică.
- Demonstrează că: a) $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \operatorname{tg} 3a$; b) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$.
- (Activitate în pereche:** abordați cerințele individual, apoi comparați strategiile de rezolvare)
 a) Demonstrați că $\operatorname{tg} a - a < \operatorname{tg} b - b$ pentru $0 < a < b < \pi/2$.
 b) Demonstrați că funcția $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x - x$ este impară și crescătoare.
 c) Rezolvați ecuația: $\operatorname{tg} x - x - 1 = -\pi/4, x \in (-\pi/2, \pi/2]$.
- Demonstrează că: $\operatorname{tg} 55^\circ > 7/5$.



C. Funcțiile trigonometrice ale argumentului dublu

FORMULE FUNDAMENTALE

- (1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (sinusul dublului argumentului)
- (2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ (cosinusul dublului argumentului)
- (3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ (tangenta dublului argumentului)

FORMULE SUPLIMENTARE DEDUSE

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}; \quad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

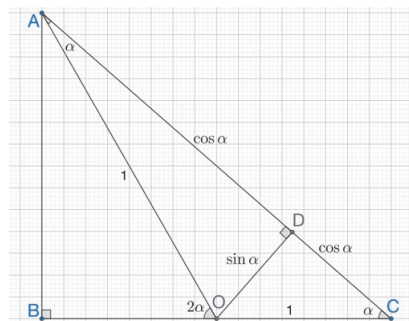
Formulele fundamentale se deduc ușor pornind de la rescrierea argumentului: $2\alpha = \alpha + \alpha$. Aplică formulele anterior introduse și finalizează demonstrația. Este important să reții procedeul.

Formulele suplimentare se deduc, de asemenea prin rescrierea argumentului. Pe grupe, discutați modul în care adaptați procedeul anterior și obțineți formulele.

OBSERVAȚIE

Prima formulă fundamentală poate fi interpretată ca o *demonstrație fără cuvinte*. Privește desenul din imaginea alăturată.

Calculând aria triunghiului AOC în două moduri, avem: $AO = 1$, $OC = 1$, $OD = \sin\alpha$, $AB = \sin 2\alpha$, $AC = 2DC = 2\cos\alpha$, $\operatorname{aria}(AOC) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.



EXERCITII REZOLVATE

1. Știind că $\sin x - \cos x = a$, calculează $\sin 2x$ și $\cos 4x$.

Rezolvare:

Ridicând la pătrat relația dată, $(\sin x - \cos x)^2 = a^2$, obținem $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = a^2$, deci $1 - \sin 2x = a^2$, adică $\sin 2x = 1 - a^2$.

Pentru $\cos 4x$, parcurge demonstrația următoare, justificând fiecare etapă parcursă:

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2(2x) = 1 - 2(1 - a^2)^2 = 1 - 2(1 - 2a^2 + a^4) = 1 - 2 + 4a^2 - 2a^4 = -1 + 4a^2 - 2a^4.$$

2. Demonstrează că: a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin x(1 - 2\sin^2 x) + \cos x(2\sin x \cos x) = \\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x = \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x) = \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x = \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x. \text{ Analog pentru } \cos 3x. \end{aligned}$$

3. Justifică și reține (valorile și procedeul de obținere a acestora au utilitate în diferite contexte):

$$\text{a) } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}; \quad \text{b) } \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Rezolvare:

a) Pornim de la identitatea $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$, pe care poți s-o justifici în baza formulelor învățate, având în vedere cazul particular pe care-l reprezintă suma argumentelor!

Obținem $2\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = 3\sin \frac{\pi}{5} - 4\sin^3 \frac{\pi}{5}$. Cum $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$, putem împărți prin $\sin \frac{\pi}{5}$ și obținem $2\cos \frac{\pi}{5} = 3 - 4\sin^2 \frac{\pi}{5} = 3 - 4(1 - \cos^2 \frac{\pi}{5})$, deci $4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$. Aceasta corespunde unei ecuații de gradul al II-lea, $4x^2 - 2x - 1 = 0$, verificată pentru $x = \cos \frac{\pi}{5}$. Soluțiile ecuației sunt:

$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Cum unghiul $\frac{\pi}{5}$ este în cadranul I, $\cos \frac{\pi}{5} > 0$. Alegem soluția pozitivă, $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

b) Folosim formula jumătății de argument, $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, de unde $\sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{5}}{2} = \frac{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{\frac{4 - 1 - \sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$. Deoarece $\sin \frac{\pi}{10} > 0$, obținem $\sin \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.



EXERCITII PROPUSE

- a) Știind că $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ și $\sin a = \frac{3}{5}$, calculează: $\sin 2a$; $\cos 2a$; $\tan 2a$.

b) Știind că $\tan \frac{x}{2} = -5$, calculează $\frac{\sin 2x + \tan x}{3 \sin x + \cos x}$.
- Știind că $a \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ și $\cos a = \frac{1}{3}$, calculează: $\cos 2a$; $\sin 4a$.
- Știind că $\sin x - \cos x = a$, calculează: $\sin 2x$; $\cos^2 2x$.
- Calculează:

a) $2 \cos^2 75^\circ - 1$; b) $2 \sin 7^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$; c) $1 - 2 \sin^2 135^\circ$; d) $(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$.
- (Activitate pe grupe)** Pe mulțimea numerelor reale și în condițiile de sens al operațiilor matematice, verificați identitățile:

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$; b) $\sqrt{1 + \sin 2x} = |\cos x + \sin x|$; c) $1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = \sin x$;

d) $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \cot x$; e) $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$; f) $\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$; g) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \frac{x}{2}$;

h) $1 - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$; i) $\frac{\sin 3x + \cos 3x}{\cos x + \sin x} = 1 - \sin 2x$; j) $\tan 5x - \tan x = 4 \cdot \frac{\sin x \cos 2x}{\cos 5x}$.

În care dintre cazuri identitățile sunt verificate pe submulțimi strict incluse în $\mathbb{R}$, dar nu și pe întreg $\mathbb{R}$?
- Calculează $\tan(2a - b)$, știind că $\tan a = \frac{1}{2}$ și $\tan b = \frac{1}{5}$.
- Calculează $\cot(a + 2b)$, știind că $\tan a = -\frac{3}{4}$ și $\cos b = -\frac{1}{2}$, oricare $a, b \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- Știind că $\tan x = 2$, calculează: $\sin 2x$; $\cos 2x$; $\sin 4x$, $\cos 4x$.
- Exprimă în funcție de $\tan x/2$ expresiile: $E = \frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$, $F = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$, $G = \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + \cos x}$. Dă exemplu de câte o valoare a variabilei x pentru care expresiile nu pot fi definite.
- Demonstrează că:

a) $\cos 2x + 2 \sin^2 x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; b) $\sin^2 x - \sin^4 x \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $\cos^2 x + \sin 2x \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\forall x \in \mathbb{R}$; d) $\tan \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- Știind că $2 \sin x - 3 \cos x + 1 = 0$, $x \in (0, \pi)$, calculează: $\tan \frac{x}{2}$; $\cos x$.
- a) Demonstrează că $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$; b) Calculează $\sum_{k=1}^n 2^k \cot 2^k x$.
- Demonstrează că $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, folosind eventual și lectura grafică pe cercul trigonometric!
- Determină $a, b \in \mathbb{R}$, știind că: $\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = a \sin 80^\circ$ și $8 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} = b \frac{\sin \frac{8\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}$.
- Demonstrează: a) $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$, $a, b > 0$; b) $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$, unde $a > b > 0$.
- Demonstrează că: a) $\sin 1^\circ \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b) $\cos 1^\circ \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Fără a apela la calculator, află prima zecimală a numărului $a = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ$.



D. Formule trigonometrice ale jumătății de arc

Din formula cosinusul argumentului dublu se obțin: $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$; $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$.
Semnul + sau - îl alegem în funcție de cadranul în care se află $\frac{x}{2}$.

În plus, prin raport obținem: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$; $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$.

Atenție! Dacă pentru sinus și cosinus formulele sunt verificate pe întreaga mulțime a numerelor reale, în cazul tangentei și cotangentei trebuie să acorzi atenție ca raportul să aibă sens!

Alte formule utile (în care nu apar radicali): $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. Pentru ce valori ale argumentului x putem valida formulele?

Demonstrație:

Pe de o parte, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. Pe de altă parte, $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.



EXEMPLE DE APLICARE A NOILOR FORMULE

$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$. Am calculat anterior $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$. Care calcul pare mai avantajos?

$\frac{\sin \pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-1)}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\cos \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$, unde am ținut cont că $\frac{5\pi}{8}$ este în cadranul al doilea!

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{1 + \cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$



EXERCITII PROPUSE

1. Calculează $\sin \frac{x}{2}$ și $\cos \frac{x}{2}$ în următoarele cazuri:

- a) $\sin x = \frac{5}{6}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$; b) $\sin x = \frac{12}{13}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$;
c) $\cos x = -\frac{2}{3}$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right)$; d) $\cos x = \frac{1}{5}$, $x \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2} \right)$.

2. Calculează: a) $\cos \frac{\pi}{12}$; b) $\cos \frac{\pi}{24}$; c) $\sin \frac{\pi}{24}$; d) $\operatorname{tg}^2 7^\circ 30'$; e) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8}$.

3. a) Calculează $\cos(60^\circ - 45^\circ)$ cu formula $\cos(a - b)$, respectiv $\cos \frac{30^\circ}{2}$ cu formula arcului pe jumătate.

b) Demonstrează că $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} \in \mathbb{N}$.

4. Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ și $\sin x = \frac{2}{3}$, calculează $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right)$.

5. Știind că $(1 - \cos a)(1 - \cos b)(1 - \cos c) = \sin a \sin b \sin c$, calculează $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{c}{2}$.

6. Calculează: a) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$; b) $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12}$.

7. Precizând condițiile în care expresiile au sens, verifică faptul că:

a) $\cos^4 x + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos^4 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{9}{8}$, pentru orice x real;

b) $\cos^4 10^\circ + \cos^4 50^\circ + \cos^4 70^\circ = \frac{9}{8}$;

c) $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2}}{1 + \cos \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{4}}{1 + \cos \frac{a}{4}} = \operatorname{tg} \frac{a}{8}$.

8. Calculează $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$.





E. Transformarea sumelor în produse. Transformarea produselor în sume

I. Transformarea sumelor în produse.

Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, avem următoarele formule:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \operatorname{tga} + \operatorname{tgb} &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin a - \sin b &= 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \operatorname{tga} - \operatorname{tgb} &= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{aligned}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= \sin \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \right) + \sin \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}. \\ \operatorname{tga} + \operatorname{tgb} &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}. \end{aligned}$$

Analog se demonstrează și celelalte formule. Verifică!

II. Transformarea produselor în sume

Formulele de la I. se pot rescrie astfel:

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \end{aligned}$$



EXERCITII REZOLVATE

1. Scris ca produs expresia $\sin x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: $\sin x + \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x}{2}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

Raționamente alternative: $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sau $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right).$

Discutați în perechi fiecare dintre raționamente, justificând fiecare pas.

2. Demonstrează că restricția funcției sinus la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este strict crescătoare.

Rezolvare: Fixăm $x < y$, $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și examinăm semnul diferenței $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ (1)

Observăm că $\frac{x+y}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deci $\cos \frac{x+y}{2} > 0$ și $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} < 0$, deci $\sin \frac{x-y}{2} < 0$. Revenind la (1) obținem $\sin x < \sin y$. Demonstrează asemănător că restricția funcției sinus la $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ este monoton descrescătoare.

3. a) Demonstrează că $\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \sin 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrează că $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ \sin 130^\circ \sin 140^\circ = \frac{\sqrt{3}}{64}$.

Rezolvare:

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{3} - \cos(2x + \pi)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 2x \right) = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x) = \frac{1}{4} (3 - 4 \sin^2 x).$

Obținem $\frac{1}{4} \sin x (3 - 4 \sin^2 x) = \frac{1}{4} \sin 3x$.

b) Scriem egalitatea de la punctul a) pentru $x = 10^\circ$ și $x = 20^\circ$ și apoi înmulțim cele două egalități.

4. Demonstrează că:

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \dots + \cos(x+nr) = \frac{1}{\sin \frac{r}{2}} \sin \frac{(n+1)r}{2} \cos\left(x + \frac{nr}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, r \neq 2k\pi$$

Rezolvare: Înmulțim suma din membrul stâng cu $2\sin \frac{r}{2}$, apoi transformăm produsele în sume.

$2S \sin \frac{r}{2} = 2\sin \frac{r}{2} \cos x + 2\sin \frac{r}{2} \cos(x+r) + \dots + 2\sin \frac{r}{2} \cos(x+nr) = \sin\left(x + \frac{(2n+1)r}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{r}{2}\right)$ (după reduceri). Transformăm ultima diferență în produs și împărțim la $2\sin \frac{r}{2}$. Verifică!

(Activitate în pereche)

Deduceți asemănător: $\sin x + \sin(x+r) + \dots + \sin(x+nr) = \frac{1}{\sin \frac{r}{2}} \sin \frac{(n+1)r}{2} \sin\left(x + \frac{nr}{2}\right)$.

Caz particular: pentru $x = 0$, avem $1 + \cos r + \cos 2r + \dots + \cos nr = \frac{1}{\sin \frac{r}{2}} \sin \frac{(n+1)r}{2} \cos \frac{nr}{2}, r \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5. Calculează (restrânge) suma: $\sin r + 2\sin 2r + 3\sin 3r + \dots + n\sin nr = \left(\sum_{k=1}^n k \sin(kr)\right), r \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Utilizăm identitatea lui Abel (prezentată la inducția matematică):

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (b_1 - b_2) S_1 + (b_2 - b_3) S_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n) S_{n-1} + b_n S_n,$$

unde $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\text{Alegem } b_k = k \text{ și } S_k = \sin r + \sin 2r + \dots + \sin kr = \frac{1}{\sin \frac{r}{2}} \left(\sin \frac{(2k+1)r}{2} + \sin \frac{r}{2} \right).$$

Deoarece $b_k - b_{k+1} = -1, (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, suma cerută va fi egală cu: $-S_1 - S_2 - \dots - S_{n-1} + n \cdot S_n =$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)r}{2} + (n-1) \sin \frac{r}{2}\right) \frac{1}{\sin \frac{r}{2}} + n(\sin r + \sin 2r + \dots + \sin nr).$$

$$\text{Însă } \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)r}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(kr + \frac{r}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (\sin kr \cos \frac{r}{2} + \cos kr \sin \frac{r}{2}) =$$

$$= \left(\cos \frac{r}{2}\right)(\sin r + \sin 2r + \dots + \sin(n-1)r) + \left(\sin \frac{r}{2}\right)(\cos r + \cos 2r + \dots + \cos(n-1)r).$$

Argumentează fiecare pas al demonstrației, pentru a fi sigur că ai înțeles, apoi finalizează!!

**EXERCITII PROPUSE**

1. Transformă în produs: a) $\sin 15^\circ + \sin 55^\circ$; b) $\sin 40^\circ - \sin 20^\circ$; c) $\cos 49^\circ - \cos 41^\circ$; d) $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{13\pi}{7}$.

2. Stabilește semnul numerelor următoare:

a) $\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5}$; b) $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{7}$; c) $\sin 1 + \sin 5$; d) $\cos 1 + \cos 5$.

3. Scrie ca produs:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$; b) $\sin x - \cos x$; c) $1 - \cos 2x + \sin 2x$; d) $1 + \cos 2x - \sin 2x$;
e) $\cos(a+b+c) + \cos(-a+b+c) + \cos(a-b+c) + \cos(a+b-c)$.

4. **(Activitate pe grupe)** Demonstrați egalitățile:

a) $\frac{2\cos 20^\circ - 1}{\sqrt{3} + 2\sin 40^\circ} = 2\sin 10^\circ \operatorname{tg} 40^\circ$; b) $\frac{1 + \sqrt{2} \sin 5^\circ}{1 - \sqrt{2} \sin 5^\circ} = \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ$.

5. **(Activitate pe grupe)** Verificați că:

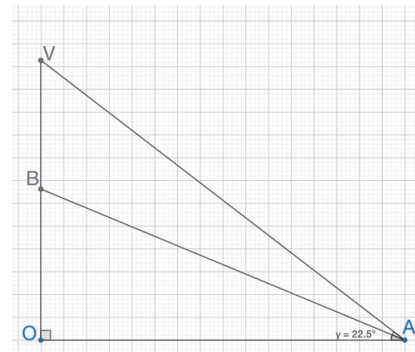
a) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos x + \cos 3x} = \operatorname{tg} x$; b) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x$; c) $\frac{\cos x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 5x}{\sin x + \sin 2x + \sin 4x + \sin 5x} = \operatorname{ctg} 3x$;
d) $\frac{\cos x + \cos y}{\sin x \cos y + \sin y \cos x} = \frac{\cos \frac{x-y}{2}}{\sin \frac{x+y}{2}}$; e) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin(x+y) \sin(y-x)$.

6. Transformă în sumă: a) $\sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18}$; b) $\cos 30^\circ \cos 40^\circ$; c) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{9}$; d) $\cos 70^\circ \sin 20^\circ$.

7. Pe mulțimea numerelor reale, demonstrează că:

a) $\sin x \sin 3x + \sin x \sin 5x + \cos 2x \cos 8x = \cos 4x \cos 6x$;
b) $\sin x \cos 4x + \sin 2x \cos 7x + \sin 3x \cos 12x = \sin 6x \cos 9x$.

8. Demonstrează că tangenta este funcție strict crescătoare pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Compară strategia ta cu a colegului.
9. a) Demonstrează că $\frac{1}{\sin 2kx} - \frac{1}{\sin(2k+2)x} = \frac{2\sin x \cos(2k+1)x}{\sin 2kx \sin(2k+2)x}$, precizând toate condițiile pentru buna definire a expresiilor.
b) Calculează: $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k+1)x}{\sin 2kx \sin(2k+2)x}$ și $\sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{\cos 2kx \cos(2k+2)x}$.
10. Verifică faptul că: a) $4\cos(x - \frac{\pi}{3})\cos x \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x$; b) $\cos 35^\circ \cos 25^\circ \cos 85^\circ < \frac{1}{4}$.
11. Transformă în produs:
a) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c)$; b) $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2(a + b + c)$;
c) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg}(a + b + c)$.
12. Știind că $x = y + z$, demonstrează că:
a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z$; b) $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$.
13. a) Demonstrează că funcția $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \cos x$ este strict crescătoare.
b) Rezolvă ecuația: $x - \cos x + \sin x = \frac{\pi}{4}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
14. Vârful unui brad a fost rupt de o furtună. Partea ruptă are 2 m, iar înainte de furtună bradul era văzut dintr-un punct A, situat în același plan orizontal cu baza bradului, sub un unghi de $37^\circ 30'$. Dacă după furtună porțiunea rămasă din brad se vede sub un unghi de $22^\circ 30'$, determină înălțimea bradului rămas.
15. Demonstrează că, dacă în $\triangle ABC$ avem $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$, atunci triunghiul este echilateral.
16. Demonstrează că:
a) $\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in [0, \pi]$;
b) $\frac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII

IA la tribunal: A demonstrat sau doar a convins?

Un sistem de inteligență artificială primește cerința:

„Demonstrează că $4\cos(x - \frac{\pi}{3})\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x$ și generează o soluție elegantă.”

Elevii citesc explicația și spun: „Pare corect.”

Întrebare: Este suficient că o demonstrație pare convingătoare?

Analizează:

1. Cum verifici că fiecare pas este valid?
2. Dacă un singur pas este greșit, poate concluzia finală să fie adevărată?
3. O demonstrație corectă trebuie să fie: • scurtă? • elegantă? • completă?
4. Care este diferența dintre: • verificare; • încredere?

Ideea mare: În matematică nu contează cine afirmă ceva.

Contează dacă argumentul rezistă verificării.



Funcții trigonometrice inverse

Atenție! În cele ce urmează, utilizăm sintagma inversa funcției sinus (cosinus, tangentă, cotangentă), însă, în realitate ne vom referi la inversa restricției bijective a fiecăreia dintre aceste funcții.

A. Inversa funcției sinus

Din observațiile făcute la reprezentările grafice ale funcțiilor trigonometrice, ecuația $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$ are o infinitate de soluții reale, dar o singură soluție în intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Așadar, funcția $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ este *injectivă*, *surjectivă*, deci *bijectivă*, precum și *inversabilă*. În plus, anterior am demonstrat că restricția funcției sinus la $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ este *strict monotonă*, justificând astfel injectivitatea.



RETINEM

Unica soluție $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a ecuației $\sin x = a$ se notează *arcsina*. Pentru orice $a \in [-1, 1]$, **arcsina** este acel unic număr x din intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pentru care $\sin x = a$.



EXEMPLE

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \text{ deoarece } \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ deoarece } -\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Atenție: $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dar $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{3\pi}{4}$. Explică!

În același sens, **inversa funcției sin**: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ există și este notată *arcsin*. Așadar $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Din definiție, avem identitatea $\sin(\arcsin x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$.

De asemenea, avem $\arcsin(\sin x) = x$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (1). Însă expresia $\arcsin(\sin x)$ poate fi definită pe întreaga mulțime a numerelor reale, dar doar pe $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ relația (1) este corectă.

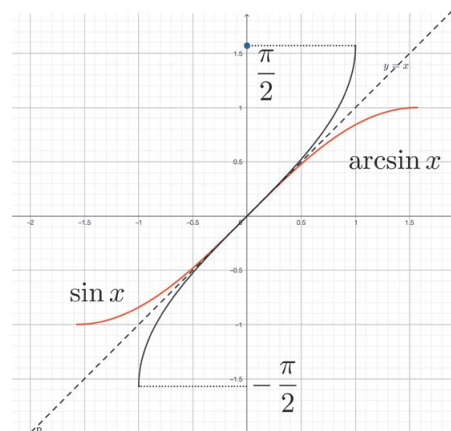
Funcția *arcsin* are proprietățile funcției directe: *strict crescătoare*, *injectivă*, *surjectivă*, *bijectivă*, *inversabilă*, iar inversa ei este sinus. În plus, deoarece funcția directă este impară, atunci și funcția *arcsin* este *impară*.

Graficele funcțiilor $\sin$ și $\arcsin$ sunt *simetrice față de prima bisectoare a sistemului de axe*, dreapta $y = x$ (rezultat cunoscut din capitolele anterioare). Proprietățile funcției *arcsin* pot fi identificate prin lectură grafică pe imaginea alăturată. La fel și următoarele caracteristici:

- $\sin x = \arcsin x \Leftrightarrow x = 0$;
- $\arcsin x > x$, pentru $x \in (0, 1]$ (graficul este deasupra primei bisectoare);

Observație: Cum $\sin x < x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \arcsin(\sin x) < \arcsin x \Leftrightarrow x < \arcsin x$ (din monotonia funcției *arcsin*).

- $\arcsin x < x$, $\forall x \in [-1, 0)$ (graficul funcției *arcsin* se află sub $y = x$);
- funcția *arcsin* este *strict convexă* pe $[0, 1]$ și *strict concavă* pe $[-1, 0]$;
- funcția *arcsin* nu este periodică;
- dacă $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin x)$ are sens, dar nu este x decât pentru $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



(Activitate pe grupe)

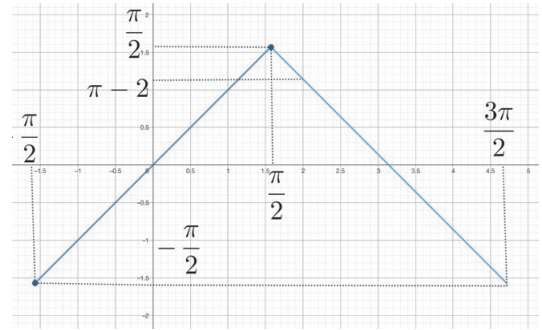
Discutați și construiți o strategie prin care să demonstrați că $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Puteți ține cont că, în ipotezele date, $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, iar $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Observație: Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$ este periodică, de perioadă 2π (perioada funcției $\sin$). Deci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Alăturat este desenat graficul restricției funcției f la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Desenați graficul pe $\mathbb{R}$. Lecturați grafic proprietățile posibile.

În particular, $\arcsin(\sin 2) = \pi - 2 \neq 2$! Justificați!



B. Inversa funcției cosinus

Considerente asemănătoare celor de la funcția $\arcsin$ conduc și la noțiunea de *inversă pentru cosinus*. Funcția cosinus este *strict monotonă* (deci și *injectivă*) pe intervalul $[0, \pi]$ și $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ (din reprezentarea grafică sau prin lectură pe cercul trigonometric). Rezultă că restricția $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ este *bijectivă*, deci *inversabilă*. Inversa acesteia se notează $\arccos$.

În concluzie, funcția $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, pentru care $\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$ și $x \in [0, \pi]$ este *inversa restricției funcției cosinus*.

EXEMPLE

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ pentru că } \frac{\pi}{6} \in [0, \pi] \text{ și } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \text{ pentru că } \frac{5\pi}{6} \in [0, \pi] \text{ și } \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

REȚINEM

- numărul $\arccos y$ este pozitiv;
- $\cos(\arccos x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$;
- $\arccos(\cos x) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$;
- funcția $\arccos$ este *descrescătoare* (ca și cosinus);
- funcția $\arccos$ este *injectivă*, *surjectivă*, *bijectivă*, *inversabilă* și inversa ei este cosinus;
- funcția $\arccos$ nu este nici pară, nici impară, nu este periodică;
- $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ ($\forall a \in [-1, 1]$);

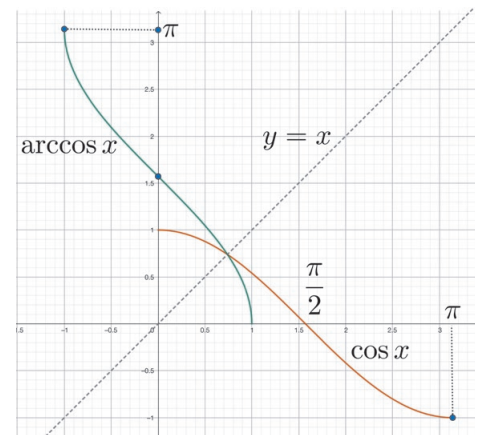
Într-adevăr, ambii membri aparțin intervalului de bijectivitate $[0, \pi]$, iar egalitatea este echivalentă cu $\cos(\arccos(-a)) = \cos(\pi - \arccos a) \Leftrightarrow -a = -\cos(\arccos a) \Leftrightarrow -a = -a$.

● ca și între $\sin$ și $\cos$, între funcțiile $\arcsin$ și $\arccos$ avem o legătură importantă: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$. Într-adevăr, egalitatea este echivalentă cu $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \Leftrightarrow \sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Leftrightarrow x = \cos(\arccos x) \Leftrightarrow x = x$.

Justifică de ce primele două egalități sunt echivalente!

Graficul funcției $\arccos$ se obține din graficul funcției $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, prin simetrie față de prima bisectoare. Lecturați grafic proprietățile funcției $\arccos$, folosind imaginea alăturată.

Reflecție: Folosind aplicații digitale sau un asistent IA, reprezintă grafic funcția $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos(\cos x)$. Observă particularitățile acestuia!



C. Inversa funcției tangentă. Inversa funcției cotangentă

$\operatorname{tg}:(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă, deci inversabilă. **Inversa funcției tangentă** este $\operatorname{arctg}:\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, unde $\operatorname{arctg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = y$ și $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\operatorname{ctg}:(0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă, deci inversabilă. **Inversa funcției cotangentă** este $\operatorname{arcctg}:\mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, unde $\operatorname{arcctg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = y$ și $x \in (0, \pi)$.

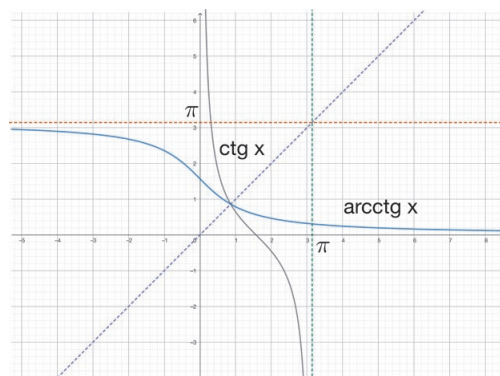
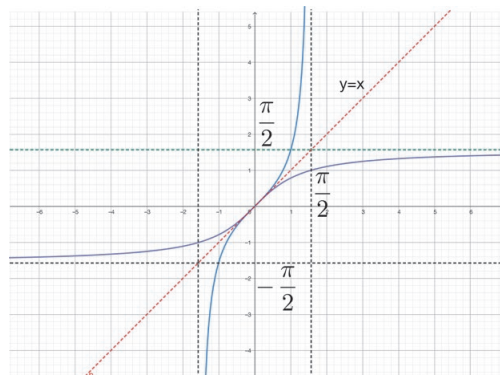
Proprietăți de bază:

- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, $x \in (0, \pi)$
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

Proprietăți (în corelație cu reprezentarea graficelor acestor funcții)

- arctg este *monoton crescătoare*;
- arctg este *mărginită*;
- $y = \frac{\pi}{2}$ și $y = -\frac{\pi}{2}$ sunt asimptote orizontale ale graficului;
- arctg este *impară*;
- arcctg este *monoton descrescătoare*;
- arcctg este *mărginită*;
- $y = 0$ și $y = \pi$ sunt asimptote orizontale;
- arcctg nu este *nici pară, nici impară*;
- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrația formulei de mai sus este asemănătoare cu cea a identității $\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$. Justifică!



EXERCITII REZOLVATE

1. Calculează $\cos(\operatorname{arcsin} x)$ și $\sin(\operatorname{arccos} x)$, $x \in [-1, 1]$.

Rezolvare:

$\cos^2(\operatorname{arcsin} x) + \sin^2(\operatorname{arcsin} x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\operatorname{arcsin} x) = 1 - x^2 \Rightarrow \cos(\operatorname{arcsin} x) = +\sqrt{1 - x^2}$ (deoarece $\operatorname{arcsin} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Analog $\sin(\operatorname{arccos} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

2. Calculează $\sin(\operatorname{arctg} x)$ și $\cos(\operatorname{arctg} x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Cum $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ (justifică!), înlocuind $x \rightarrow \operatorname{arctg} x$, vom obține $\sin^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \Rightarrow \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ (deoarece x și $\operatorname{arctg} x$ au același semn). Verifică faptul că $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3. a) Calculează $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} \frac{1}{4})$; b) Demonstrează că $2\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare:

a) Folosim formula $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, pentru $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$. Rezultă $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} \frac{1}{4}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$.

b) Membrul stâng aparține $(0, \frac{\pi}{2})$. Justificare: $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} > 0$; $\operatorname{arctg} \frac{7}{23} > 0$, deci suma lor este pozitivă. Din monotonie avem: $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} < \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{4} < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2\operatorname{arctg} \frac{1}{4} < \frac{\pi}{3}$ (1). De asemenea, $\operatorname{arctg} \frac{7}{23} < \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{7}{23} < \frac{\pi}{6}$ (2). Din (1) și (2), prin însumare, deducem că membrul stâng aparține intervalului $(0, \frac{\pi}{2})$, care este interval de injectivitate pentru funcția tg . Prin urmare egalitatea dată este echivalentă cu

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} \frac{1}{4}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{7}{23})}{1 - \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} \frac{1}{4}) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{7}{23})} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{8}{15} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{23}} = 1 \Leftrightarrow \frac{289}{289} = 1.$$

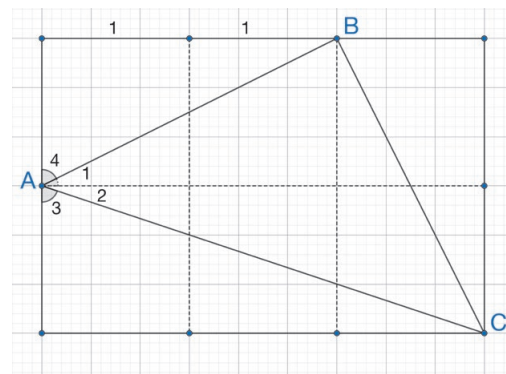
Reflecție: Poți verifica „geometric” identitățile următoare, având la dispoziție și imaginea alăturată!

a) $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$;

b) $\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \pi$;

$AB = BC$, $\sphericalangle BAC = 45^\circ$, $\sphericalangle BAC + \sphericalangle A_3 + \sphericalangle A_4 = \pi$,

$\tg A_1 = \frac{1}{2}$, $\arctg \frac{1}{2} = A_1$; $\tg A_3 = 3$, $\arctg 3 = A_3$.



REȚINEM

Atenție asupra echivalenței $a = b \Leftrightarrow \text{triga} = \text{trig}b$ (unde *trig* este oricare dintre funcțiile trigonometrice directe). Echivalența nu are loc dacă a și b nu aparțin unui interval de bijectivitate al funcțiilor trigonometrice.

EXERCITII PROPUSE

1. Calculează:

a) $\arcsin 0$; b) $\arcsin(-1)$; c) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; d) $\arctg \sqrt{3}$;

e) $\arctg(-\sqrt{3})$; f) $\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; g) $\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. Calculează:

a) $\tg(\arcsin x)$; b) $\tg(\arccos x)$; c) $\ctg(\arcsin x)$; d) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$, $x \in [-1, 1]$;

e) $\tg\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$, $x \in [-1, 1]$; f) x , știind că $\arctg \frac{1}{5} + \arctg x = \frac{\pi}{2}$.

3. **(Activitate pe grupe: abordare individuală, urmată de discuții la nivel de grup și formularea de concluzii)**

a) Demonstrați că $\sin(\arcsin \sqrt{1-x^2} + \arccos x) = 0$, $x \leq 0$.

b) Este adevărată egalitatea $\arcsin \sqrt{1-x^2} + \arccos x = \pi$, $x \leq 0$?

4. Verifică faptul că:

a) $\arcsin \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} = \arctg 7$; b) $2\arctg 2 + \arcsin \frac{4}{5} = \pi$; c) $\arccos \frac{4}{5} + \arctg \frac{7}{24} = \arctg \frac{4}{3}$.

5. a) Demonstrează că $\arctg(k+1) - \arctg k = \arctg \frac{1}{1+k+k^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Calculează: $\sum_{k=1}^n \arctg k$; $\sum_{k=1}^n \arctg(1+k+k^2)$.

6. Reprezintă grafic funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg(\tg x)$, unde $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. Demonstrează că funcția $\sin: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ este inversabilă, apoi determină inversa acesteia.

8. **(Activitate în pereche)** Rezolvați ecuațiile: a) $\arcsin x = \arccos x$; b) $\arcsin 2x - \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.

Diferă strategiile de rezolvare? Dacă da, prin ce?

9. Determină mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin(\sin x) = x\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin(\sin x) = x + 8\pi\}$

b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \arccos(\cos x) = 2\pi - x\}$

10. Determină domeniul maxim de definiție al următoarelor funcții:

a) $\arcsin \frac{1}{x}$; b) $\arccos(2x - x^2)$; c) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; d) $\arccos \frac{x}{x+2}$.

11. Demonstrează că $\arcsin(\sin x) = \arccos(\cos x) \Leftrightarrow \sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$.

Ecuatii trigonometrice

A. Ecuatii trigonometrice fundamentale

O ecuație trigonometrică este o ecuație în care necunoscutele apar ca argument al unor funcții trigonometrice.

Ecuațiile: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ se numesc **fundamentale** (ecuații la care se reduce orice ecuație trigonometrică).



● Ecuația $\sin x = a$, $x \in \mathbb{R}$

Ecuația are soluții dacă și numai dacă $a \in [-1, 1]$. Explică!

► Pe intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ecuația are soluție unică $x = \arcsin a$.

► Pe intervalul $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, ecuația are soluție unică $x = \pi - \arcsin a$.

Ținând cont de periodicitatea funcției sinus, obținem mulțimea soluțiilor pe $\mathbb{R}$:

$$\sin x = a \Leftrightarrow x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

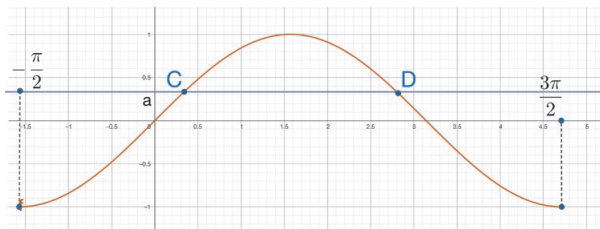
$$\text{de unde } \sin x = a \Leftrightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1)$$

Analog pentru:

● $\cos x = a \Leftrightarrow x \in \{\pm \arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

● $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x \in \{\arctg a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (2)$

● $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x \in \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$



EXEMPLE REZOLVATE

$$\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{\arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \{\pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x \in \{\operatorname{arctg}(-1) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

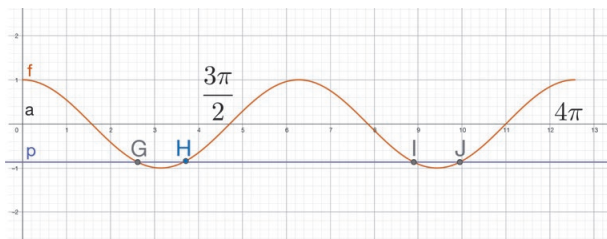
Atenție: În cazul în care se cere rezolvarea ecuației $\sin x = a$ într-un anumit interval I , atunci mulțimea de soluții se obține intersectând cu I mulțimile anterioare.



EXEMPLU

Pentru $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [0, 4\pi]$, obținem $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$. Soluțiile vor fi: $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$; $x_3 = \pi - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}$; $x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3}$.

Observație: ultima ecuație o putem rezolva și „fără” a apela la cazul general al ecuației fundamentale, deoarece $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ este o valoare remarcabilă. Pe cercul trigonometric, sinusul este negativ în cadranele III și IV; $x'_1 = x_3 = \frac{4\pi}{3}$ și $x'_2 = x_4 = \frac{5\pi}{3}$ sunt soluții ale ecuației. Celelalte soluții se obțin adăugând un multiplu de 2π (convenabil!). Numărul soluțiilor se poate deduce și prin lectură grafică.



B. Ecuatiile trigonometrice de forma: $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$

Din formulele (1) și (2) obținem:

- $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi$ sau $f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



EXEMPLE REZOLVATE

1. Pentru $\sin(3x - 1) = \sin x, x \in \mathbb{R}$, avem $3x - 1 = x + 2k\pi \Leftrightarrow 2x = 1 + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1 + 2k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
2. Pentru $\sin x = \cos x, x \in (0, 2\pi)$, avem echivalent $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \pm x + 2k\pi$. Alegem $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât soluțiile să aparțină $(0, 2\pi)$. Obținem $x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{5\pi}{4}$.
3. În cazul ecuației $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$, membrul drept ne sugerează o formulă de trigonometrie: $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$. Pentru a asigura buna definire (sensul), impunem condițiile de existență (1):

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 4x^3 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$$
 Cum există și este unic $t \in [0, \pi]$ astfel încât $x = \cos t$, ecuația devine (2): $|\sin t| = \cos 3t \Leftrightarrow \sin t = \cos 3t$ (deoarece $\sin t \geq 0$ pe intervalul $[0, \pi]$). Examinând semnul funcției $\cos$ pe cercul trigonometric, condițiile de existență (1) revin la $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Ecuația (2) se scrie echivalent: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos 3t \Rightarrow \frac{\pi}{2} - t = \pm 3t + 2k\pi$. Convine doar $t = \frac{\pi}{8}$, ecuația inițială admitând $\cos \frac{\pi}{8}$ ca soluție unică. Verifică!
4. **Aplicație practică (mareele).** Următoarele formule erau utilizate de navigatori pentru a afla înălțimile mareelor: $\Delta H_t = M_a \cdot \sin^2\left(\frac{90t}{D}\right)$, unde $\frac{90t}{D}$ este măsurat în grade.
 - M_a = amplitudinea mării (diferența de nivel între marea înaltă și cea joasă, în metri)
 - D = durata (intervalul de timp între marea înaltă și cea joasă)



Problemă: Într-un port maritim se știe că la ora 15 marea are 8 m (înălțimea maximă). La ora 20:30 marea are 2,6 m (înălțimea minimă). La ce oră nivelul apei va fi 6,4 m?

Rezolvare: $D = 20:30 - 15:00 = 5h30' = 5,5 h$; $M_a = 8 - 2,6 = 5,4$ m; $\Delta H_t = 8 - 6,4 = 1,6$ m.

Obținem ecuația: $1,6 = 5,4 \cdot \sin^2\left(\frac{90t}{5,5}\right)$, de unde $\sin\left(\frac{90t}{5,5}\right) = \sqrt{\frac{1,6}{5,4}} \Rightarrow t \approx 2$ ore. Marea fiind în scădere, ora căutată este $15 + 2 = 17:00$. Prin urmare, numai anumite vase maritime se pot afla în zonă în jurul orei 17.

C. Ecuatii reducibile la ecuații algebrice

Prin substituții, unele ecuații trigonometrice se reduc la ecuații algebrice (de diverse grade, ecuații iraționale etc.)



EXEMPLE

1. $\frac{2\cos x - 1}{3\cos x + 1} + \frac{2\sin x - 1}{3\sin x + 1} = -\frac{3}{4}$.

Rezolvare:

Eliminând numitorii, obținem echivalent: $\sin x + \cos x + 15\sin x \cos x - 1 = 0$. Făcând substituția $\sin x + \cos x = y$, unde $y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, rezultă că $\sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$ și ecuația devine $15y^2 + 2y - 17 = 0$, cu soluțiile: $y_1 = 1$ și $y_2 = -\frac{17}{15}$. Revenind la substituție obținem: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\sin x + \cos x = -\frac{17}{15} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{17\sqrt{2}}{30}$. Folosind ecuațiile fundamentale, finalizează rezolvarea!

$$2) \sqrt{2 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x, x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Rezolvare: Notând $\operatorname{tg} x = t$, ecuația devine $\sqrt{2 + t} = t$. Condiția $t > 0$ (explică!). Prin ridicare la pătrat, $t = 2$. Revenind la substituție, avem $\operatorname{tg} x = 2$, cu soluțiile $x = \operatorname{arctg} 2$ și $x = \pi + \operatorname{arctg} 2$, deoarece $\operatorname{arctg} 2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Ecuații trigonometrice de forma $a \sin x + b \cos x = c$

Am văzut în paragrafele anterioare că $a \sin x + b \cos x \in [-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}]$. Astfel, ecuația $a \sin x + b \cos x = c$ are soluții dacă și numai dacă $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$.

Metoda 1: Vom rezolva ecuația prin restrângerea expresiei $a \sin x + b \cos x$, folosind următorul caz particular: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -1, x \in \mathbb{R}$.

● $a = \sqrt{3}, b = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$.

● Observăm că $c^2 \leq a^2 + b^2$ ($1 \leq 4$), deci ecuația are soluții.

$$\text{Astfel, } \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Ecuația revine la $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$, iar mulțimea soluțiilor este $\left\{ \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Metoda 2: Vom exprima funcțiile sinus și cosinus prin intermediul tangentei arcului pe jumătate:

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. **Atenție!** Prin trecerea la $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ îngustăm mulțimea de rezolvare a ecuației date (condiția $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$).

Testăm dacă $x = \pi + 2k\pi$ verifică egalitatea. În caz afirmativ, o păstrăm ca soluție și apoi trecem la substituția $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

În cazul particular anterior, $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -1$, observăm că $\pi + 2k\pi$ verifică ecuația. Reținem mulțimea de soluții $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ecuația în t devine: $\sqrt{3} \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$. Regăsim în mod firesc mulțimea soluțiilor obținută la metoda 1.



EXERCITII PROPUSE

Rezolvă ecuațiile ($x \in \mathbb{R}$):

1. a) $\sin x = 0$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin x = \frac{1}{5}$; d) $\sin x = 2$.
2. a) $\cos x = \frac{2}{3}$; b) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; c) $\cos x = \frac{\pi}{3}$.
3. a) $\operatorname{tg} x = -1$; b) $\operatorname{tg} x = 15$; c) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\operatorname{ctg} x = 8$.
4. a) $\sin y \cdot \sin 20^\circ = \sin(40^\circ - y) \cos 10^\circ, y \in (0, 90^\circ)$; b) $\sin x \cos x = \sin 35^\circ$; c) $\sin x + \cos x = -2$.
5. Determină $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2 - \sqrt{3}$.
6. Rezolvă ecuațiile următoare în intervalul $[0, 2\pi]$: a) $\sin x = \sin 2x$; b) $\sin x = \operatorname{tg} x$; c) $\sin x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.
7. Rezolvă ecuațiile următoare în intervalul $(-\pi, 3\pi)$:
a) $\sin x = \sin 4x$; b) $\sin 5x = \cos x$; c) $\sin 5x = -\cos x$; d) $-\cos 3x = \cos 5x$; e) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.
8. i) Determină $a \in \mathbb{R}$ știind că $-\frac{7\pi}{3}$ este soluție a ecuației $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin x + a = 0$.
ii) Rezolvă ecuațiile: a) $\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$; b) $\cos x + 2\sin \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0$;
c) $\operatorname{tg} x + \sin 2x = 2$; d) $\cos^2 x + 3\sin x \cos x + 2\sin^2 x = 0$.
9. Rezolvă ecuațiile ($x \in \mathbb{R}$):
a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; b) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$;
c) $3\sin x + 4\cos x = 5$; d) $(\sin x)(2\sin x + 3\cos x) = 2\sqrt{2} \sin x$.



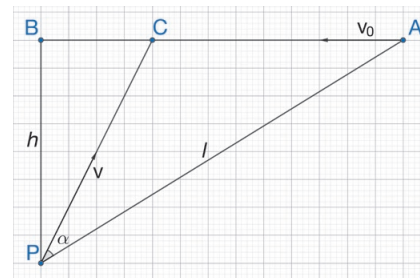
10. Rezolvă ecuațiile:

- a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 4x$; b) $\sin 2x = 1 + \cos x + \cos 2x$; c) $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$;
 d) $\sqrt{5 + \sin^2 \frac{3x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$; e) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$;
 f) $(\sin x + \cos x)^3 = 4 \sin x$; g) $2 \cos^3 x = \sin x$; h) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} = 1$.

11. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) are loc relația $\frac{R}{2r} = \frac{b+c}{a}$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului.

12. Rezolvă ecuația $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} = 2, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

13. O persoană aflată pe un câmp la o distanță $h = 50$ m de o șosea observă un autobuz venind cu viteza $v_0 = 12$ m/s. Distanța autobuzului față de persoană este $l = 400$ m. Sub ce unghi α trebuie să alerge persoana pentru a întâlni autobuzul, dacă viteza persoanei este $v = 3$ m/s?



14. a) Demonstrează că $\sin 40^\circ$ este soluție a ecuației algebrice

$$8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0.$$

b) Dă exemplu de ecuație algebrică de gradul al III-lea care să aibă rădăcină valoarea $\cos 40^\circ$.

Teste de antrenament

Testul 1

- (20p) Stabilește semnul produsului $p = \cos \frac{107\pi}{9} \cdot \sin 5$.
- (25p) Demonstrează că $\frac{4\pi}{3}$ este perioadă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [\sin 3x]$.
- (25p) Determină $t \in [0, \pi)$ pentru care $|\sin t - \cos t| = |\sin t| + |\cos t|$.
- (20p) Dă exemplu de număr $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\cos x + \sin x \in \mathbb{Q}$.

Testul 2

- (20p) Dă exemplu de funcție periodică cu perioada $\frac{1}{3}$.
- (25p) Știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\cos x = -\frac{4}{5}$, calculează $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.
- (25p) Demonstrează că $2^{n+1} \cdot \cos \frac{7n\pi}{3} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (20p) Demonstrează că $\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{\sin 40^\circ}{2 \sin 10^\circ + \cos 10^\circ}$.

Testul 3

- (25p) Se consideră ecuația $2 \sin x + \cos x = 2$.
 a) (10p) Justifică faptul că $2 \arctg \frac{1}{3}$ este soluție a ecuației.
 b) (15p) Determină toate soluțiile ecuației.
- (25p) Știind că ABC este triunghi ascuțitunghic, demonstrează că $\sin A < \cos B + \cos C$.
- (20p) Rezolvă ecuația $\sin x \cos x = 2 \cos 55^\circ, x \in \mathbb{R}$.
- (20p) Determină imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + 3$.

Testul 4

- (20p) Calculează $\operatorname{tg}\left(2 \arccos \frac{1}{3} + \arctg 2\right)$.
- (25p) Transformă în produs $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c - \sin(2a + 2b + 2c)$.
- (20p) Verifică faptul că $\operatorname{ctg} 20^\circ = \sqrt{3} - 4 \sin 20^\circ$.
- (25p) Se consideră ecuația $\cos 2x = \sin x, x \in \mathbb{R}$.
 a) (10p) Verifică dacă $2\pi + \arcsin(\sqrt{2} - 1)$ este soluție a ecuației.
 b) (15p) Rezolvă ecuația (în $\mathbb{R}$).

Pentru fiecare test:

Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x - \sqrt{3}$.

a) (1p) Calculează $f\left(\frac{11\pi}{3}\right); f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) (1p) Rezolvă ecuația $f(x) = -1, x \in \mathbb{R}$.

c) (1p) Află imaginea funcției f .

d) (2p) Arată că $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right), (\forall)x \in \mathbb{R}$; reprezintă grafic funcția.

2. Fie $g: D \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \arcsin x + 2\arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

a) (1p) Stabilește că $D = [-1, 1]$.

b) (1p) Calculează $g(-1)$.

c) (1p) Verifică dacă $f\left(\frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

d) (1p) Demonstrează că $f(x) = \frac{\pi}{2}, (\forall)x \in [-1, 1]$.

Timp de lucru: 50 de minute

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.





APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE. RELAȚII METRICE

5

Trigonometria transformă geometria teoretică într-un instrument de explorare a realității, permițându-ne să măsurăm distanțe stelare sau să proiectăm structuri arhitecturale complexe. Fie că vorbim despre navigația modernă sau despre calcularea înălțimii munților, relațiile dintre unghiuri și laturi sunt puntea de legătură între abstract și concret. În acest capitol, vom descoperi cum legile fundamentale ale trigonometriei devin aliați în rezolvarea provocărilor lumii înconjurătoare.

Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor.

Rezolvarea triunghiurilor



A. Teorema cosinusului

În cuprinsul acestui capitol, pentru un triunghi ABC vom nota: $BC = a$; $AB = c$; $AC = b$; $p = \frac{a+b+c}{2}$;

• măsurile unghiurilor $\angle A, \angle B, \angle C$ prin A, B respectiv C (în grade sau radiani);

• r și R – raza cercului înscris, respectiv raza cercului circumscris;

• S – aria triunghiului.



Între lungimile laturilor și măsurile unghiurilor unui triunghi au loc anumite legături care permit calculul celor șase elemente (lungimi de laturi și măsuri de unghiuri) cunoscând trei dintre ele, printre care cel puțin lungimea unei laturi.

Teorema proiecției. În orice triunghi ABC au loc relațiile:

$$a = b\cos C + c\cos B \quad (1);$$

$$b = a\cos C + c\cos A \quad (2);$$

$$c = a\cos B + b\cos A \quad (3).$$

Demonstrăm prima relație, pentru celelalte vei proceda asemănător!

Proiecția vârfului A pe latura opusă este un punct D , care este interior laturii $[BC]$ sau exterior acesteia.

i) $\hat{B}$ și $\hat{C}$ sunt unghiuri ascuțite (fig.1). În acest caz, $D \in (BC)$ (este interior). Din triunghiurile dreptunghice ABD și ACD obținem $BD = c\cos B$ și $DC = b\cos C$, deci $a = c\cos B + b\cos C$.

ii) Unul dintre unghiurile $\hat{B}$ sau $\hat{C}$ este obtuz. În cazul unghiul $\hat{C}$ obtuz, D este exterior laturii (BC) (fig.2). La fel ca în primul caz, $BD = c\cos B$, iar $CD = b\cos \widehat{ACD} = -b\cos C$. Astfel, $a = BC = BD - CD = c\cos B + b\cos C$.

iii) Unul dintre unghiurile $\hat{B}$ sau $\hat{C}$ este drept. Relația este evidentă.

Teorema cosinusului. În orice triunghi ABC avem relațiile:

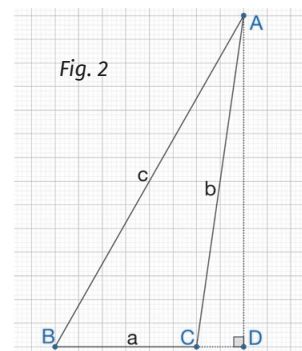
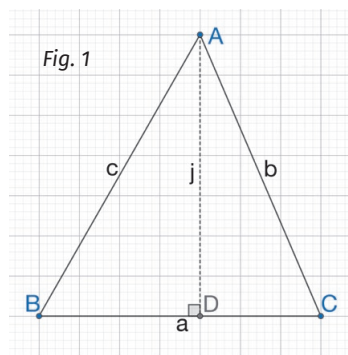
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2accosB;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC.$$

Demonstrație: Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) din teorema proiecției cu a, b , respectiv c , obținem:

$a^2 = abcosC + accosB$; $b^2 = bccosA + bacosC$; $c^2 = accosB + bccosA$. Adunând ultimele două relații avem: $b^2 + c^2 = bccosA + bacosC + accosB + bccosA = 2bccosA + a(bcosC + ccosB) = 2bccosA + a^2$, deci $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$. Celelalte două relații se deduc asemănător și se pot obține din prima relație prin „permutări circulare” (adică înlocuind astfel: $a \rightarrow b$; $b \rightarrow c$; $c \rightarrow a$ și $A \rightarrow B$; $B \rightarrow C$; $C \rightarrow A$).




OBSERVAȚII

- a) În cazul triunghiului dreptunghic în A ($A = \frac{\pi}{2}$), obținem $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema lui Pitagora).
 b) La fel ca în cazul teoremei lui Pitagora, teorema cosinusului permite calculul lungimii unei laturi când se cunosc lungimile celorlalte două și măsura unghiului dintre cele două laturi (cazul de determinare L.U.L.).
 c) Din teorema cosinusului rezultă drept *consecință* și relațiile:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

Aceste relații permit calculul măsurilor unghiurilor unui triunghi când se cunosc lungimile laturilor (cazul L.L.L.).


EXERCIȚII REZOLVATE

1. În triunghiul ABC cunoaștem $c = 2$, $a = 5$ și $B = 120^\circ$ (fig.3). Calculează b și A .

Rezolvare:

Din teorema cosinusului obținem $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$, deci $b^2 = 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 39 \Rightarrow b = \sqrt{39}$.

Pentru a afla unghiul A , folosim *consecința teoremei cosinusului*: $\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb} = \frac{4 + 39 - 25}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{39}} = \frac{18}{4\sqrt{39}}$. Deoarece $A \in (0, \pi)$ și $\cos A > 0$, rezultă că $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $A = \arccos \frac{18}{4\sqrt{39}} \approx 44^\circ$.

2. Numerele pozitive a, b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi ascuțitunghic dacă și numai dacă $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$, $c^2 < a^2 + b^2$.

Rezolvare: Din $a^2 < b^2 + c^2$ și $b^2 + c^2 < (b+c)^2$, rezultă $a^2 < (b+c)^2 \Leftrightarrow a < b+c$ și analoagele.

Unghiurile ascuțite au cosinusurile pozitive: $A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$ și inegalitățile analoage.

De asemenea, dacă $a^2 > b^2 + c^2$ sau $b^2 > a^2 + c^2$ sau $c^2 > a^2 + b^2$, atunci triunghiul este obtuzunghic.

3. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc, în exterior, triunghiuri echilaterale de centre A', B', C' . Arată că $\Delta A'B'C'$ este echilateral (triunghiul „exterior” al lui Napoleon – fig.4).

Rezolvare: $\widehat{AC'B} = \widehat{BA'C} = 120^\circ$. Aplicând teorema cosinusului în triunghiurile isoscele $AC'B$ și $BA'C$, obținem $C'B = \frac{c}{\sqrt{3}}$, respectiv $A'B = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Aplicând teorema cosinusului în

$\Delta C'A'B$, avem $A'C'^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{ac}{3}\cos\left(B + 60^\circ\right) = \frac{1}{3}\left[a^2 + c^2 - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)\right] = \frac{1}{3}\left(a^2 + c^2 - accosB + ac\sqrt{3}\sin B\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + c^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + 2S\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}\right)$ (am

ținut cont că $S = \frac{ac\sin B}{2}$). Rezultă $A'C' = \sqrt{\frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}\right)}$,

rezultat simetric în a, b și c , ceea ce arată că și laturile $A'B'$ și $B'C'$ au aceeași valoare ca $A'C'$.

Comentariu: Problema îi este atribuită lui Napoleon Bonaparte, împăratul francez fiind cunoscut pentru pasiunea sa pentru matematică și geometrie, deși mulți istorici consideră că adevăratul autor al teoremei a fost prietenul său, matematicianul Lorenzo Mascheroni. Există și un triunghi echilateral „interior” al lui Napoleon, când triunghiurile construite pe laturi sunt spre interior. Verifică!

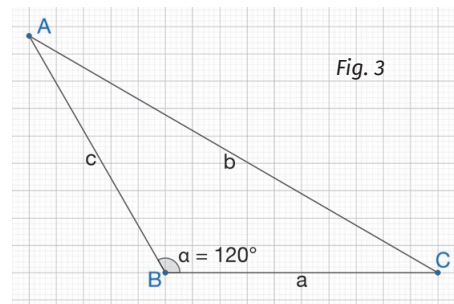


Fig. 3

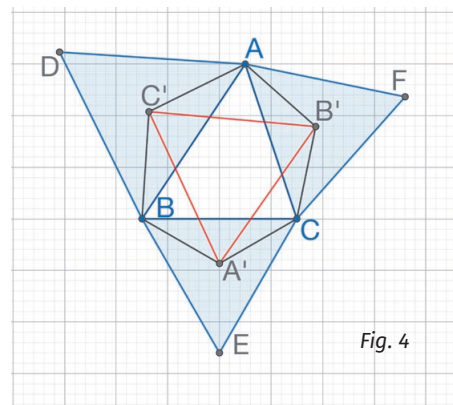


Fig. 4

4. În orice triunghi ABC există relațiile: $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ (1); $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ (2).

Rezolvare:

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc} = \frac{(p-c)(p-b)}{bc}.$$

Deoarece $\frac{A}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, rezultă $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$. Dedu egalitatea (2), apoi scrie relațiile asemănătoare pentru celelalte unghiuri ale triunghiului.

Justifică egalitatea $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ și scrie relațiile analoage pentru jumătățile unghiurilor B și C .

5. a) În orice triunghi ABC avem relația: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ (m_a – mediana din A) și analoagele.

b) În patrulaterul $ABCD$, E și F sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$. Demonstrează relația:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

Rezolvare: a) Fie M mijlocul laturii $[BC]$.

Aplicând teorema cosinusului în $\triangle ABC$ avem: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

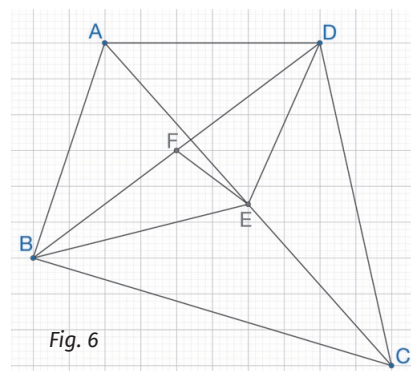
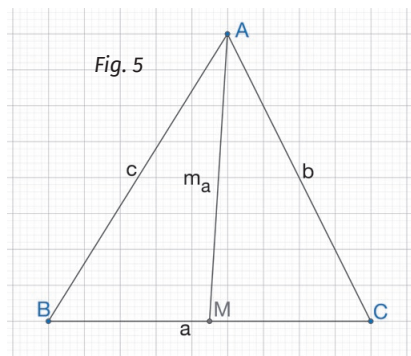
Aplicând teorema cosinusului în $\triangle ABM$ obținem: $m_a^2 = AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot c \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Simplificând, rămânem cu: $m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.

Rezultatul anterior este întâlnit în literatura de specialitate ca *teorema medianei*, enunțată de matematicianul grec Apoloniu din Perga.

b) În $\triangle EBD$, segmentul $[EF]$ este mediană. Aplicăm teorema medianei și obținem: $EF^2 = \frac{2(ED^2 + EB^2) - BD^2}{4}$ (1). Cum în $\triangle ABC$ segmentul $[BE]$ este de asemenea mediană, avem $BE^2 = \frac{2(BA^2 + BC^2) - AC^2}{4}$; analog, în $\triangle ADC$, segmentul ED este mediană, deci $ED^2 = \frac{2(DA^2 + DC^2) - AC^2}{4}$. Înlocuind în relația (1) se obține rezultatul cerut, cunoscut și ca *relația lui Euler* pentru patrulatere și reprezentând o generalizare a teoremei lui Pitagora.

Reflecție: depinde rezultatul de tipul patrulaterului: convex sau concav? Explică.



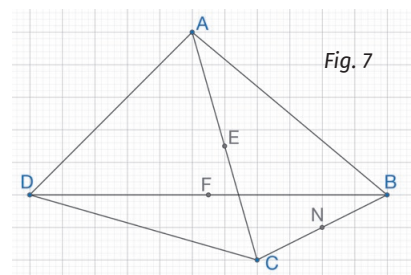
Teorema cosinusului pentru patrulatere

Știind că lungimile laturilor unui patrulater convex $ABCD$ sunt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, iar diagonalele sunt de lungimi m , respectiv n , atunci au loc relațiile:

$$\cos(B + C) = \cos(A + D) = \frac{b^2 + d^2 - m^2 - n^2}{2ac}, \quad \cos(D + C) = \cos(A + B) = \frac{a^2 + c^2 - m^2 - n^2}{2bd}.$$

Fie N mijlocul laturii BC , iar E și F mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD .

i) Cazul $AB \nparallel CD$. Fie α măsura unghiului format de AB și BC . Atunci $\widehat{ENF} = \alpha$ (deoarece $EN \parallel AB$ și $FN \parallel CD$, fiind linii mijlocii în $\triangle ABC$, respectiv $\triangle BCD$). Aplicăm teorema cosinusului în $\triangle ENF$ și obținem $EF^2 = NE^2 + NF^2 - 2 \cdot NE \cdot NF \cos \alpha$. Însă $NE = \frac{a}{2}$ și $NF = \frac{c}{2}$. Înlocuind aceste valori în relație și înmulțind cu 4, se obține formula



$4EF^2 = a^2 + c^2 - 2accos\alpha$. Folosind relația lui Euler și $cos(B + C) = cos(A + D) = -cos\alpha$, finalizează demonstrația.

ii) Cazul $AB \parallel CD$. Arătăm că $4EF^2 = a^2 + c^2 - 2ac$. Într-adevăr:

● dacă $AD \nparallel BC$, atunci $ABCD$ este trapez și $2EF = |a - c|$, unde $[EF]$ este linia mijlocie a diagonalelor; ridicând la pătrat se obține relația căutată.

● dacă $AD \parallel BC$, atunci $ABCD$ este paralelogram și $E = F \Rightarrow a = c$.

Analog, demonstrează a doua relație (folosind celelalte două laturi opuse, AD și BC) pentru a verifica faptul că ai înțeles pașii prezentați.

Provocarea arhitectului: Puntea suspendată.

Primăria dorește să reamenajeze Parcul Central, care are forma unui patrulater convex neregulat $ABCD$. Laturile opuse $[AB]$ și $[CD]$ corespund la două bulevarde care, din măsurătorile cadastrale, au lungimile următoare: bulevardul $AB - 400$ m și bulevardul $CD - 300$ m. Pentru conservarea clădirilor istorice din zonă, aceste bulevarde au fost construite astfel încât, dacă ar fi prelungite imaginar, s-ar intersecta formând un unghi de 60° .

În mijlocul parcului se află un lac de agrement, peste care arhitectul șef dorește să construiască o punte pietonală suspendată, care să unească punctul E (mijlocul diagonalei $[AC]$) cu punctul F (mijlocul diagonalei $[BD]$). Fiindcă punctele E și F sunt separate de lac, măsurătoarea directă este imposibilă cu un simplu telemetru. Calculează lungimea EF a viitoarei punți suspendate, pentru a putea comanda materialele necesare.

Rezolvare: La prima vedere, problema pare că nu are suficiente date. Nu cunoaștem celelalte două laturi ale parcului și nici lungimile diagonalelor. Aici intervine surpriza și frumusețea matematicii: lungimea segmentului care unește mijloacele diagonalelor depinde exclusiv de două laturi opuse și de unghiul dintre ele!

Conform demonstrației teoremei anterioare, considerând laturile opuse $a = 400$ și $c = 300$, iar unghiul dintre ele $\alpha = 60^\circ$, rezultă că $4EF^2 = a^2 + c^2 - 2accos\alpha$, deci $4EF^2 = 400^2 + 300^2 - 2 \cdot 400 \cdot 300 \cdot 0,5$ și, în concluzie, $EF = 50\sqrt{13} \approx 180,27$ m.



EXERCITII PROPUSE

A.

- În $\triangle ABC$ avem:
 - $a = 3; b = 4, C = \frac{\pi}{3}$. Calculează c .
 - $a = 7; b = 6, c = 5$, iar $D \in (BC)$ astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$. Determină lungimea segmentului $[AD]$.
 - Aceeași cerință ca la b), dar pentru cazul în care D este exterior laturii $[BC]$.
- Laturile triunghiului ABC sunt $a = 7, b = 6, c = 5$. Considerăm $M \in (BC)$ astfel încât $BM = x$ și funcția $f: (0, 7) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = AM^2$.
 - Demonstrează în două moduri că f admite o valoare minimă.
 - Determină mulțimea A pentru care funcția $g: (0, 7) \rightarrow A, g(x) = f(x)$ este surjectivă.
 - Demonstrează că g nu este injectivă.
- Se consideră triunghiul ABC în care se cunosc lungimile laturilor: $a = 6, b = 7$ și $c = 8$.
 - Justifică faptul că unghiul C este ascuțit.
 - Calculează raportul lungimilor segmentelor determinate de piciorul înălțimii triunghiului pe AB .
- În $\triangle ABC$ avem:
 - $a = 7, b = 8, A = 45^\circ$. Calculează c .
 - $a = 7, b = 10, A = 45^\circ$. Calculează c . Prin ce diferă acest caz de cel precedent?
- Verifică faptul că în orice triunghi ABC avem relațiile:
 - $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$;
 - $2bccosA + 2accosB + 2abcosC = a^2 + b^2 + c^2$.

6. Știind că în triunghiul ABC avem $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$, arată că triunghiul este echilateral.
7. În $\triangle ABC$, $c = \frac{a+b}{2}$, iar $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Calculează $\cos A$.
8. Se consideră $[AC]$ cea mai lungă dintre diagonalele paralelogramului $ABCD$, iar E și F sunt picioarele perpendicularelor din C pe AB , respectiv pe AD . Demonstrează că $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.
- B.**
9. Într-un patrulater $ABCD$, diagonalele sunt perpendiculare dacă și numai dacă $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.
10. Se consideră triunghiul ABC și $M \in (AC)$, $N \in (AB)$. Verifică faptul că $BC^2 + MN^2 = BM^2 + CN^2 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}$.
11. Se consideră ABC un triunghi echilateral de latură a , $D \in (BC)$, $E \in (AB)$, astfel încât $BD = \frac{a}{3}$ și $AE = ED$. Calculează CE .
12. Într-un triunghi ABC avem relațiile $a(b+c) = b^2 + c^2$ și $b+c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Demonstrează că triunghiul are un unghi de 30° .
13. Într-un triunghi ABC avem $5a^2 = 5b^2 + c^2$, $3b^2 = 3c^2 + a^2$. Justifică faptul că $\operatorname{tg} A = 3$, $\operatorname{tg} B = 2$ și $\operatorname{tg} C = 1$.
14. Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă $\cos B + \cos C = \frac{b+c}{a}$.
15. Verifică faptul că triunghiul ABC în care avem $b\cos A + c\cos B + a\cos C = p$ este isoscel.
16. În triunghiul ABC , medianele corespunzătoare laturilor AC și AB sunt perpendiculare. Demonstrează că $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \frac{2}{3}$ și $5a^2 = b^2 + c^2$.
17. În triunghiul ABC este înscris un cerc tangent laturilor sale în punctele $M \in AB$, $N \in BC$ și $L \in AC$. Calculează MN , știind că $LA = 2$, $LC = 3$ și $\cos C = \frac{3}{4}$.
18. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, cu lungimile laturilor și diagonalelor în intervalul $[1, \sqrt{2}]$. Demonstrează că patrulaterul este pătrat.

B. Teorema sinusurilor

Teorema sinusurilor nu este atribuită unei singure persoane, ci a evoluat de-a lungul mai multor secole. Astfel, în secolele II–I î. n. erei noastre, baza a fost pusă de astronomii greci antici, precum *Hiparh*, iar o formă incipientă pentru triunghiurile sferice a fost menționată de *Menelaus din Alexandria*.

Teorema sinusurilor. Într-un triunghi oarecare, raportul dintre lungimea oricărei laturi și sinusul unghiului opus laturii este același. Mai exact, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (1).

Demonstrație: Fie D punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului. Există cazurile:

- i) $B < 90^\circ$ (fig.1); $\sin B = \sin \widehat{ADC} = \frac{AC}{AD} = \frac{b}{2R}$, deci $\frac{b}{\sin B} = 2R$.
- ii) $B > 90^\circ$ (fig.2, în care centrul cercului, O , este exterior triunghiului); patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, deci $\sin B = \sin(180^\circ - \widehat{ADC}) = \sin \widehat{ADC} = \frac{AC}{AD} = \frac{b}{2R}$, așadar $\frac{b}{\sin B} = 2R$.

Analog pentru celelalte rapoarte din relația (1).

Observație: În cazul $\widehat{B} = 90^\circ$, teorema sinusurilor revine la definiția sinusului ca raport în triunghi dreptunghic.

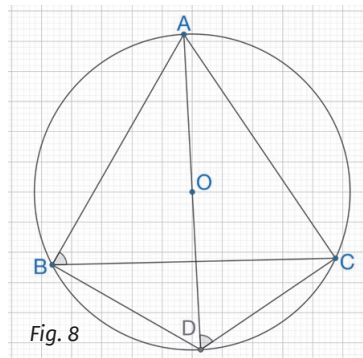


Fig. 8

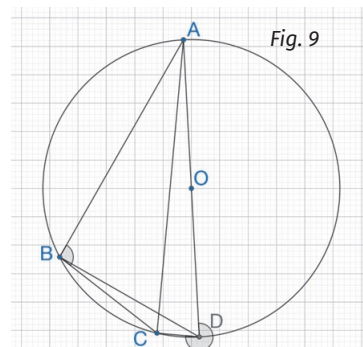


Fig. 9



PROBLEME REZOLVATE

1. În $\triangle ABC$, $a = 12$, $B = 75^\circ$, $C = 60^\circ$. Calculează b .

Rezolvare: Aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ unde } A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ; b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{12 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 12 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} = 6(1 + \sqrt{3}).$$

2. În $\triangle ABC$ avem $B = \frac{\pi}{3}$ și $C = \frac{\pi}{6}$. Determină $\frac{AB}{AC}$.

$$\text{Rezolvare: } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. În $\triangle ABC$, $BC = 8$ și $\cos A = \frac{3}{5}$. Calculează raza R .

$$\text{Rezolvare: } \cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \text{ deci } R = \frac{BC}{2 \sin A} = 5.$$

4. a) Demonstrează că, dacă $x + y + z + t = 2\pi$, $x, y, z, t > 0$, atunci $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{z}{2} + \sin \frac{y}{2} \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{z+t}{2}$.

b) Dedu că, într-un patrulater înscrisibil, suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor patrulaterului (Teorema lui Ptolemeu).

Rezolvare: a) Transformăm produsele în sume și ținem cont că $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = -\cos\left(\frac{y+t}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Atunci: } \sin \frac{x}{2} \sin \frac{z}{2} + \sin \frac{y}{2} \sin \frac{t}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x-z}{2} - \cos \frac{x+z}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\cos \frac{y-t}{2} - \cos \frac{y+t}{2} \right) = \cos \frac{x+y-z-t}{4} \cos \frac{x-z-y+t}{4} = \\ &= \cos \frac{2(x+y)-2\pi}{4} \cos \frac{2(x+t)-2\pi}{4} = \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x+t}{2}. \end{aligned}$$

b) Înlocuim numerele x, y, z, t prin măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$.

Obținem $\sin \widehat{ACB} \cdot \sin \widehat{DBC} + \sin \widehat{BDC} \cdot \sin \widehat{ACD} = \sin \widehat{ADC} \cdot \sin \widehat{BCD}$.

Din teorema sinusurilor: $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{2R}$ (în $\triangle ABC$); $\sin \widehat{DBC} = \frac{DC}{2R}$ (în $\triangle DBC$) etc. Înlocuind și amplificând cu $2R$ obținem $AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot DB$.

5. Verifică faptul că triunghiul ABC , în care $\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$, este dreptunghic.

$$\text{Rezolvare: } \frac{a+c}{b} = \frac{2R(\sin A + \sin C)}{2R \sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi - B}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

$$\text{Rezultă } \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}}, \text{ deci } \cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A-C}{2} = \pm \frac{B}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \text{ sau } A = \frac{\pi}{2}.$$

6. Un stâlp CD (fig.11) este ancorat cu două cabluri, CA și CB , cu care se află în același plan. Știind că $AB = 5$ m, $\widehat{CAD} = 30^\circ$ și $\widehat{CBA} = 20^\circ$, calculează înălțimea stâlpului.

Rezolvare: Cu teorema sinusurilor în $\triangle CAB$,

$$AC = \frac{5 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = 10 \cos 10^\circ.$$

$$\text{Rezultă } CD = \frac{1}{2} AC = 5 \cos 10^\circ \approx 4,92 \text{ m.}$$

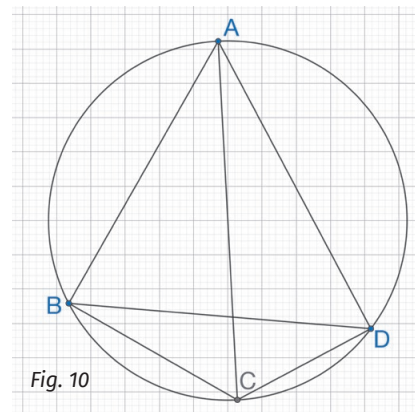


Fig. 10

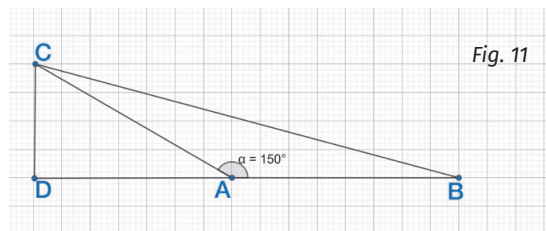


Fig. 11



EXERCITII PROPUSE

A.

1. Demonstrează că în orice triunghi ABC au loc relațiile:
a) $\frac{\sin A + \sin B}{a + b} = \frac{\sin A}{a}$; b) $\frac{\sin A - \sin B}{a - b} = 2R$; c) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$; d) $b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C)$.
2. a) În triunghiul ABC cunoaștem $AC = 10$; $B = 45^\circ$; $C = 30^\circ$. Calculează laturile triunghiului.
b) În triunghiul ABC cunoaștem $AB = 12$, $A + B = 75^\circ$. Calculează R .
3. În pătratul $ABCD$ se consideră $E \in (AC)$ astfel încât $\widehat{CBE} = 30^\circ$. Știind că F este simetricul lui E față de C , verifică faptul că triunghiul BDF este echilateral.
4. Unghiul XAY are măsura de 60° și B este un punct în interiorul său. Se consideră C și D proiecțiile lui B pe laturile AX și AY . Determină CD și $\cos \widehat{ACD}$, știind că $BC = a$, $BD = a$.
5. Demonstrează că, dacă $\sin^2 C + \sin^2 B = \sin^2 A$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.
6. Demonstrează că triunghiul în care $a = 2b \sin \frac{A}{2}$, unde $A \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, este isoscel.
7. (**Activitate în pereche**) Verificați faptul că în orice triunghi ABC există relația $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$.
Scrieți relații analoage și analizați ce devin acestea pentru cazurile în care triunghiul este: echilateral, dreptunghic, dreptunghic și isoscel, dreptunghic cu unghi de 30° .

B.

8. Demonstrează că, dacă într-un triunghi ABC are loc condiția $b + c = 2a$, atunci $2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2}$ și $2 \cos A + \cos B + \cos C = 2$.
9. Verifică faptul că un triunghi ABC în care are loc relația $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ este dreptunghic.
10. Știind că într-un triunghi ABC are loc relația $a \left(\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \right) + b \left(\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \right) = 0$, demonstrează că triunghiul este isoscel.
11. Într-un triunghi ABC , $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ și $\operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă a, b și c sunt în progresie aritmetică (în ordinea scrisă).
12. Știind că H este ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic ABC :
a) exprimă, în funcție de A, B, C , unghiurile ΔAHC ; b) aplică teorema sinusului în ΔAHC ;
c) deduce relațiile $AH = 2R \cos A$ și $CH = 2R \cos C$; d) deduce că raza cercului circumscris ΔAHC este R ;
e) rezolvă cerințele a), b) și c) pentru ΔABC cu $A > 90^\circ$.

C. Rezolvarea triunghiului oarecare

Pentru un triunghi ABC avem în vedere 6 elemente mai importante: lungimile laturilor (a, b, c) și măsurile unghiurilor (A, B, C). De rezolvarea triunghiului dreptunghic ne-am ocupat în gimnaziu.

În cazul *triunghiului oarecare*, a rezolva triunghiul presupune a afla trei dintre elementele acestuia, cunoscând celelalte trei, *printre care cel puțin o latură!* Explică, aducându-ți aminte diferențele dintre congruența și asemănarea triunghiurilor.

Există *trei cazuri fundamentale* de construcție, care sunt și cazuri de congruență a triunghiurilor. În aceste cazuri *triunghiul este determinat*, adică cele trei elemente de aflat rezultă în mod unic din cele date.

► **Cazul L.U.L.** Se cunosc lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins între ele.

Exemplu: $a = 8$; $B = 60^\circ$; $c = 6$. Din teorema cosinusului obținem $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, deci $b^2 = 64 + 36 - 96 \cdot \frac{1}{2} = 52$. Rezultă $b = 2\sqrt{13}$; $\cos A = \frac{\sqrt{13}}{13}$, $A = \arccos \frac{\sqrt{13}}{13}$.

Comentariu: După determinarea lui b , obținem din teorema sinusurilor $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{6 \sin 60^\circ}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

Pare că rezultă două soluții, $C = \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ sau $C = \pi - \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$, și trebuie să decidem care dintre ele este soluție. De aceea, pentru calculul măsurii unui unghi este recomandat să calculăm cosinusul unui astfel de unghi. Utilizând instrumente geometrice pentru probă, construiește triunghiul (unitatea de măsură poate fi cm).

► **Cazul L.L.L.** Se cunosc lungimile laturilor a , b , c cu $|b - c| < a < b + c$.

Indicație: utilizează teorema cosinusului, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, pentru a iniția rezolvarea.

Reflecție: Construiește, utilizând numai rigla și compasul, un triunghi în care se cunosc $a = 5$, $b = 6$ și $c = 7$ (în cm). Măsoară cu raportorul unghiul A și compară cu valoarea calculată prin teorema cosinusului.

Vei constata importanța cunoașterii construcțiilor geometrice cu instrumentele clasice, de exemplu pentru a stabili că nu se poate construi un triunghi de laturi de lungimi 1, 2 și 3!

► **Cazul U.L.U.** Cunoaștem lungimea unei laturi și măsurile unghiurilor „adiacente”.

De exemplu, pentru $a = 12$, $B = 30^\circ$ și $C = 72^\circ$ rezultă $A = 78^\circ$, apoi aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{12}{\sin 78^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 72^\circ}. \text{ Rezultă } b \approx 6,1; c \approx 11,6.$$

► **Cazul L.L.U.** Se cunosc două laturi și unul dintre unghiuri, care nu este format de respectivele laturi.

Acesta nu este un caz de determinare, după cum vom vedea în exemplele următoare.

a) $b = 9$, $a = 10$, $A = 120^\circ$ (fig.12).

Să calculăm c și măsura unghiului C .

Rezolvare: Calculăm $\sin B$, cu teorema sinusurilor: $\frac{\sin B}{9} = \frac{\sin A}{10} = \frac{\sqrt{3}}{20}$. Deoarece $A > 90^\circ$, avem $B < 90^\circ$.

Rezultă $\sin B = \frac{9\sqrt{3}}{20} < 1$, deci $B = \arcsin \frac{9\sqrt{3}}{20}$. În concluzie, $C = \pi - \frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{9\sqrt{3}}{20} = \frac{\pi}{3} - \arcsin \frac{9\sqrt{3}}{20}$.

Continuă raționamentul pentru a calcula latura c . Vei concluziona că problema are o singură soluție?

b) $a = 7$; $b = 10$; $A = 40^\circ$. Din teorema sinusurilor avem: $\sin B = \frac{b \sin A}{a} \approx 0,91 < 1$. Se obțin două soluții: $B_1 \approx 67^\circ$ și $B_2 = 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$. Triunghiul nu este determinat de ipotezele date!

c) $A = 117^\circ$; $b = 10$; $a = 7$. Obținem $\sin B \approx 0,99$ și $B \approx 81,5^\circ$ sau $B \approx 102^\circ$. Are cazul două soluții? Nu. Explică!

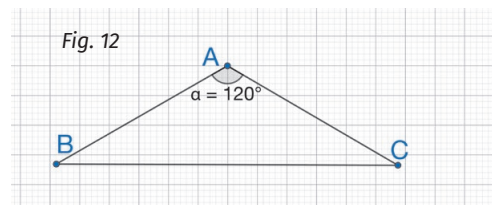


Fig. 12

ALTE EXERCIȚII REZOLVATE

1. a) Construiește din hârtie un triunghi echilateral ABC cu latura de 1 (dm) și îndoaie triunghiul astfel încât vârful A să ajungă pe (BC) , în punctul R , cu $BR = \frac{1}{4}$ (dm).

b) Rezolvă triunghiul PQR obținut după îndoire.

Rezolvare: b) Notăm $AP = x$; $AQ = y$. Atunci $PB = 1 - x$; $PR = x$; $QC = 1 - y$; $RQ = y$. Știm că $\widehat{PRQ} = 60^\circ$. Aplicând teorema cosinusului în $\triangle BPR$, respectiv $\triangle QCR$, obținem: $x = \frac{13}{28}$ și $y = \frac{13}{20}$. Aplicând încă o dată teorema cosinusului în $\triangle PQR$, obținem: $PQ = \frac{13\sqrt{39}}{140}$. Verifică, apoi, tot cu teorema cosinusului, aflând $\widehat{P}$ și $\widehat{Q}$. Finalizează.

2. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$, având $a = a'$, $b = b'$ și $A = A' \geq 90^\circ$. Demonstrează că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Rezolvare: Din teorema sinusurilor avem: $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ și $\sin B' = \frac{b' \sin A'}{a'}$. Rezultă $\sin B = \sin B'$ și, cum $B, B' < 90^\circ$, deducem că $B = B'$, iar de aici rezultă $C = C'$. Prin urmare $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul L.U.L.).

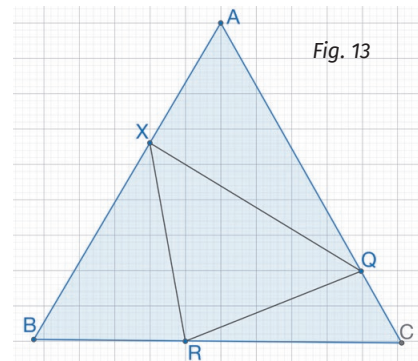


Fig. 13



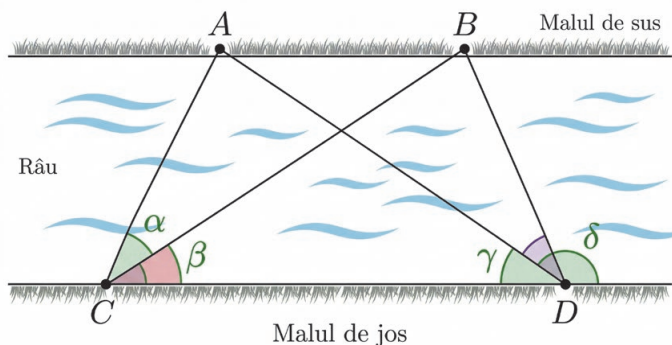
PROBLEME PROPUSE

A.

- (Activitate pe grupe: abordați individual fiecare caz, apoi discutați strategiile de rezolvare; identificați cazurile care permit raționamente diferite și comparați-le).** Rezolvați triunghiul ABC în cazurile:
 - $B = 30^\circ, c = 6, a = 8$;
 - $B = 150^\circ, c = 6, a = 8$;
 - $a = 8, c = 10, b = 2\sqrt{21}$;
 - $b = 12, A = 60^\circ, B = 75^\circ$;
 - $a = 8, c = 6, C = 30^\circ$. Câte soluții avem?
 - $c = 20, a = 14, A = 115^\circ$;
 - $c = 20, a = 14, A = 45^\circ$;
 - $c = 20, a = 14, A = 40^\circ$.
- Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ există un triunghi ABC astfel încât $a = 2m + 1$, $b = m - 1$ și $c = \sqrt{7m^2 + m + 1}$? În acest caz, justifică faptul că triunghiul are un unghi de 120° .
- $ABCD$ este trapez cu bazele $AB = 8$, $DC = 4$. Știind că $AD = 6$ și $BC = 7$, calculează:
 - măsurile unghiurilor trapezului;
 - lungimile diagonalelor trapezului.

B.

- Demonstrează că, dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor acestuia.
- Într-un triunghi ABC avem $c = 6$, $a = 10$ și $m_b = 2\sqrt{13}$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului.
- Rezolvă triunghiul ABC , știind că $b = 10$; $c = 6$ și $m_a = 4\sqrt{2}$.
- Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$, având $a = a'$, $b = b'$ și $B = B' \geq 90^\circ$. Demonstrează că triunghiurile sunt congruente.
- Laturile patrulaterului inscriptibil $ABCD$ sunt $AB = 2\sqrt{5}$; $BC = 6$; $CD = 5\sqrt{2}$ și $AD = 3\sqrt{10}$. Verifică faptul că raza cercului circumscris este 5.
- Rezolvă triunghiul ABC , știind că B, A, C sunt în progresie aritmetică (în această ordine), $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})$ și $a + b + c = \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$.
- Rezolvă triunghiul ABC , în care: $b - a = 2$; $B - A = 30^\circ$ și $c = 2(\sqrt{3} + 1)$.
- Punctele A și B se află pe malul unui râu. Un observator se află pe malul opus celui pe care se află punctul A și vrea să determine distanța AB . Cu un aparat de măsurat unghiuri poate afla α , β , γ , δ . Cunoscând distanța CD , cum poate afla AB ?



Formule pentru arie. Raza cercului circumscris și raza cercului înscris

A. Formule pentru arie

Într-un triunghi oarecare ABC avem relația $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, unde h_a, h_b și h_c sunt înălțimile corespunzătoare laturilor a, b , respectiv c . Știind că D este piciorul înălțimii din A , avem $h_a = b \sin C$ (în ambele situații, $B < 90^\circ$ – fig.1 sau $B > 90^\circ$ – fig.2). Rezultă că $S = \frac{ab \sin C}{2}$ și, analog, $S = \frac{bc \sin A}{2}$, $S = \frac{ac \sin B}{2}$, regăsind astfel formula de calcul a ariei în cazul de determinare L.U.L.

Înlocuind în relațiile anterioare $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ și $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, obținem $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ și analogele, obținând o utilă formulă pentru calculul ariei în cazul U.L.U.

Tot din $S = \frac{ab \sin C}{2} = ab \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$ și înlocuind $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ și $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$ obținem $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, regăsind formula lui Heron. Asemănător avem formula $S = \frac{abc}{4R}$.

Pentru calculul ariei unui patrulater convex, descompunem patrulaterul printr-o diagonală și însumăm ariile celor două triunghiuri.

Pentru patrulateralele particulare avem formule. Astfel:

- pentru paralelogram (fig.3):

$$\text{aria}(ABCD) = AB \cdot DD', \text{ unde } DD' \perp AB; \text{ aria}(ABCD) = AB \cdot AD \sin A;$$

- pentru trapez (fig.4): $\text{aria}(ABCD) = \frac{(AB + CD) \cdot DD'}{2}$, unde $DD' \perp AB$;

- pentru un patrulater convex (fig.5), în care cunoaștem lungimile diagonalelor d_1, d_2 și unghiul α format de ele, avem: $\text{aria}(ABCD) = \frac{d_1 \cdot d_2 \sin \alpha}{2}$

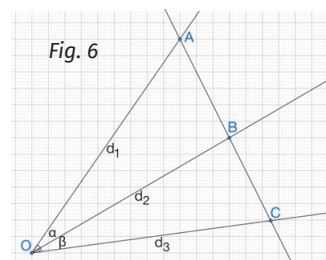
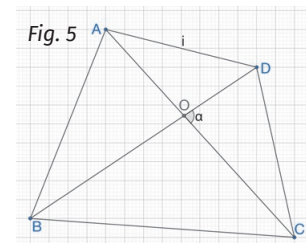
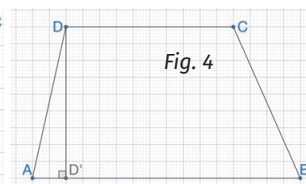
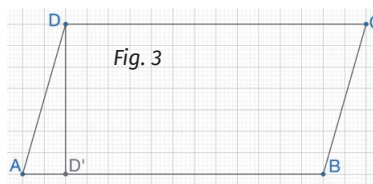
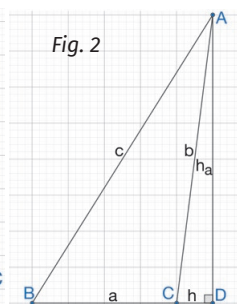
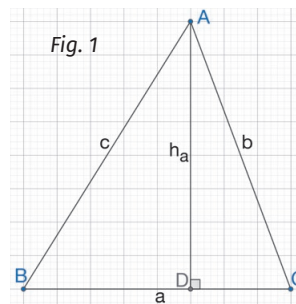
(se obține însumând ariile celor patru triunghiuri cu vârful în O , punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului).

PROBLEME REZOLVATE

1. Din punctul O pornesc în același timp vehiculele A, B și C pe drumurile d_1, d_2 , respectiv d_3 , având vitezele constante v_1, v_2 , respectiv v_3 . Verifică faptul că o condiție necesară și suficientă ca vehiculele să fie permanent în „linie dreaptă” este ca $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{v_3} + \frac{\sin \beta}{v_1}$, unde α și β sunt notațiile unghiurilor reprezentate în figura 6.

Rezolvare. A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă $\text{aria}(AOC) = \text{aria}(AOB) + \text{aria}(BOC)$

(explică!) $\Leftrightarrow \frac{OA \cdot OC \sin(\alpha + \beta)}{2} = \frac{OA \cdot OB \sin \alpha}{2} + \frac{OB \cdot OC \sin \beta}{2}$. Însă $OA = v_1 \cdot t$; $OB = v_2 \cdot t$; $OC = v_3 \cdot t$, unde t este timpul de parcurs. Înlocuiește, apoi împarte la $v_1 v_2 v_3 \cdot t^2$ pentru a obține relația cerută.



2. Se consideră trapezul $ABCD$ (fig.7) având înălțimea egală cu 10 și lungimile bazelor $AB = 40$, respectiv $CD = 16$.

a) Calculează aria trapezului dat.

b) Datele prezentate sunt suficiente pentru calculul laturii AD ? Dacă nu, precizează încă un element (unghi, latură).

c) Se consideră $M \in (AB)$, $BM = x$ și funcția $f: (0, 40) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{aria}(BCM) - \text{aria}(AMCD)$. Determină imaginea funcției, apoi demonstrează că f se anulează.

$$\text{Rezolvare: a) } \text{aria}(ABCD) = \frac{(AB + DC) \cdot h}{2} = \frac{(40 + 16) \cdot 10}{2} = 280.$$

b) Cunoscând, de exemplu, măsura unghiului A , atunci $AD = \frac{h}{\sin A}$.

c) $f(x) = 5(2x - 56)$, unde $x \in (0, 40)$, iar $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 28 \in (0, 40)$.

3. În figura alăturată, P se află în interiorul pătratului $ABCD$.

a) Cu distanțele PA , PB , PC , PD se poate forma un patrulater (demonstrație fără cuvinte, urmărind figura, în care poți construi $BM \parallel AP$ și $PM \parallel AB$).

b) Demonstrează că aria patrulaterului format, $MBPC$, este jumătate din aria pătratului.

c) Știind că $PA = 2$, $PB = 7$ și $PC = 9$, calculează PD .

Rezolvare:

$$\text{b) } \text{aria}(MBPC) = PM \cdot BC \cdot \frac{\sin(\widehat{PM, BC})}{2} = \frac{BC^2 \sin 90^\circ}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{1}{2} \text{aria}(ABCD);$$

$$\text{c) Notăm cu } x \text{ distanța de la } P \text{ la } BC \text{ și } y \text{ distanța de la } P \text{ la } AB. \text{ Atunci } \begin{cases} x^2 + y^2 = 49 & (1) \\ (l - y)^2 + x^2 = 81 & (2) \text{ unde } l = AB. \\ (l - x)^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Adunând egalitățile (2) și (3) și înlocuind $x^2 + y^2 = 49$, obținem $(l - y)^2 + (l - x)^2 + (x^2 + y^2) = 85$, deci $(l - y)^2 + (l - x)^2 = 36$. Însă $PD^2 = (l - y)^2 + (l - x)^2 = 36$, așadar $PD = 6$.

Observație:

Mai general, știind că P aparține interiorului dreptunghiului $ABCD$, atunci $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

4. În figura 9, $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel, M este mijlocul laturii (AC) , iar $MN \perp BC$. Determină: cât la sută din $\text{aria}(ABC)$ reprezintă $\text{aria}(MNB)$.

Rezolvare:

$$MN = \frac{1}{2}h_a, \text{ iar } BN = \frac{3}{4}BC, \text{ deci } \frac{\text{aria}(MNB)}{\text{aria}(ABC)} = \frac{MN \cdot BN}{BC \cdot h_a} = \frac{\frac{1}{2}h_a \cdot \frac{3}{4}BC}{h_a \cdot BC} = \frac{3}{8} = \frac{37,5}{100}, \text{ așadar } \text{aria}(MNB) = 37,5\% \text{ din } \text{aria}(ABC).$$

5. Relația lui Van Aubel. Se consideră ABC un triunghi oarecare și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ și $C' \in (AB)$.

Dacă AA' , BB' și CC' sunt concurente într-un punct P , atunci: $\frac{PA}{PA'} = \frac{BA}{B'C} + \frac{CA}{C'B}$ și analoge.

Demonstrație: Presupunem că punctul P este în exteriorul $\triangle ABC$;

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{\text{aria}(B'AB)}{\text{aria}(B'CB)} = \frac{\text{aria}(B'AP)}{\text{aria}(B'CP)} = \frac{\text{aria}(B'AB) - \text{aria}(B'AP)}{\text{aria}(B'CB) - \text{aria}(B'CP)} = \frac{\text{aria}(ABP)}{\text{aria}(BCP)}.$$

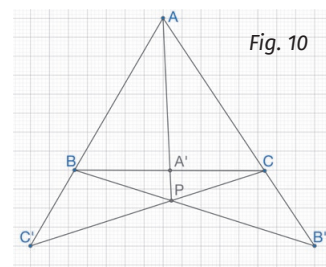
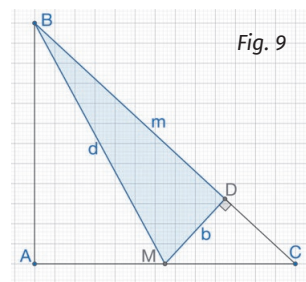
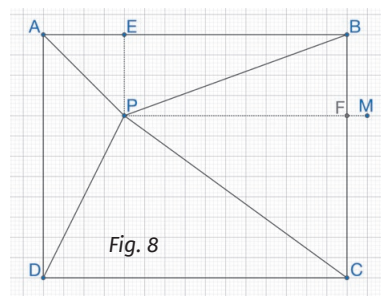
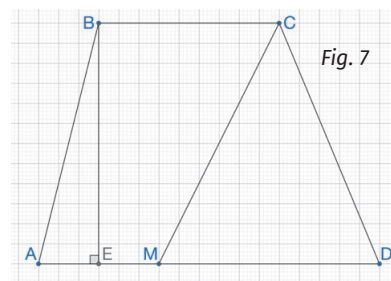
$$\text{Analog: } \frac{C'A}{C'B} = \frac{\text{aria}(PAC)}{\text{aria}(BCP)}.$$

$$\text{Deci, prin adunare, obținem } \frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{\text{aria}(ABP) + \text{aria}(PAC)}{\text{aria}(BCP)} \quad (1).$$

Pe de altă parte,

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{\text{aria}(PAB)}{\text{aria}(PA'B)} = \frac{\text{aria}(PAC)}{\text{aria}(PA'C)} = \frac{\text{aria}(PAB) + \text{aria}(PAC)}{\text{aria}(PA'B) + \text{aria}(PA'C)} = \frac{\text{aria}(PAB) + \text{aria}(PAC)}{\text{aria}(BCP)} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) poți deduce relația cerută.





EXERCITII PROPUSE

A.

- Calculează aria triunghiului ABC în cazurile:
a) $a = 2, B = 45^\circ, A = 30^\circ$; b) $a = 5, b = 6, C = 30^\circ$; c) $a = 6, b = 7, c = 8$.
- Dacă mărim baza unui triunghi cu 10% și micșorăm înălțimea tot cu 10%, cum se modifică aria triunghiului?
a) crește cu 2%; b) crește cu 1%; c) scade cu 1%; d) nu se schimbă.
- Calculează aria paralelogramului $ABCD$ în cazurile:
a) $AB = 6, BC = 8, \widehat{BAD} = 45^\circ$; b) $AB = 4, BD = 6, \widehat{ABD} = 30^\circ$.
- Câte triunghiuri *distincte sub aspect metric* există astfel încât $a = 15, c = 13, S = 24$? De ce am accentuat *sub aspect metric*? Reflectează!
- Calculează înălțimea din A a triunghiului ABC , în cazurile:
a) $a = 40, b = 9, c = 40$; b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{5}$.
- În $\triangle ABC$ cunoaștem $AB = 15, AC = 10$. Justifică faptul că bisectoarea $\angle BAC$ are lungimea mai mică sau egală cu 12.
- a) Determină aria $\triangle ABC$, știind că $a = \sqrt{6}, A = 60^\circ, b + c = 3 + \sqrt{3}$.
b) În trapezul $ABCD$ cunoaștem $AB \parallel CD, AB = 8, CD = 4, AD = 6, BC = 7$. Calculează măsurile unghiurilor, lungimile diagonalelor și aria trapezului.
- Rezolvă triunghiul ABC , cunoscându-i A, B și S .
- (Activitate în pereche)** Demonstrați că în orice triunghi ABC avem relațiile:
a) $S = p(p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; b) $(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = 4S$.

B.

- Determină unghiurile unui triunghi ABC , știind că $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.
- Într-un triunghi ABC cunoaștem $A = \frac{2\pi}{3}, b + c = 5$ și $l_a = \frac{6}{5}$. Calculează aria triunghiului.
- Demonstrează că, dacă într-un triunghi ABC are loc egalitatea $a + h_a = b + h_b$, atunci triunghiul este isoscel sau dreptunghic.
- În triunghiul ABC cunoaștem $AB = AC = 12$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului, știind că are aria maximă.
- Justifică faptul că în orice triunghi are loc inegalitatea $S \leq \frac{p^2}{4}$.
- În triunghiul ABC , se consideră punctele $A' \in (BC); B' \in (AC)$ și $C' \in (AB)$ astfel încât dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente în P . Știind că A', B' și C' sunt variabile (sunt mobile pe laturi), determină valoarea minimă a sumei $\frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'}$.
- În figura 11, latura fiecărui pătrățel este de 2 cm. Află unghiul diagonalelor AC și BD .
- $ABCD$ este un pătrat având latura 2, iar punctele I și L sunt mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[CD]$. Notăm $AL \cap BD = \{K\}$ și $AL \cap BI = \{J\}$. Determină $\operatorname{aria}(DIJK)$.
- Fie $ABCD$ un patrulater inscripabil. Demonstrează că $\frac{AC}{DB} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}$.

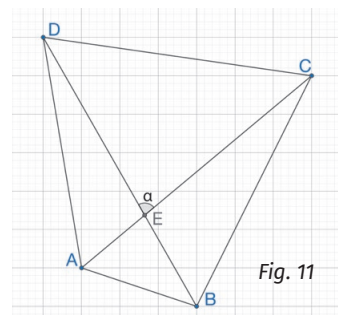


Fig. 11

19. Putem calcula aria unui poligon convex cunoscând lungimile laturilor și distanțele de la un vârf la celelalte vârfuri. Cum? Modelează problema cu ajutorul unei aplicații digitale sau cere unui asistent IA să genereze imagini sugestive pentru a te orienta în rezolvare (construcții auxiliare, după caz).
20. Bucata de tablă din figura 12 a fost tăiată de-a lungul diagonalelor. A fost folosită o parte. Celelalte părți cântăresc 120g, 200g, 300g. Din informațiile date, se poate determina cât cântărește partea folosită? Explică!

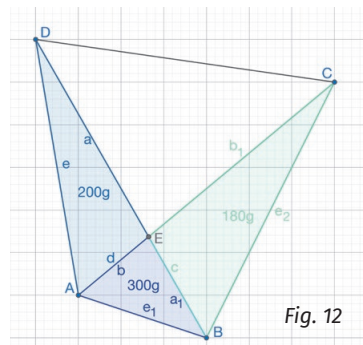


Fig. 12

B. Raza cercului circumscris și raza cercului înscris

Vom utiliza teorema sinusurilor, $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$ și formula dedusă anterior pentru raza cercului circumscris unui triunghi, $R = \frac{abc}{4S}$.

Notăm cu I intersecția bisectoarelor interioare ale $\triangle ABC$; I este centrul cercului înscris în triunghi (fig. 13). Înălțimile triunghiurilor IAB , IAC și IBC sunt egale cu r , iar suma ariilor lor este egală cu S . Obținem:

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr. \text{ Așadar } r = \frac{S}{p}.$$

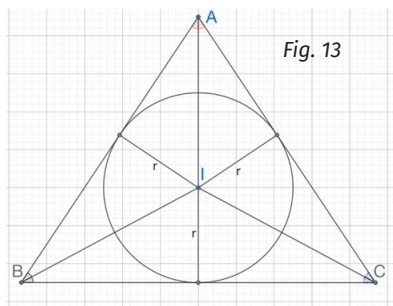


Fig. 13

PROBLEME REZOLVATE

1. În orice triunghi ABC au loc relațiile:

a) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$; b) $AH = 2R|\cos A|$ (unde H este ortocentrul triunghiului).

Rezolvare: a) Folosind relația $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ și analoagele; prin produsul lor obținem

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{S^2/p}{4RS} = \frac{r}{4R}.$$

b) I. Cazul $A < 90^\circ$ (cazul triunghiului ascuțitunghic, fig. 14). Notând E piciorul înălțimii din B , $E \in (AC)$, rezultă $AH = \frac{AE}{\sin C}$ (din triunghiul dreptunghic AEH) și $\cos A = \frac{AE}{c}$ (din triunghiul dreptunghic AEB). Deci $AH = \frac{c \cdot \cos A}{\sin C} = 2R \cos A$.

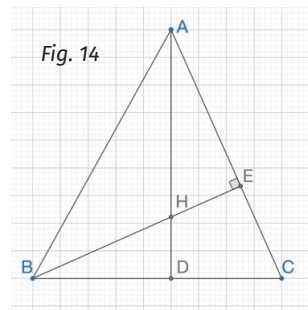


Fig. 14

Același rezultat se obține dacă $B > 90^\circ$ sau $C > 90^\circ$.

II. Cazul $A > 90^\circ$. Înlocuim triunghiul ABC prin triunghiul ascuțitunghic HBC (H ortocentrul).

Atunci $HA = 2R \cos H = 2R \cos(\pi - A) = -2R \cos A = 2R|\cos A|$.

2. Calculează măsurile unghiurilor unui triunghi ABC , știind că $A = 108^\circ$, $h_a = \sqrt{5}$ și $r = 1$.

Rezolvare: $h_a = 2R \sin B \sin C$ și $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, deci $\sqrt{5} = \frac{h_a}{r} = \frac{8 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} =$

$$= 2 \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{B-C}{2} + \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}. \text{ Rezultă } \cos \frac{B-C}{2} = (\sqrt{5} - 1) \sin \frac{A}{2} = (\sqrt{5} - 1) \sin 54^\circ = (\sqrt{5} - 1) \cos 36^\circ.$$

Însă $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, deci $\cos \frac{B-C}{2} = 1$, de unde $\frac{B-C}{2} = 0$, adică $B = C$. În concluzie, $B = C = 36^\circ$.

3. Într-un triunghi ABC are loc relația $R^2 + b^2 + c^2 = a^2$. Demonstrează că triunghiul este dreptunghic.

Rezolvare: Folosind teorema sinusurilor, relația devine: $1 + 4 \sin^2 B + 4 \sin^2 C = 4 \sin^2 A$. Liniarizând pătratele, obținem $1 + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2B}{2} + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2C}{2} = 4 \cdot \frac{1 - \cos 2A}{2}$. Transformând $\cos 2B + \cos 2C$ în produs,

obținem $4\cos^2 A + 4\cos A \cos(B - C) + 1 = 0$ (privită ca o ecuație de gradul al II-lea în $\cos A$). Din $\Delta \geq 0$ rezultă $16\cos^2(B - C) - 16 \geq 0 \Rightarrow \cos^2(B - C) \geq 1 \Rightarrow \cos^2(B - C) = 1$. Deducem $\sin^2(B - C) = 0 \Rightarrow B - C = 0$, adică $B = C$.



PROBLEME PROPUSE

- În triunghiul ABC cunoaștem $R = \sqrt{2}$, $a = 2$ și $h_a = \sqrt{6}$. Calculează raza cercului înscris triunghiului dat.
- Știind că ABC este obtuzunghic ($C > 90^\circ$), $S = 5\sqrt{3}$, $a = 4$ și $b = 5$, calculează c , R și r .
(**Activitate pe grupe:** abordați individual fiecare dintre cerințele 3)-6), apoi prezentați strategiile de rezolvare, comparați, discutați și formulați concluziile care sprijină o învățare profundă)
- În ΔABC , $a = 3\sqrt{3}$, $R = 3$ și $b^2 + c^2 < 27$. Determinați $\cos A$.
- În ΔABC , $a = 6\sqrt{2}$, $h_a = 6$ și $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Determinați R și r .
- În ΔABC , $m_a = 7$, $m_c = 2\sqrt{19}$ și $A = \frac{\pi}{3}$. Determinați a , b , c , R și r .
- În ΔABC , $h_a = 2\sqrt{2}$, $h_b = 2\sqrt{3}$ și $h_c = 6 - 2\sqrt{3}$. Determinați R , r .
- Un cerc este înscris într-un trapez. Demonstrează că, dacă AB , DC sunt bazele trapezului și O centrul cercului, atunci ΔBOC este dreptunghic și raza cercului este înălțime.
- Trapezul $ABCD$ este înscris în cercul de rază R . Baza mare este $AB = 12$, iar $AD = 3$ și $\widehat{DAB} = 60^\circ$. Determină R .
- Într-un cerc de rază 8 se înscrie un triunghi de arie 40. Calculează produsul laturilor triunghiului dat.
- (**Activitate în pereche**) Demonstrați că în orice ΔABC au loc relațiile:
 a) $r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; b) $p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$; c) $p - a = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;
 d) $p = r \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)$; e) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$;
 f) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$; g) $m_a^2 = R^2 (\sin^2 A + 4\cos A \sin B \sin C)$.
- Se consideră I centrul cercului înscris în ΔABC .
 a) Demonstrează că $AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.
 b) Știind că triunghiurile IAB , IAC și IBC au același perimetru, demonstrează că ΔABC este echilateral.
- Demonstrează că în orice triunghi au loc inegalitățile:
 a) $p \geq 4r$; b) $AH < 2R$.



Teorema bisectoarei. Teorema lui Stewart

A. Teorema bisectoarei

Ne reamintim că pentru orice triunghi ABC , bisectoarea interioară a unghiului A este semidreapta $(AD, D \in (BC))$, care împarte unghiul în două unghiuri adiacente congruente. În plus, pentru cazul $AB < AC$, bisectoarea unghiului $\angle BAC'$ (exterior triunghiului) este numită bisectoarea exterioară a unghiului A , unde (AC') este semidreapta opusă semidreptei (AC) . În acest caz, $(AD', B \in (D'C))$, împarte unghiul $\angle BAC'$ în două unghiuri adiacente congruente (fig. 1).

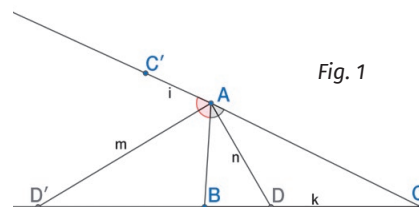


Fig. 1

Teorema bisectoarei interioare. Considerăm triunghiul ABC și $D \in (BC)$. Semidreapta (AD) este bisectoarea interioară a unghiului $\angle BAC$ dacă și numai dacă are loc relația $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstrație: Considerăm că (AD) este bisectoarea interioară și aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile ABD , respectiv ADC . Obținem $\frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$ (1) și $\frac{DC}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$ (2). Deoarece $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$, obținem, prin împărțirea relațiilor (1) și (2), relația $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Reciproc, considerăm $D \in (BC)$ și $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Presupunem că (AD) nu este bisectoarea unghiului A și fie (AD_0) bisectoarea acestui unghi, $D_0 \in (BC)$. Atunci, aplicând teorema directă, va rezulta $\frac{BD_0}{D_0C} = \frac{AB}{AC}$, deci $\frac{BD_0}{D_0C} = \frac{BD}{DC}$, contradicție cu faptul că există un unic punct interior segmentului (BC) care îl împarte într-un raport dat.

Teorema bisectoarei exterioare. Știind că ABC este un triunghi cu $AB \neq AC$, atunci (AD') este bisectoarea exterioară a unghiului A (unde D' se află pe dreapta suport a laturii BC , în exteriorul laturii) dacă și numai dacă $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$.

Parcurge pașii de raționament similar cu cei din demonstrația anterioară, aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile $D'AB$ și $D'AC$. Acordă atenție ambelor implicații!

PROBLEME REZOLVATE

1. Calculul lungimii bisectoarei

Se consideră $D \in (BC)$ și (AD) bisectoarea unghiului $\angle A$ a unui triunghi ABC cu laturile de lungimi a, b, c .

a) Exprimă lungimile DB și DC în funcție de a, b și c .

b) Demonstrează că $AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$.

c) Demonstrează că $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$.

Rezolvare: a) Din teorema bisectoarei obținem $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$. Utilizând proporții derivate, vom avea $\frac{DB}{DB+DC} = \frac{c}{c+b}$, $\frac{DC+DB}{DC} = \frac{c+b}{b}$, de unde $DB = \frac{ac}{b+c}$ și $DC = \frac{ab}{b+c}$.

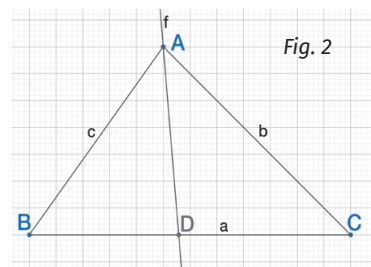


Fig. 2

b) Din teorema sinusurilor în triunghiul ABD obținem $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \frac{A}{2}}$, deci $AD = \frac{ac \sin B}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$ (1).

Cum $asin B = b \sin A$ (teorema sinusurilor), înlocuind în (1) obținem $AD = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } AD^2 &= \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2} \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2} \cdot \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{bc}{(b+c)^2} (a+b+c)(b+c-a) = \frac{bc}{(b+c)^2} ((b+c)^2 - a^2) = \\ &= bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = AB \cdot AC - BD \cdot DC. \end{aligned}$$

2. Se consideră $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu $AB \parallel DC$ și $\widehat{ADC} = 90^\circ$. Paralela prin O la baze intersectează AD și BC în E , respectiv F . Arată că (EF) este bisectoarea unghiului $\widehat{CEB}$.

Rezolvare: $\frac{CF}{FB} = \frac{CO}{OA} = \frac{DC}{AB}$ (Thales) (1). $\frac{DE}{EA} = \frac{DO}{OB} = \frac{DC}{AB}$ (Thales) (2)

Din (1) și (2) rezultă $\frac{DE}{EA} = \frac{DC}{AB}$ (3), de unde $\triangle DEC \sim \triangle AEB$ (cazul L.U.L.).

Din asemănare rezultă că $\frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB} = \frac{CF}{FB}$. Folosind reciproca teoremei bisectoarei, obținem că (EF) este bisectoarea unghiului $\widehat{CEB}$.

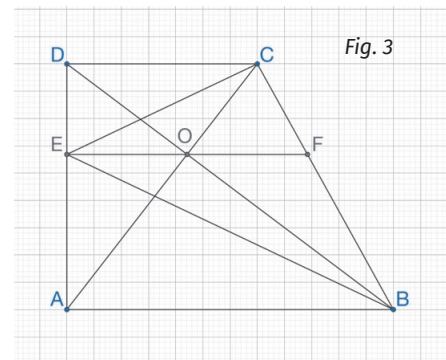
3. Demonstrează că, dacă într-un triunghi două bisectoare interioare sunt egale, atunci triunghiul este isoscel.

Rezolvare: Notând cu l_a și l_b lungimile bisectoarelor unghiurilor $\widehat{A}$, respectiv $\widehat{B}$, demonstrăm că $A = B$.

Din problema rezolvată 1) avem echivalențele: $l_a = l_b \Leftrightarrow \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2ac \cdot \cos \frac{B}{2}}{a+c} \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{a(b+c)}{b(a+c)} = \frac{ab+ac}{ab+bc}$ (1).

Presupunem că $A > B$ (2). Rezultă $a > b$, de unde avem $ab+ac > ab+bc$, iar din (1) avem:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} > 1 &\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} > \cos \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} < \frac{B}{2} \text{ (justifică!) } \Leftrightarrow A < B, \text{ deci contradicție cu (2). Am ținut cont că } \\ \frac{A}{2}, \frac{B}{2} &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$



EXERCIȚII PROPUSE

- În $\triangle ABC$, $AB = 6$, $BC = 8$ și $AC = 2\sqrt{13}$. Calculează lungimea bisectoarei interioare a unghiului B .
- În $\triangle ABC$, (AD bisectoare și $D \in (BC)$). Știind că $AB = 40$, $AC = 50$ și $9AD = 200$, calculează BC .
- În $\triangle ABC$, (BD și (CE) sunt bisectoare, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$). Știind că $BE = CD$, verifică faptul că triunghiul ABC este isoscel.
- (AD este bisectoarea unghiului A în $\triangle ABC$, $D \in (BC)$). Se cunosc $BD = 4$, $DC = 8$ și $AD = 4\sqrt{7}$. Calculează AB și AC .
- Se consideră I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$ și (AA' bisectoare, $A' \in BC$). Arată că $\frac{IA}{IA'} = \frac{b+c}{a}$.
- În $\triangle ABC$, considerăm M mijlocul laturii AC , (MD este bisectoarea $\angle AMB$, $D \in (AB)$), iar $DE \parallel BC$, $E \in (AC)$. Justifică faptul că $\angle DME = 90^\circ$.
- În $\triangle ABC$, considerăm I centrul cercului înscris și G centrul de greutate. Demonstrează că $IG \parallel BC$ dacă și numai dacă $AB + AC = 2BC$.
- În $\triangle ABC$, M este mijlocul laturii AC , iar B' este piciorul înălțimii din B . Știind că (BM) împarte unghiul B în trei părți egale, determină măsurile unghiurilor $\triangle ABC$.
- Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MC} = \sin C$. Bisectoarea $\angle BMC$ intersectează BC în O și paralela prin C la BM în N . Știind că patrulaterul $BMCN$ este paralelogram, demonstrează că $AO \perp NC$.

10. În $\triangle ABC$ cunoaștem $BC = 30, AB = 20$ și (BD bisectoarea $\sphericalangle B, D \in (AC)$). Construim $DE \parallel AB, E \in BC$ și $EF \parallel BD, F \in DC$. Calculează AC , știind că $AD - FC = 1$.
11. În dreptunghiul $ABCD$, bisectoarea $\sphericalangle BAD$ intersectează BD în E și BC în F . Paralela prin E la AB intersectează AC în G . Demonstrează că G este ortocentrul $\triangle BEF$.
12. În $\triangle ABC$, (AE bisectoare exterioară a unghiului $A, E \in BC$). Știind că $AB > AC$, demonstrează că:
 a) $BE = \frac{ac}{c-b}, CE = \frac{ab}{c-b}$; b) $AE = \frac{2bc}{c-b} \cdot \sin \frac{A}{2}$; c) $AE^2 = EB \cdot EC - AB \cdot AC$.
13. În figura 4, triunghiul OAD este isoscel, iar $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = 45^\circ$. Demonstrează că $AB^2 = AD \cdot BC$.

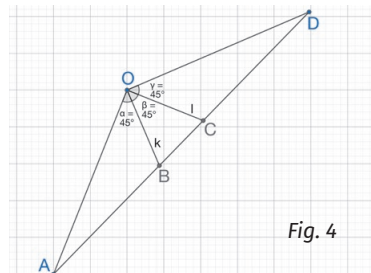


Fig. 4

B. Teorema lui Stewart

Considerăm M un punct pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC . Atunci avem relația:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot MC \cdot MB \quad (\text{Relația lui Stewart}).$$

Demonstrație: Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile ABM și ABC :
 $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos B$; $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$.

Înmulțim prima egalitate cu BC , a doua cu BM , apoi le scădem. Obținem $AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM = AB^2(BC - BM) + BM \cdot BC(BM - BC) = AB^2 \cdot MC - BM \cdot BC \cdot MC$.

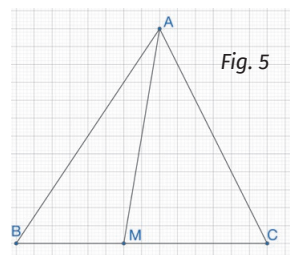


Fig. 5



OBSERVAȚII

1. Folosim *relația lui Stewart* pentru calculul lungimii AM , cu $M \in (BC)$.
2. În cazul $M \in BC \setminus [BC]$ (nu este interior laturii), relația anterioară *nu este adevărată*. Însă, procedând ca mai sus în demonstrația teoremei, obținem, corespunzător cazului $B \in (MC)$, relația

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC - AC^2 \cdot BM + BM \cdot MC \cdot BC (*).$$

Atenție: se modifică semnele unor termeni din relația directă.

Relația (*) poate fi obținută aplicând Stewart pentru $\triangle AMC$ și $B \in (MC)$ (fig.6). La fel putem proceda în cazul $C \in (BM)$. Verifică!

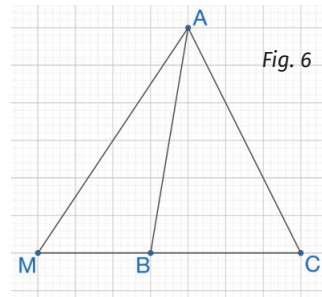


Fig. 6

Aplicații rezolvate ale teoremei lui Stewart

1) *Calculul distanței de la un vârf la un punct al laturii opuse al unui triunghi.*

Considerăm triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = k$. Demonstrăm că

$$AM^2 = \frac{1}{k+1} AB^2 + \frac{k}{k+1} AC^2 - \frac{k}{(k+1)^2} BC^2.$$

Demonstrație: Din proporția dată, obținem segmentele: $MB = \frac{k}{k+1} BC$ și $MC = \frac{1}{k+1} BC$. Aplicăm teorema lui Stewart: $AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BM \cdot MC \cdot BC$. Înlocuim MB și MC , și obținem $AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot \frac{1}{k+1} BC + AC^2 \cdot \frac{k}{k+1} BC - \frac{k}{(k+1)^2} BC^3$. Împărțind toată relația prin BC și obținem

$$AM^2 = \frac{1}{k+1} AB^2 + \frac{k}{k+1} AC^2 - \frac{k}{(k+1)^2} BC^2 (*).$$

Cazuri particulare

În cele ce urmează, considerăm $\triangle ABC$.

a) Teorema medianei

Știind că M este mijlocul laturii BC , suntem în cazul $k = 1$ și relația (*) devine $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$.

b) Calculul lungimii bisectoarei interioare

Știind că $M \in (BC)$ este piciorul bisectoarei din A , atunci $k = \frac{c}{b}$ (din teorema bisectoarei), iar relația (*) devine $AM^2 = \frac{bc^2}{b+c} + \frac{cb^2}{b+c} - \frac{bca^2}{(b+c)^2} = bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2}$.

Regăsim relațiile $AM^2 = AB \cdot AC - BM \cdot MC$ sau $AM = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$ (deoarece $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$).

Observație: Putem atribui lui k diverse valori, obținând și alte distanțe remarcabile.

Componentă pentru portofoliu: Cere unui asistent IA să modeleze diferite situații particulare, inclusiv cum se particularizează relația lui Stewart pentru cazul unor triunghiuri particulare precum cel echilateral, dreptunghic sau isoscel, validând rezultate cunoscute pentru acestea. Validează ceea ce prezintă IA, în discuții la nivelul clasei.

2) Calculul distanței dintre puncte remarcabile într-un triunghi (centrul de greutate, centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, ortocentrul etc.)

Considerând M un punct în planul triunghiului ABC și centrul său de greutate, G , are loc relația

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2$$

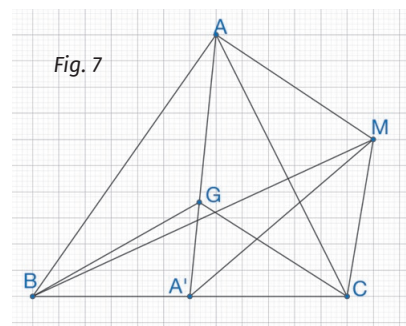
(Relația lui Leibniz, 1646-1716, matematician german căruia îi datorăm și conceptul de funcție).

Demonstrație:

Cu notațiile din figura 7, scriem relația (*) pentru $\triangle MAA'$ și punctul $G \in (AA')$, având raportul

$$\begin{aligned} k &= \frac{GA}{GA'} = 2. \text{ Ținând cont de } A'M^2 = \frac{2(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4} \text{ (din teorema} \\ &\text{mediane pentru } \triangle MBC), \text{ obținem } MG^2 = \frac{1}{3}MA^2 + \frac{2}{3}A'M^2 - \frac{2}{9}A'A^2 = \\ &= \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{BC^2}{12} - \frac{2}{27} \cdot A'A^2 = \\ &= \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{6}(GB^2 + GC^2 - 2GA'^2) - \frac{2}{27} \cdot \frac{9}{4} \cdot AG^2 = \\ &= \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2). \end{aligned}$$

Relația lui Leibniz este adevărată pentru orice alegere a punctului M în plan.


Particularizări

1. $M = O$ (centrul cercului circumscris)

Obținem $3OG^2 = 3R^2 - GA^2 - GB^2 - GC^2 = 3R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, deci $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ (1).

2. $M = H$ (ortocentrul triunghiului ascuțitunghic)

Obținem $3HG^2 = HA^2 + HB^2 + HC^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$. Cum $HA^2 = 4R^2 - a^2$ (obținut în capitolul de anterior) și înlocuind în formula lui Leibniz, obținem $3HG^2 = 12OG^2 \Rightarrow HG^2 = 4\left(R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\right)$.

Rezultă $HG^2 = 4OG^2 \Rightarrow HG = 2OG$ (2) și, ținând cont că punctele O, G, H sunt coliniare (determinând dreapta lui Euler), obținem $OH^2 = (3OG)^2 = 9OG^2$, adică $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ (3). Aplicând teorema

lui Stewart, obținem asemănător $OI^2 = \frac{R^2(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2} = R^2 - \frac{abc}{2p}$ (4)


OBSERVAȚII

1. Din prima relație obținem $0 \leq OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$. Rezultă că $R^2 \geq \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$. Egalitatea se obține pentru $\triangle ABC$ echilateral ($O = G$).

2. Din $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, în cazul triunghiului ascuțitunghic obținem relația $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C)$ și cum $OH^2 \geq 0$, rezultă $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$, cu egalitate pentru triunghiul echilateral.

3. Relația (4) poate fi scrisă în forma $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{2p} = R^2 - 2Rr = R(R - 2r)$. Cum $OI^2 \geq 0$, deducem că $R \geq 2r$, cu egalitate pentru triunghi echilateral.



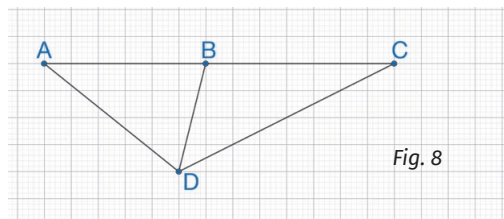
PROBLEME PROPUSE

A.

1. În $\triangle ABC$, $BC = 12$, $B = 60^\circ$ și $C = 45^\circ$. Calculează lungimile medianei și bisectoarei din A .
2. Știind că D și E sunt picioarele bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$, respectiv $\hat{C}$, iar $EB = CD$, demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.
3. Un trapez $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ și $DA = d$, $a > c$. Calculează lungimile diagonalelor.
4. Punctul M aparține ipotenuzei (BC) a triunghiului ABC . Verifică faptul că $AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot AM^2$ (Relația lui Van Aubel).
5. Demonstrează că, în triunghiul ABC , medianele AA' și CC' sunt perpendiculare $\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 5b^2$.
6. (**Activitate în pereche**) În patrulaterul $ABCD$, E și F sunt mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD .
a) Demonstrați că $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$.
b) Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor (Relația lui Euler).

B.

7. Se consideră ABC un triunghi și M un punct în planul său. Pentru ce poziție a lui M , suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este minimă?
8. Într-un triunghi ABC are loc relația $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$. Demonstrează că triunghiul este echilateral.
9. În figura 8, prin $A - B - C$ este reprezentată schematic o autostradă (puncte coliniare) și $[BC]$ corespunde unui tunel. Măsurând distanțele DA , DB , AB și DC , poți afla lungimea tunelului? Justifică.



MATEMATICA SUB SEMNUL ÎNTREBĂRII

Enigma matematicianului: Unde trebuie să stai?

În problema 7 se demonstrează că există o poziție a punctului M pentru care $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este minimă.

Întrebare:

Dacă ai putea alege locul în care construiești: • o școală; • un spital; • un centru de distribuție; între trei localități reprezentate prin punctele A , B și C , ar fi suficient să minimizezi suma distanțelor?

Gândește critic:

Care este diferența dintre: • cea mai bună soluție matematică; • cea mai bună soluție în realitate?

Ideea mare: *Matematica poate indica soluția optimă pentru un model. Decizia finală aparține întotdeauna oamenilor.*

Coliniaritate și concurență în geometria plană

A. Probleme de coliniaritate

Reamintind că trei sau mai multe puncte se numesc *colinare* dacă aparțin aceleași drepte. În cele ce urmează vom evidenția câteva procedee de a *proba coliniaritatea* a trei sau patru puncte.

1. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă $AB + BC = AC$, b aparține segmentului AC .



EXEMPLU

$ABCD$ este un patrulater convex, iar M și N sunt mijloacele laturilor $[AB]$ și $[CD]$. Dacă $MN = \frac{AD + BC}{2}$, atunci punctele M, N și mijloacele diagonalelor sunt coliniare. În plus $AD \parallel BC$.

Rezolvare: Notăm prin P mijlocul diagonalei $[AC]$. În $\triangle ABC$, MP este linie mijlocie, deci $MP = \frac{1}{2}BC$ și $MP \parallel BC$. De asemenea, PN este linie mijlocie în $\triangle CAD$, deci $PN = \frac{AD}{2}$ și $PN \parallel AD$.

Rezultă că $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = MP + PN$. În concluzie, M, P și N sunt coliniare și dreapta determinată de aceste puncte este paralelă cu AD și BC . Prin urmare, $AD \parallel BC$.

2. Suma unghiurilor este 180° .

Considerăm semidreptele $(BA, (BX, (BY$ și $(BC$ astfel încât $(BX$ și $(BY$ sunt incluse în interiorul $\angle BAC$. Punctele A, B, C sunt colinare dacă $\angle ABX + \angle XBY + \angle YBC = 180^\circ$.

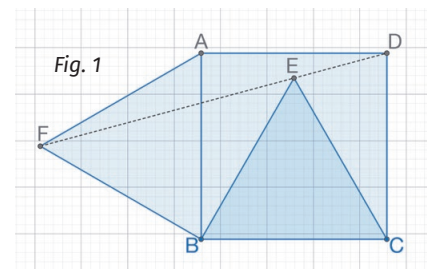


Fig. 1



EXEMPLU

Punctele E și F sunt poziționate în planul pătratului $ABCD$ astfel încât triunghiurile ABF și BEC sunt echilaterale. Punctul E este interior pătratului, iar F este exterior. Demonstrează că F, E și D sunt coliniare (fig. 1).

Rezolvare: În $\triangle DCE$ (isoscel), avem $\widehat{DCE} = 30^\circ$, deci $\widehat{DEC} = 75^\circ$. Cum $\widehat{FBE} = 90^\circ$, rezultă $\widehat{FEB} = 45^\circ$ (deoarece $\triangle FBE$ este dreptunghic isoscel, $FB = BE$), de unde $\widehat{FED} = \widehat{FEB} + \widehat{BEC} + \widehat{DEC} = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ$. Prin urmare, punctele F, E și D sunt coliniare.

3. Utilizarea postulatului lui Euclid

Dacă $AB \parallel d$ și $BC \parallel d$, atunci punctele A, B, C sunt coliniare.



EXEMPLU

În $\triangle ABC$, cu $AB < AC$, considerăm E proiecția vârfului B pe bisectoarea interioară a unghiului A , P mijlocul laturii $[AB]$ și M mijlocul laturii $[BC]$. Verifică faptul că punctele P, E și M sunt coliniare.

Rezolvare: Observăm că $MP \parallel AC$, ca linie mijlocie în $\triangle ABC$. De asemenea, observăm că $D \in (BM)$ (Justifică!). În $\triangle ABE$ dreptunghic, EP este mediană relativă la ipotenuză, deci $\triangle EPA$ este isoscel, ceea ce implică congruența unghiurilor $\widehat{PEA} \equiv \widehat{PAE} \equiv \widehat{EAC}$. Rezultă că unghiurile alterne interne formate de PE și AC cu secanta AE sunt egale, deci $PE \parallel AC$. Deoarece printr-un punct (în cazul nostru P) se poate duce o singură paralelă la o dreaptă dată (AC), iar $PE \parallel AC$ și $MP \parallel AC$, rezultă – conform postulatului lui Euclid – că punctele P, E și M sunt coliniare.

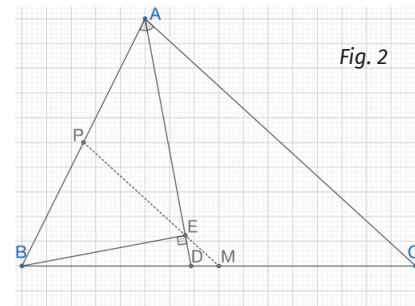
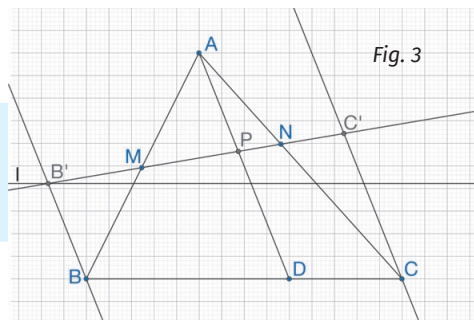


Fig. 2

4. Teorema transversalei

Reține că o dreaptă care nu conține niciun vârf al triunghiului ABC se numește *transversală*.

În $\triangle ABC$ considerăm punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $D \in (BC)$, $P \in (AD)$. Atunci punctele M, P și N sunt coliniare dacă și numai dacă are loc relația $\frac{BM}{MA} \cdot DC + \frac{CN}{NA} \cdot BD = \frac{DP}{PA} \cdot BC$.



Demonstrație: Dacă punctele M, P și N sunt coliniare, construim $BB' \parallel AD$ și $CC' \parallel AD$. Cum $\triangle BMB' \sim \triangle AMP$ (justifică!), obținem $\frac{BM}{MA} = \frac{BB'}{PA}$ (1). La fel, din asemănare, obținem $\frac{CN}{NA} = \frac{CC'}{PA}$ (2). Înmulțim egalitățile (1) și (2) cu DC , respectiv BD . Obținem prin adunare relația $\frac{BM}{MA} \cdot DC + \frac{CN}{NA} \cdot BD = \frac{BB' \cdot DC + CC' \cdot DB}{PA}$ (3). Obținem $BCC'B'$ trapez, iar dreapta DP este paralelă la bazele. Din asemănare are loc relația $\frac{BD}{BC} = \frac{DP - BB'}{CC' - BB'}$ (justifică!), echivalent cu $BB' \cdot DC + CC' \cdot DB = BC \cdot DP$.

Reciproc, dacă relația dată are loc, demonstrăm că punctele M, N și P sunt coliniare. Considerând $\{P'\} = MN \cap AD$ și folosind teorema directă, obținem: $\frac{DP'}{P'A} = \frac{DP}{PA}$. Deoarece P și P' sunt interioare segmentului (AD) și îl împart în același raport, atunci ele coincid ($P = P'$).

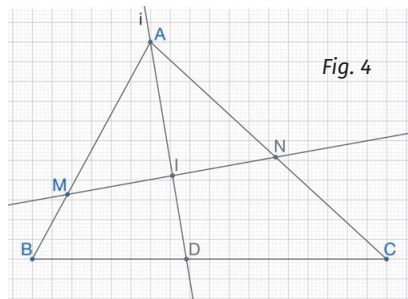
Observație: Dreapta punctelor M, P și N este *transversală* pentru triunghiul dat.



EXEMPLU DE APLICARE A TEOREMEI TRANSVERSALEI

În triunghiul ABC , considerăm $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ pentru care $\frac{BM}{MA} = x$ și $\frac{CN}{NA} = y$. Demonstrează că M, N și centrul cercului înscris sunt coliniare dacă și numai dacă $bx + cy = a$.

Rezolvare: Notăm cu I centrul cercului înscris și considerăm (AD) bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Conform teoremei transversalei, punctele M, I și N sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{BM}{MA} \cdot DC + \frac{CN}{NA} \cdot BD = \frac{DI}{IA} \cdot BC$ (*). Însă, din teorema bisectoarei cunoaștem lungimile segmentelor de pe bază $DC = \frac{ab}{b+c}$ și $DB = \frac{ac}{b+c}$, iar raportul în care centrul cercului înscris împarte bisectoarea este $\frac{DI}{IA} = \frac{DB}{AB} = \frac{a}{b+c}$. Astfel, relația (*) este echivalentă cu $x \cdot \frac{ab}{b+c} + y \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{a}{b+c} \cdot a$. Înmulțind toată relația cu $\frac{b+c}{a}$, obținem $bx + cy = a$.



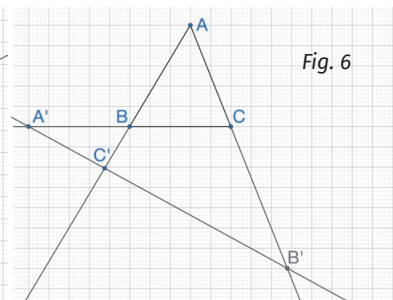
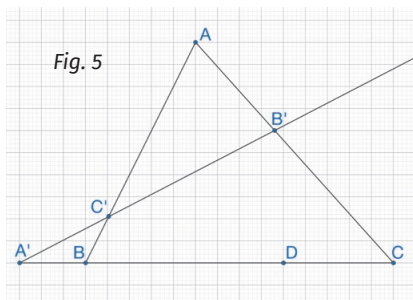
5. Teorema lui Menelaus

Considerăm triunghiul ABC și o *transversală* care intersectează dreptele BC , AC și AB în punctele A' , B' , respectiv C' .

Avem două cazuri posibile:

(1) A' este exterior laturii $[BC]$, iar B', C' sunt interioare laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$ (fig.5).

(2) Punctele A', B' și C' sunt toate exterioare laturilor triunghiului (fig.6).

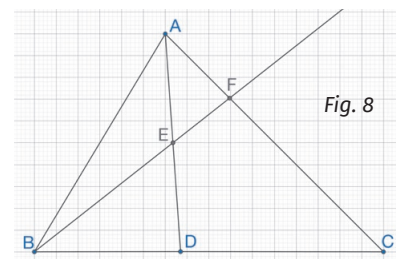
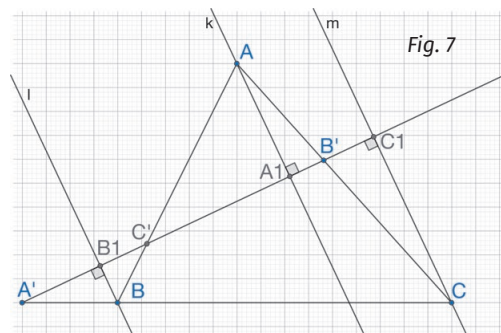


Teorema lui Menelaus: Punctele A', B' și C' sunt coliniare dacă și numai dacă: $\frac{A'B}{AC} \cdot \frac{B'C}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$.

Demonstrație: Avem în vedere cazul (1) și rămâne să procedezi asemănător și pentru cazul (2).

Începem cu premisa că A', B' și C' sunt coliniare. Pentru aceasta, proiectăm vârfurile triunghiurilor pe transversală, în punctele A_1, B_1, C_1 (fig.7). Din asemănarea triunghiurilor formate obținem $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1}$ ($\triangle A'B B_1 \sim \triangle A'C C_1$), $\frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1}$ și $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1}$. Înmulțind egalitățile, obținem egalitatea cerută.

Pentru *reciprocă*, considerăm că dreapta $A'B'$ intersectează latura $[AB]$ în C'' ($B' \in (AC)$, $A' \in BC$ exterior). Utilizând teorema directă, rezultă că $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$. Din relațiile obținute avem $\frac{C'A}{C'B} = \frac{C''A}{C''B}$. Deoarece C' și C'' sunt interioare segmentului (AB) și îl împart în același raport, rezultă că $C'' = C'$, deci A', B' și C' sunt coliniare.



EXEMPLE DE APLICARE A TEOREMEI LUI MENELAUS

1) În $\triangle ABC$, considerăm $F \in (AC)$ și $E \in (AD)$ astfel încât $\frac{BD}{DC} = 2$ și $\frac{AE}{ED} = 1$. Calculează $\frac{AF}{FC}$ (fig.8).

Rezolvare: Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle ADC$ cu transversala $B - E - F$, deci $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{ED} = 1$, de unde $\frac{FA}{FC} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EA}{ED} = \frac{2}{3}$.

2) În $\triangle ABC$ ascuțitunghic, $AB > AC$, M este mijlocul laturii $[BC]$, $A' \in (BC)$ este piciorul perpendicularei din A , iar I este centrul cercului înscris (fig.9). Știind că $F \in (AA')$ astfel încât $AF = r$, demonstrează că punctele M, I, F sunt coliniare.

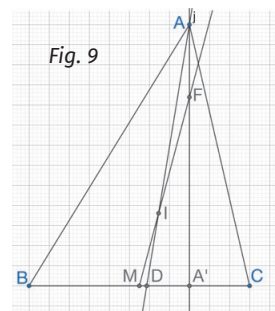
Rezolvare: Considerăm $AB > AC$ ($c > b$). Fie D piciorul bisectoarei din A ($D \in BC$). Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle ADA'$ pentru transversala $M - I - F$, adică verificăm dacă are loc relația $\frac{MD}{MA'} \cdot \frac{FA'}{FA} \cdot \frac{IA}{ID} = 1$.

Remarcăm mai întâi ordinea punctelor pe latura BC : $B - M - D - A' - C$, deoarece $BM < BD < BA' < BC$ (verifică!). Obținem $BA' = AB \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$ și $A'C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$. Prin urmare, calculăm rapoartele:

$$\frac{MD}{MA'} = \frac{MC - DC}{MC - A'C} = \frac{\frac{a}{2} - \frac{ab}{b+c}}{\frac{a}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}} = \frac{\frac{a^2}{(b+c)^2}}{\frac{FA}{AA'}} = \frac{r}{\frac{2S}{a}} = \frac{ar}{2S} = \frac{ar}{2rp} = \frac{a}{a+b+c} \Rightarrow \frac{FA}{FA'} = \frac{a}{b+c}.$$

Se numește **forță medie** în intervalul de timp Δt $\frac{IA}{ID} = \frac{b+c}{a}$ (rezultat obținut anterior).

Finalizăm, verificând că produsul rapoartelor este 1: $\frac{MD}{MA'} \cdot \frac{FA'}{FA} \cdot \frac{IA}{ID} = \frac{a^2}{(b+c)^2} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{b+c}{a} = 1$. Rezultă, conform reciprocei Teoremei lui Menelaus, că punctele M, I și F sunt coliniare.



PROBLEME PROPUSE

În toate situațiile-problemă propuse, utilizează o aplicație digitală pentru a reprezenta configurațiile geometrice date și pentru a valida prin lectură grafică cerințele.

A.

- Se consideră rombul $ABCD$, cu $AB = 10$ și $AC = 10\sqrt{3}$. Pe laturile rombului construim, în exterior, triunghiurile echilaterale ABF și ADE .
a) Verifică faptul că punctele F, B și C sunt coliniare; b) Calculează FE și deduce că F, A și E sunt coliniare.
- Se consideră $ABCD$ paralelogram cu $AB > BC$, punctul $M \in (AB)$ astfel încât $BM = BC$ și punctul $N \in (DA)$ astfel încât $DN = DC$. Demonstrează că N, M și C sunt coliniare.
- Se consideră $\triangle ABC$ cu centrul de greutate G și A' simetricul lui A față de mijlocul segmentului $[BC]$. Pe semidreapta (BG) se consideră punctul B' astfel încât $BB' = 3BG$. Demonstrează că A', C și B' sunt coliniare.

4. Laturile neparalele AB și DC ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul E , iar diagonalele în O . Verifică faptul că E, O și mijloacele bazelor sunt toate coliniare.
5. Se consideră triunghiul ABC și $M \in (BC)$. Paralelele prin M la AB și AC intersectează AC și AB în B' , respectiv C' . Paralela prin C la AB intersectează BB' în B'' , iar paralela prin B la AC intersectează CC' în C'' . Demonstrează că A, C'' și B'' sunt coliniare.

B.

6. Diagonalele paralelogramului $ABCD$ se intersectează în E . O dreaptă oarecare dusă prin E intersectează AB și CD în F , respectiv G . Diagonalele patrulaterului $BFGC$ se intersectează în H , iar diagonalele patrulaterului $AFGD$ se intersectează în I . Demonstrează că H, E și I sunt coliniare.
7. ABC este un triunghi isoscel, iar $D \in AB$ și $E \in (AC)$ astfel încât $B \in (AD)$ și $BD = CE$. Știind că M este mijlocul segmentului $[DE]$, demonstrează că B, M și C sunt coliniare.
8. Se consideră punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$. Verifică faptul că M, N și centrul de greutate al $\triangle ABC$ sunt coliniare.
9. **(Activitate pe grupe: lectura individuală a informației, discuție la nivel de grup asupra înțelegerii contextului, abordare individuală a raționamentului, apoi discuții și concluzii la nivel de grup)**

Un parc de afaceri este reprezentat schematic sub forma unui triunghi ABC . Primăria a aprobat trecerea unei magistrale subterane de fibră optică. Din motive tehnice, traseul acesteia trebuie să fie o linie dreaptă perfectă care traversează parcul, intersectând gardul AB în punctul M și gardul AC în punctul N . Magistrala continuă în afara parcului de afaceri și se intersectează cu prelungirea străzii BC într-un punct de joncțiune principal P .

● Punctul de joncțiune P se află pe prelungirea laturii BC (dincolo de punctul C), astfel încât distanța de la B la P este de 3 ori mai mare decât distanța de la C la P . Așadar, $\frac{BP}{CP} = 3$.

● Punctul de intrare a fibrei în parc, M , se află pe gardul AB , împărțind această latură în raportul $\frac{AM}{MB} = 2$. Pentru a monta o casetă de mentenanță, inginerii trebuie să sape exact în punctul N de pe gardul AC . Pentru a evita distrugerea inutilă a spațiului verde prin săpături exploratorii, determinați în ce raport împarte punctul N latura AC .

10. În $\triangle ABC$ se consideră punctul $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{BM}{MA} = \frac{1}{4}$, iar P mijlocul medianei AA' . Calculează $\frac{QA}{QC}$, unde $\{Q\} = MP \cap AC$.
11. ABC este un triunghi isoscel, $D \in AB, E \in (AC)$ astfel încât $B \in (AD)$ și $BD = CE$. Știind că M este mijlocul segmentului $[DE]$, demonstrează că B, M și C sunt coliniare.
12. În $\triangle ABC$, (AD) este bisectoare cu $D \in (BC)$ și BE este mediană cu $E \in AC$. Știind că $AD \cap BE = \{P\}$, demonstrează că $\frac{PB}{PE} = 2 \frac{AB}{AC}$.
13. Se consideră $\triangle ABC, AB = c, AC = b$ și punctele $D, E \in BC$ astfel încât $B \in (DC), C \in (EB), CE = b$ și $DB = c$. Fixăm un punct M pe bisectoarea din A și notăm $DM \cap AB = \{U\}$ și $EM \cap AC = \{V\}$. Demonstrează că $UV \parallel BC$.
14. În triunghiul ABC , neisoscel, $(AA_1), (BB_1)$ și (CC_1) sunt bisectoarele sale interioare. Considerăm $B_1C_1 \cap BC = \{A_2\}, A_1B_1 \cap AB = \{C_2\}$ și $A_1C_1 \cap AC = \{B_2\}$. Demonstrează că A_2, B_2 și C_2 sunt colinare.
15. Se consideră ABC un triunghi ascuțitunghic și H piciorul înălțimii din A . Construim $HD \perp AB$ și $HE \perp AC$, unde $D \in AB$ și $E \in AC$. Dreptele DE și BC se intersectează în A' . Analog se obțin punctele B', C' . Demonstrează că: a) $\frac{A'B}{A'C} = \frac{HB^2}{HC^2}$; b) A', B' și C' sunt coliniare.
16. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex și o dreaptă care intersectează dreptele suport ale laturilor în punctele $X \in AB \setminus (AB), Y \in (BC), Z \in DC \setminus [DC]$ și $W \in (AD)$. Demonstrează că: $\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1$. (Teorema lui Menelaus pentru patrulatere)

B. Probleme de concurență

În cele ce urmează, sunt evidențiate procedee practice de verificare a concurenței a trei sau patru drepte.

I. Dreptele intersectează o a patra dreaptă în același punct

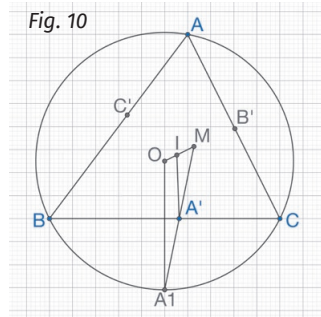
EXEMPLU

Se consideră ABC un triunghi și A', B' și C' punctele de tangență ale cercului înscris ($A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$). Dacă A_1, B_1 și C_1 sunt mijloacele arcelor „mici” BC, AC , respectiv AB , demonstrează că dreptele A_1A', B_1B' și C_1C' sunt concurente.

Rezolvare: Considerăm O centrul cercului circumscris, deci $OA_1 \perp BC$. Știind că și raza cercului înscris este perpendiculară pe latură în punctul de tangență ($IA' \perp BC$), deducem că $A'I \parallel OA_1$.

Considerăm $\{M\} = A_1A' \cap OI$. Din teorema fundamentală a asemănării ($\triangle MIA' \sim \triangle MOA_1$) obținem $\frac{MI}{MO} = \frac{IA'}{OA_1} = \frac{r}{R}$ (unde r este raza cercului înscris, iar R raza cercului circumscris). Rezultă că dreapta A_1A' intersectează o a patra dreaptă, OI , în punctul fix M , care împarte segmentul (OI) în raportul $\frac{r}{R}$. Analog, demonstrăm că și dreptele B_1B' și C_1C' intersectează dreapta OI în același punct M . Prin urmare, cele trei drepte sunt concurente în M .

Fig. 10



II. Dreptele se intersectează două câte două, în același punct fixat pe una dintre ele

EXEMPLU

Considerăm S un punct interior $\triangle ABC$ și A', B' și C' simetricele punctului S față de mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB . Arată că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

Rezolvare: În $\triangle SA'C'$, considerăm A'' și C'' mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Rezultă că $C''A'' \parallel C'A'$ și $C''A'' = \frac{1}{2}C'A'$ (unde $C''A''$ este linie mijlocie). Atunci $C'A' \parallel AC$ și $C'A' = AC$, deci patrulaterul $ACA'C'$ este paralelogram. Prin urmare, diagonalele sale se înjumătățesc, deci CC' trece prin mijlocul segmentului $[AA']$. La fel demonstrăm că BB' trece prin mijlocul segmentului $[AA']$. Deoarece BB' și CC' trec ambele prin mijlocul lui $[AA']$, rezultă că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente în acest punct (mijlocul lui $[AA']$).

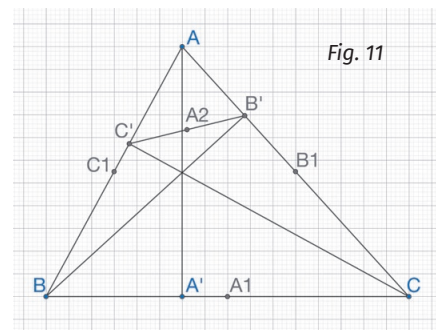
III. Dreptele a, b și c sunt linii importante în triunghi (mediatoare, bisectoare, înălțimi etc.)

EXEMPLU

1) În $\triangle ABC$ ascuțitunghic, A', B' și C' sunt picioarele înălțimilor, iar A_1, B_1 și C_1 sunt mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB . Dacă A_2, B_2 și C_2 sunt mijloacele segmentelor $[B'C'], [A'C']$, respectiv $[A'B']$, demonstrează că dreptele A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2 sunt concurente.

Rezolvare: Observăm că $B'A_1$ este mediana relativă la ipotenuză în triunghiul dreptunghic $\triangle BB'C$, deci $B'A_1 = \frac{1}{2}BC$. Analog, $C'A_1$ este mediană în triunghiul dreptunghic $\triangle CC'B$, deci $C'A_1 = \frac{1}{2}BC$. Din aceste două relații rezultă că $A_1C' = A_1B'$, ceea ce înseamnă că triunghiul $\triangle A_1B'C'$ este isoscel de bază $[B'C']$. Deoarece A_2 este mijlocul bazei $[B'C']$, mediana A_1A_2 este și înălțime, deci $A_1A_2 \perp B'C'$. Drept consecință, dreapta A_1A_2 este mediatoarea laturii $[B'C']$ a triunghiului (ortic) $A'B'C'$. Printr-un raționament analog, se demonstrează că B_1B_2 și C_1C_2 sunt mediatoarele laturilor $[A'C']$, respectiv $[A'B']$. Deci, cele 3 drepte sunt mediatoare în $\triangle A'B'C'$, motiv pentru care ele sunt concurente (în centrul cercului circumscris triunghiului ortic).

Fig. 11



2) Tangentele în A , B și C la cercul circumscris $\triangle ABC$ se intersectează în punctele A' , B' și C' (fig.12). Se notează cu A_1 , B_1 și C_1 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $A'BC$, $B'CA$, respectiv $C'AB$. Demonstrează că AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente.

Rezolvare: Demonstrăm că AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt bisectoare în $\triangle ABC$.

Triunghiul $A'BC$ este isoscel ($A'B$ și $A'C$ tangente dintr-un punct exterior la cerc). Rezultă că A_1 aparține medietoarei laturii $[BC]$, adică $A_1B = A_1C$. De asemenea, $\widehat{BCA_1} = \widehat{CBA_1} = \frac{1}{2}\widehat{BCA'}$. Cum $\widehat{BCA'} = \frac{1}{2}\widehat{BC}$ ($A'C$ este tangentă), obținem $\widehat{BCA_1} = \frac{1}{4}\widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Așadar $\widehat{BA_1C} = 180^\circ - 2\widehat{BCA_1} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, adică patrulaterul ACA_1B este inscriptibil. Prin urmare, A_1 este mijlocul arcului BC , deci AA_1 este bisectoarea unghiului A . Analog BB_1 și CC_1 sunt bisectoare în $\triangle ABC$.

Atenție! Citiți cu atenție relațiile și faceți lectura grafică pe desen pentru a identifica corect sensul acestora, mai ales acele relații care implică măsuri de unghiuri sau arce.

3. Se consideră M , N și A' pe laturile $\triangle ABC$ ascuțitunghic ($M \in (AC)$, $N \in (AB)$ și $A' \in (BC)$) astfel încât $\frac{A'B}{A'C} = \frac{MA}{MC} \cdot \frac{NB}{NA}$ și ($A'A$ este bisectoarea unghiului $\widehat{NAM}$). Construim punctele $B' \in AC$ și $C' \in AB$ similar cu A' . Demonstrează că AA' , BB' și CC' sunt concurente.

Rezolvare: Demonstrăm că dreptele sunt înălțimi în triunghiul ABC . Considerăm D și E intersecțiile dreptei $A'N$, respectiv $A'M$ cu paralela prin A la BC . Din asemănare avem: $\frac{MA}{MC} = \frac{AE}{A'C}$ și $\frac{NB}{NA} = \frac{BA'}{AD}$. Deducem că $AD = AE$, deci $A'A$ este mediană în $\triangle A'DE$, $A'A$ este și bisectoare, în concluzie este înălțime. Așadar $A'A$ este înălțime și în $\triangle ABC$. Analog se arată că $B'B$ și $C'C$ sunt înălțimi.

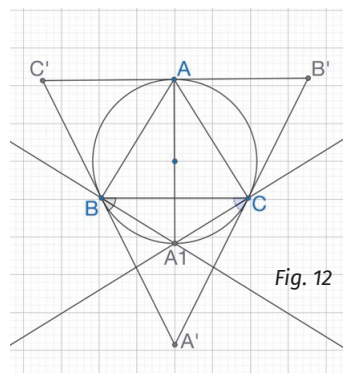


Fig. 12

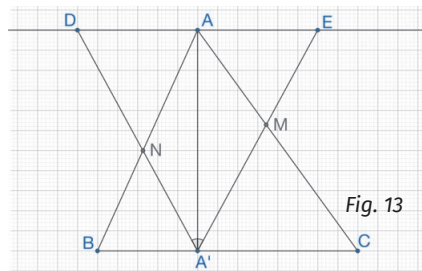


Fig. 13

IV. Teorema lui Carnot

Se consideră ABC un triunghi și $A' \in BC$, $B' \in AC$ și $C' \in AB$. Perpendicularele în A' pe BC , B' pe AC și C' pe AB sunt concurente. Demonstrează că $A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$ (Relația lui Carnot). Reciproc, dacă are loc relația lui Carnot, atunci perpendicularele în A' , B' și C' sunt concurente.

Demonstrație: Notăm cu M punctul de concurență. Din triunghiurile dreptunghice formate, observăm că $A'B^2 - A'C^2 = MB^2 - MC^2$ și analoagele. Continuă cu adunarea celor trei relații anologice, demonstrând astfel teorema directă.

Reciproc: Notăm prin M intersecția perpendicularelor duse din A' pe BC și B' pe AC , iar prin C_1 proiecția lui M pe AB . Din relația lui Carnot, $A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$, deducem că $C_1A^2 - C_1B^2 = C'A^2 - C'B^2$. Demonstrează că $C_1 = C'$, analizând pe rând situațiile:

- $C' \in [AB]$ și C_1 interior/exterior $[AB]$;
- $C' \in AB$ exterior, iar C_1 interior/exterior $[AB]$.

Observație: Teorema lui Carnot este utilă în special pentru justificarea unor situații de concurență.

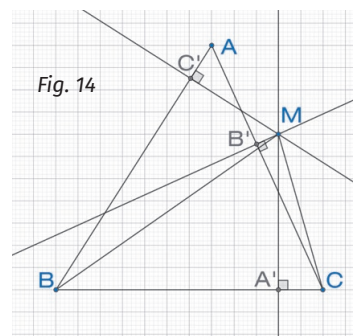


Fig. 14

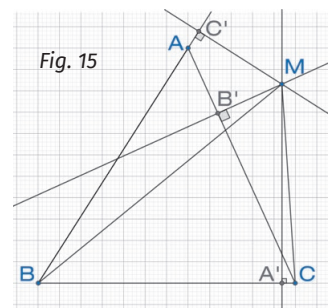


Fig. 15



EXEMPLU

Considerăm $\triangle ABC$ echilateral și punctele $A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$ și $C' \in [AB]$ astfel încât $A'B + B'C + C'A = A'C + B'A + C'B$. Demonstrează că perpendicularele pe laturi în punctele A' , B' și C' sunt concurente (fig.15).

Rezolvare: Calculăm expresia din relația lui Carnot, folosind diferența de pătrate:

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 =$$

$$= (A'B - A'C)(A'B + A'C) + (B'C - B'A)(B'C + B'A) + (C'A - C'B)(C'A + C'B) =$$

$AB(A'B - A'C + B'C - B'A + C'A - C'B) = 0$, unde am ținut cont că triunghiul ABC este echilateral, deci suma segmentelor de pe fiecare latură este egală cu latura triunghiului: $A'B + A'C = BC = AB = CA$ etc.). Prin urmare, conform reciprocei **Teoremei lui Carnot**, perpendicularele sunt concurente.

V. Teorema lui Ceva

Se consideră ABC un triunghi și $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ și $C' \in (AB)$ astfel încât $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ (*). Atunci dreptele AA' , BB' și CC' (numite și *ceviane*) sunt concurente.

Reciproc, dacă $A' \in (BC)$, $B' \in AC \setminus [AC]$, $C' \in AB \setminus [AB]$ și are loc relația (*) de mai sus, atunci dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente sau paralele.

Demonstrație – Reciproca.

Aplicăm **Teorema lui Menelaus** în $\triangle ACA'$, cu transversala determinată de punctele $B - M - B'$. Obținem $\frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{MA}{MA'} \cdot \frac{BA'}{BC} = 1$ (1). Aplicăm **Teorema lui Menelaus** în $\triangle ABA'$, cu transversala determinată de $C - M - C'$. Obținem $\frac{CA}{C'B} \cdot \frac{CB}{CA'} \cdot \frac{MA'}{MA} = 1$ (2). Înmulțind relațiile (1) și (2), rezultă relația finală a teoremei.

Demonstrație – Teorema directă.

Cazul 1. Dreptele AA' , BB' , CC' sunt paralele

În acest caz, rapoartele devin $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB'}{AC'}$ (teorema lui Thales), $\frac{B'C}{B'A} = \frac{BC'}{BA'}$ și $\frac{C'A}{C'B} = \frac{CA'}{CB}$. Înmulțind rapoartele, obținem produsul egal cu 1.

Cazul 2. Dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente

Considerăm $A' \in (BC)$, $B' \in AC$ și $C' \in AB$ astfel încât $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Atunci dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente. Considerăm $\{P\} = AA' \cap BB'$ și $CP \cap AB = \{C_1\}$. Deoarece P este interior în triunghiul ABC , rezultă că punctul C_1 este interior laturii $[AB]$. Aplicând demonstrația anterioară pentru punctul de concurență P , rezultă că $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$. Prin compararea acestei relații cu cea din ipoteză, deducem că: $\frac{C'A}{C'B} = \frac{C_1A}{C_1B}$. Însă C' și C_1 sunt puncte interioare, deci $C_1 = C'$. (În consecință, ceviana CC' trece prin P , punctul de concurență al celorlalte două).

VI. Aplicații ale teoremei lui Ceva

1) Forma trigonometrică a teoremei lui Ceva

Se consideră ABC un triunghi și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ și $C' \in (AB)$. Dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACB'}}{\sin \widehat{BCC'}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = 1$.

Demonstrație: Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile $\triangle ABA'$ și $\triangle ACA'$ avem $\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} = \frac{\sin \widehat{AAB'}}{\sin \widehat{AAC'}}$ și $\frac{\sin \widehat{ACB'}}{\sin \widehat{BCC'}} = \frac{\sin \widehat{AAB'}}{\sin \widehat{AAC'}}$. Deoarece unghiurile $\widehat{AAB'}$ și $\widehat{AAC'}$ sunt suplementare, obținem $\sin \widehat{AAB'} = \sin \widehat{AAC'}$. Împărțind cele două relații de mai sus, obținem $\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{AC}{AB}$. Scriem și relațiile analoge pentru celelalte vârfuri: $\frac{\sin \widehat{ACB'}}{\sin \widehat{BCC'}} = \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{BC}{AC}$; $\frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{AB}{BC}$. Înmulțind cele trei

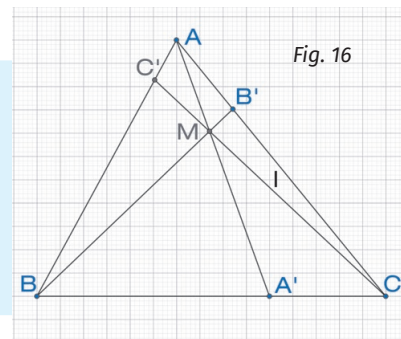


Fig. 16

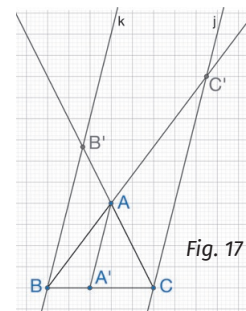


Fig. 17

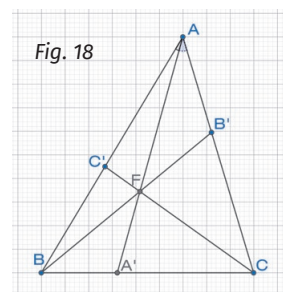


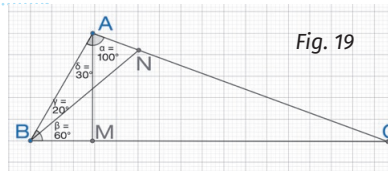
Fig. 18

relații membru cu membru, produsul rapoartelor sinusurilor devine egal cu produsul rapoartelor din Teorema lui Ceva, $\frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1$.



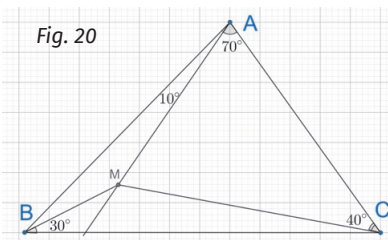
EXEMPLE DE APLICARE A TEOREMEI LUI CEVA SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ

a) Se consideră un triunghi ABC cu $A = 100^\circ$, $B = 60^\circ$, $M \in (BC)$ astfel încât $\widehat{BAM} = 30^\circ$ și $N \in (AC)$ astfel încât $\widehat{ABN} = 20^\circ$. Demonstrează că dreptele AM , BN și bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$ sunt concurente.



Rezolvare: Calculăm măsurile unghiurilor rămase, $\widehat{CAM} = A - \widehat{BAM} = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$, respectiv $\widehat{CBN} = B - \widehat{ABN} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Aplicăm forma trigonometrică a teoremei lui Ceva. Produsul rapoartelor sinusurilor trebuie să fie 1: $\frac{\sin \widehat{CAM}}{\sin \widehat{BAM}} \cdot \frac{\sin \widehat{ABN}}{\sin \widehat{CBN}} \cdot \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot 1 = \frac{\cos 20^\circ}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2 \cos 20^\circ} = 1$.

b) În figura alăturată avem $\widehat{CAM} = 70^\circ$, $\widehat{MAB} = 10^\circ$, $\widehat{CBM} = 30^\circ$, $\widehat{ACM} = 40^\circ$. Determină măsura unghiului $\widehat{ABM}$.



Rezolvare: Notăm $\widehat{ABM} = x$ și aplicăm teorema lui Ceva: $\frac{\sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin x}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin(30^\circ - x)}{\sin 40^\circ} = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot 2 \sin x \cdot \frac{\sin(30^\circ - x)}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = 1 \Leftrightarrow \sin x \cdot \sin(30^\circ - x) = \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ (*)$. Observăm că $x = 10^\circ$ și $x = 20^\circ$ verifică ecuația (*) și demonstrăm că acestea sunt singurele soluții ale ecuației (*).

Fie $f: (0, \frac{\pi}{6}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{6} - x)$. Observăm că:

$\alpha)$ $f(x) = f(\frac{\pi}{6} - x)$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{6})$; $\beta)$ funcția f este strict crescătoare pe $(0, \frac{\pi}{12})$.

Într-adevăr, $f(x) = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

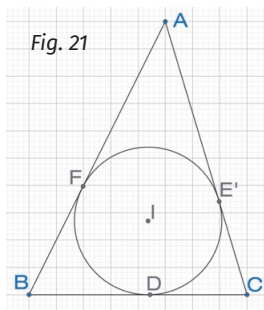
Pentru $x \in (0, \frac{\pi}{12})$ rezultă $2x + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \subset (0, \frac{\pi}{2})$, interval pe care funcția sinus este strict crescătoare. Deci, pe intervalul $(0, \frac{\pi}{12})$, ecuația $f(x) = \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ$ are o singură soluție, $x = \frac{\pi}{18}$ ($= 10^\circ$). Din observația $\alpha)$ rezultă, de asemenea, soluția $x = \frac{\pi}{9}$ (20°), fiind și unica soluție în $(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6})$.

2) În $\triangle ABC$ ascuțitunghic, mediana AM , înălțimea BN și bisectoarea CP sunt concurente. Demonstrează că $\frac{\cos C}{\cos A} = \frac{AB}{AC}$.

Rezolvare: Conform teoremei lui Ceva are loc relația $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$. Deoarece AM este mediană, $MB = MC \Rightarrow \frac{MB}{MC} = 1$. Deoarece BN este înălțime, în triunghiurile dreptunghice $\triangle BNC$ și $\triangle BNA$ au loc relațiile $NC = BC \cos C$ și $NA = AB \cos A$, așadar $\frac{NC}{NA} = \frac{BC \cos C}{AB \cos A}$. Deoarece CP este bisectoarea, din teorema bisectoarei obținem $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC}$. Înlocuind în relația lui Ceva, rezultă $1 \cdot \frac{BC \cos C}{AB \cos A} \cdot \frac{AC}{BC} = 1$. Simplificând BC , egalitatea devine $\frac{\cos C}{\cos A} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$, de unde rezultă imediat concluzia: $\frac{\cos C}{\cos A} = \frac{AB}{AC}$.

3) Cercul înscris în triunghiul ABC intersectează laturile în punctele D, E și F (fig.21). Demonstrează că dreptele AD , BE și CF sunt concurente. Punctul de concurență se numește *punctul lui Gergonne*.

Rezolvare: Observăm că D, E și F sunt interioare laturilor. Din proprietatea tangentelor duse dintr-un punct exterior la cerc, avem egalitatea segmentelor: $BD = BF$; $CD = CE$; $AE = AF$. Aplicăm teorema lui Ceva: $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$. Prin urmare, dreptele sunt concurente.

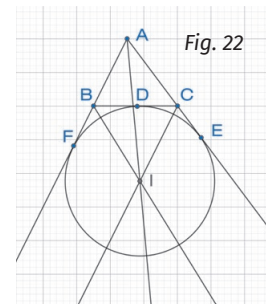


4) Cercul exînscriș în $\triangle ABC$ este tangent dreptelor BC , AB și AC în D , E și F (D interior laturii BC , E și F exterioare laturilor AC , respectiv AB – fig. 22). Demonstrează că AD , BE și CF sunt concurente. În acest caz, punctul de concurență se numește *punctul lui Nagel*.

Rezolvare: Aplicăm varianta teoremei lui Ceva cu două puncte exterioare.

Ținem cont că segmentele tangentelor duse dintr-un punct la cerc sunt egale:

$BD = BF$; $CD = CE$; $AF = AE$. Atunci $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$. Prin urmare, dreptele AD , BE și CF sunt concurente.



PROBLEME PROPUSE

A.

1. În $\triangle ABC$, $D \in (BC)$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{ADB}$ și $\widehat{ADC}$ intersectează AB , respectiv AC în E și F . Demonstrează că AD , CE și BF sunt concurente.
2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC . Se construiesc în exteriorul său triunghiurile dreptunghice isoscele ACC' și ABB' , având unghiurile drepte în C , respectiv B . Arată că BC' , CB' și înălțimea AA' sunt concurente ($A' \in BC$).
3. Se consideră patrulaterul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$. Demonstrează că dacă dreptele MN , PQ și AC sunt concurente, atunci dreptele NP , MQ și BD sunt concurente sau paralele.
4. **(Activitate pe grupe)**
 - a) Știind că AA_1 este o *ceviană* în $\triangle ABC$, iar A_2 este simetricul lui A_1 față de mijlocul segmentului $[BC]$, atunci AA_2 se numește *izotomica cevienelor* AA_1 . Demonstrați că dacă AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt ceviane concurente, atunci izotomicele lor sunt concurente.
 - b) Justificați că dreptele determinate de mijloacele înălțimilor și mijloacele laturilor corespunzătoare sunt concurente.

B.

5. a) În triunghiul ABC , $A_1, A_2 \in (BC)$, iar AA' este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{A}$. În cazul $\widehat{A'A_1A_2} \equiv \widehat{A'A_2A_1}$ spunem că *cevienelor* AA_1 și AA_2 sunt *izogonale*. Demonstrează că, dacă AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt ceviane concurente, atunci și izogonalele lor sunt concurente.
b) Izogonala medianei se numește *simediană*. Demonstrează că într-un triunghi simedianele sunt concurente.
6. Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$. Se consideră punctul $M \in \text{Int}(\triangle ABC)$ astfel încât $\widehat{MAC} = 10^\circ$, $\widehat{MAB} = 30^\circ$, $\widehat{MBA} = 50^\circ$ și $\widehat{MBC} = 20^\circ$. Determină măsura unghiului $\widehat{MCA}$.
7. Se consideră M un punct variabil în interiorul $\triangle ABC$ echilateral și A' , B' și C' proiecțiile sale pe laturi. Demonstrează că suma $AC' + BA' + CB'$ este constantă.
8. **(Activitate în pereche)** O rezervație naturală montană este delimitată sub forma unui triunghi ABC . Trei patrulare de salvamontiști sunt staționate în taberele de bază situate exact în vârfurile A , B și C . În cazul unei alerte majore, protocolul cere ca toate cele trei echipe să se deplaseze în linie dreaptă spre un centru de comandă, O , situat în interiorul rezervației. Traseele lor, dacă ar fi continuate dincolo de punctul O , ar ajunge la marginile rezervației în punctele de evacuare D pe latura BC , E pe latura AC și F pe latura AB .
 - Traseul echipei din C ajunge la marginea opusă într-un punct F , care este exact la mijlocul distanței dintre A și B . Prin urmare, $\frac{AF}{FB} = 1$.
 - Traseul echipei din B trece prin centrul O și ajunge în punctul E pe latura AC , locație aleasă astfel încât distanța AE să fie de 1,5 ori mai mare decât EC . Prin urmare, $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$.
 Pentru ca elicopterele de suport să știe exact unde se termină poteca primei echipe (cea plecată din A), trebuie determinată locația exactă a punctului de evacuare D pe granița BC . Știind că traseele au fost proiectate perfect concurente în O , calculați raportul $\frac{BD}{DC}$.

Teste de antrenament

Testul 1

1. $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu bazele AB și CD . Calculează lungimea bazei AB , știind că $AD = 4$, $DC = 4\sqrt{3}$ și $\widehat{DCB} = 150^\circ$.
2. În $\triangle ABC$, $E \in (AB)$. Știind că $\widehat{ECA} = 25^\circ$, $\widehat{ECB} = 40^\circ$ și $\widehat{A} = 50^\circ$, calculează $\frac{AE}{BC}$.
3. În $\triangle ABC$, AD este mediană, iar $\widehat{ADC} = 135^\circ$. Știind $AB = 5$ și $AC = \sqrt{137}$, calculează $aria(ABC)$.

Testul 2

1. În $\triangle ABC$ cunoaștem $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$. Calculează lungimea medianei, a bisectoarei și a înălțimii din A .
2. În $\triangle ABC$, $b = 2a \sin \frac{B}{2}$, iar $\cos B < 0$. Demonstrează că $\triangle ABC$ este isoscel.
3. În $\triangle ABC$, $AB = 15$, $BC = 16$, CN este bisectoarea $\sphericalangle C$, iar $M \in (BC)$ astfel încât $BM = 9$. Determină lungimile BN , AC și AM .

Testul 3

1. În $\triangle ABC$, $AB = 20$, $AC = 15$, $BC = 7$, iar AD este bisectoarea $\sphericalangle BAC$. Calculează $aria(ABC)$, lungimea lui DC și măsura lui $\widehat{ADC}$.
2. În $\triangle ABC$, $AB = 15$, $BC = 16$, CN este bisectoarea unghiului $\widehat{BCA}$ ($N \in AB$), iar $M \in (BC)$ astfel încât $BM = 9$ și $\widehat{BAM} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$. Calculează lungimile BN , AC și AM .
3. În $\triangle ABC$ cunoaștem că AD este bisectoare interioară ($D \in BC$) și că M este mijlocul lui $[AD]$. Știind că $BM \cap AC = \{E\}$, calculează $\frac{EA}{EC}$ în funcție de lungimile laturilor.

Testul 4

1. În $\triangle ABC$, bisectoarea $BD = 8\sqrt{7}$ ($D \in AC$), iar $AD = 8$, $DC = 16$. Determină medianele $\triangle ABC$.
2. În $\triangle ABC$ avem relația $R^2 + a^2 + c^2 = b^2$. Demonstrează că $\triangle ABC$ este dreptunghic.
3. În $\triangle ABC$, A' este mijlocul laturii $[BC]$, B' este piciorul bisectoarei $\widehat{ABC}$, $BA = 6$ și $BC = 8$. Știind că $\{M\} = AA' \cap BB'$, $\{N\} = CM \cap AB$, calculează $\frac{aria(NCA)}{aria(NCB)}$.

Test de evaluare

1. (2p) În $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 30^\circ$, iar CD este bisectoarea interioară a $\sphericalangle C$, $D \in AB$. Se cunosc: $AD = \sqrt{3}$; $DB = 1$. Află BC și măsurile unghiurilor $\triangle ABC$.
2. În $\triangle ABC$, AM este mediană, $M \in BC$, iar N este mijlocul $[AM]$. Fie $\{P\} = BN \cap AC$. Calculează raportul $\frac{PA}{PC}$:
a) (1p) utilizând teorema lui Menelaus;
b) (1p) fără a utiliza teorema lui Menelaus.
3. Fie AD , BE și CF ceviane interioare în triunghiul ABC , concurente în punctul O .
a) (1p) Demonstrează că $\frac{DB}{DC} = \frac{aria(ABO)}{aria(ACO)}$, $D \in BC$.
b) (1p) Demonstrează teorema lui Ceva utilizând arii.
4. (3p) $ABCD$ este trapez având bazele $CD = 10$, $AB = 6$. Dacă $\widehat{ADC} = 60^\circ$ și $\widehat{BCD} = 45^\circ$, calculează BC . Află diagonala BD (utilizând teorema lui Stewart).



Timp de lucru: 50 de minute

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE



1. Demonstrează inegalitățile:

a) $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z; x, y, z > 0;$

b) $\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{c(a+b)} \leq \frac{3}{2}(a+b+c); a, b, c \geq 0;$

c) $n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2; x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}.$

2. Determină mulțimile:

a) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \mid \frac{3}{3xy + 5x - 2y} \in \mathbb{Z} \right\};$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \in \mathbb{N} \right\}.$

3. Determină:

a) $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq \alpha < 2 + \frac{1}{n};$

b) $\alpha > 0$ astfel încât $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left[x \right] + \left[x + \frac{1}{\alpha} \right] = \left[\alpha x \right].$

4. Demonstrează prin inducție:

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1) + \dots + n(n+1) + \dots + (n+k-1) = \frac{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)}{k+1}, n \geq 1, k \geq 2$ fixat;

b) $|\sin nx| \leq n|\sin x|, n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$ fixat;

c) $\frac{3^n}{2(n+2)} < \frac{3n!}{(2n!)^2}, n \geq 2.$

5. Se consideră șirul cu termenul general $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2, n \geq 2$. Determină termenul general al șirului.

6. Determină termenul general al șirului care are $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}, n \geq 2$, respectiv $x_1 = \frac{2}{3}$.

7. Se consideră $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}, n \geq 1$.

a) Justifică faptul că $x^2 S_n - 2x S_n + S_n = 1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}$.

b) Dedu un mod de a calcula suma S_n .

c) Calculează: $\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1}; \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}.$

8. Se consideră $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică astfel încât $a_m = m, a_n = n, m \neq n$. Demonstrează că $a_p = p, \forall p \geq 1$.

9. Calculează $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)^{-1} + \dots + \left(\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^n}\right)^{-1}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$

10. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x+3| + |x-1|$.

a) Reprezintă grafic funcția.

b) Determină imaginea funcției f .

c) Calculează $f \circ f$.

11. Știind că $(f \circ f)(x) = 4x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, calculează $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

12. Determină funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea:

a) $f(ax + b) \leq ax \leq f(ax) + b, \forall x \in \mathbb{R}, a, b > 0;$

b) $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

13. Fie $a \in \mathbb{R}$ și o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ f)(x) = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ și $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + a, \forall x \in \mathbb{R}.$

a) Determină $a \in \mathbb{R}$ și funcția de gradul întâi care verifică cele două condiții.

b) Justifică faptul că singura funcție care îndeplinește ambele condiții este cea determinată la punctul a).

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

a) Calculează $f \circ f$.

b) Justifică faptul că f este inversabilă și determină f^{-1} .



15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 2x+a, & x \geq 1 \end{cases}$.

- Pentru $a = 3$, calculează $f(-\infty, 1); f((1, \infty)); f^{-1}((1, 2))$.
- Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care f este injectivă.
- Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care f este surjectivă.
- Justifică faptul că f este surjectivă $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, f(r) = 2$.

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \in (-\infty, -1] \\ x^2+4x, & x \in (-1, 1) \\ bx+c, & x \in [1, \infty) \end{cases}$.

- Determină $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $f(x) = m$ are pentru orice $m \in \mathbb{R}$ cel mult o soluție.
- Determină $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $f(x) = m$ are pentru orice $m \in \mathbb{R}$ cel puțin o soluție.
- Există valori ale lui a, b și c astfel încât pentru orice $m \in \mathbb{R}$ ecuația $f(x) = m$ are soluție unică?
- Analizează dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât f este inversabilă și determină f^{-1} , dacă există.

17. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq 2 \\ 3x-1, & x > 2 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$. Determină valorile parametrului real a astfel încât funcția f să fie: a) injectivă; b) surjectivă; c) bijectivă.

18. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de legi $f(x) = 2x - 3$ și $g(x) = x^3 + 1$.

- Justifică faptul că funcțiile f și g sunt inversabile.
- Determină funcția inversă a compusei, $(f \circ g)^{-1}(x)$, și verifică relația $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

19. Demonstrează că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+2}$ este strict crescătoare pe domeniul său de definiție. Justifică faptul că funcția este mărginită, având imaginea inclusă în intervalul $[0, 1)$.

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[5]{x+1}$.

- Studiază monotonia funcției f pe $\mathbb{R}$.
- Folosind proprietatea de monotonie demonstrată la a), rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[5]{x+1} = 2$.

21. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 4$.

- Determină intervalele de monotonie ale funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $(f \circ f)(x) = 0$.

22. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

- Demonstrează că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Justifică faptul că funcția este bijectivă și determină expresia funcției inverse, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

23. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

- Demonstrează că funcția f este impară.
- Justifică faptul că $f(\mathbb{R}) \subset (-1, 1)$, deducând astfel că funcția este mărginită.
- Demonstrează prin inducție matematică faptul că $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x) = \frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$.

24. Un fond de investiții analizează costurile operaționale pentru achiziționarea și menținerea unui portofoliu de acțiuni din sectorul tehnologic și al inteligenței artificiale. Costul zilnic (în dolari), în funcție de volumul x de tranzacții efectuate, este modelat de legea $C(x) = 2x^2 - 120x + 2\,500$, unde $x > 0$.

a) Demonstrează, folosind definiția, că funcția costului C este convexă. Explică din punct de vedere economic ce înseamnă această convexitate (de ce costurile *scapă de sub control* dacă se fac prea puține sau prea multe tranzacții într-o singură zi).

b) Justifică faptul că funcția este mărginită inferior și determină numărul optim de tranzacții zilnice pentru care costul operațional este minim.



- 25.** O dronă utilitară folosită pentru cartografiere este programată să urce la o altitudine h (în metri) în funcție de timpul t (în secunde) de la decolare, după legea $h(t) = 4t + 5$. Suprafața de teren S (în metri pătrați) care poate fi fotografiată clar de senzorul dronei depinde de altitudine prin funcția de lege $S(h) = 3h^2$.
- Exprimă suprafața fotografiată direct în funcție de timpul de zbor, determinând funcția compusă $(S \circ h)(t)$.
 - Justifică faptul că funcția h este inversabilă. Determină funcția inversă h^{-1} și explică semnificația ei practică pentru operatorul dronei (ce calculează de fapt această inversă?).
- 26.** O companie aeriană, care operează zboruri pe ruta București-Iași, utilizează un sistem automat pentru a aloca fiecărui pasager dintr-un grup un loc în aeronavă. Se consideră P mulțimea pasagerilor de pe o anumită rezervare și L mulțimea locurilor disponibile în avion. Sistemul definește o funcție de alocare $f: P \rightarrow L$, care asociază fiecărui pasager x un loc $f(x)$.
- Explică, argumentând logic și practic, consecințele unei erori de soft care ar face ca funcția f să **nu** fie injectivă.
 - Din perspectiva eficienței economice a companiei aeriene pentru acel zbor, ce semnifică faptul că funcția f este surjectivă, atunci când se iau în calcul toți pasagerii zborului și toate scaunele din avion?
- 27.** Distanța vizuală d (în kilometri) până la linia orizontului, așa cum este percepută de un pasager dintr-un avion comercial, este modelată de legea $d(h) = 3,57\sqrt{h}$, unde h reprezintă altitudinea aeronavei (în metri).
- Demonstrează că funcția d este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Cum traduci acest rezultat matematic în experiența fizică a pasagerului în timpul fazei de urcare a avionului?
 - Știind că vizibilitatea pe fereastră devine relevantă pentru orientare de la minimum 35,7 km, rezolvă inecuația $3,57\sqrt{h} \geq 35,7$ pentru a afla altitudinea minimă necesară.
- 28.** Un investitor plasează un capital inițial pentru a fi administrat pe o perioadă de exact 10 ani. Valoarea finală a portofoliului depinde de randamentul anual (factorul de creștere) x , fiind dată de legea $V(x) = 10\,000 \cdot x^{10}$, unde $x \geq 1$ (de exemplu, un randament de 8% înseamnă $x = 1,08$).
- Demonstrează că funcția putere $f(x) = x^{10}$ este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$. Ce argumentează această proprietate în legătură cu importanța alegerii unor acțiuni (de exemplu, cele care plătesc dividende constante) ce oferă un randament anual chiar și cu o fracțiune de procent mai mare?
 - Dacă politica de risc a fondului impune ca valoarea portofoliului după cei 10 ani să nu depășească 30 000 de dolari din motive de lichiditate (funcția este mărginită superior în mod artificial de regulament), dedu relația matematică ce limitează randamentul anual maxim permis x .
- 29.** Se consideră ecuația $x^2 - (2a + 1)x + 2a^2 + a = 0$, cu rădăcinile reale x_1, x_2 , $a \in \mathbb{R}$. Justifică faptul că:
- $0 \leq x_1 + x_2 \leq 2$;
 - $-\frac{1}{8} \leq x_1 x_2 \leq 1$;
 - $0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2$.
- 30.** Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care trinomul $f_a(x) = (a + 1)x^2 - 3x + a$:
- este pozitiv pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
 - este pozitiv pentru orice $x > -1$.
- 31.** Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$. Justifică faptul că, dacă $a - b + c > 0$ și $a + b + c < 0$, atunci $b^2 - 4ac > 0$.
- 32.** Se consideră familia de parabole $f_m(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $f_m(x)$ să fie situat:
- pe dreapta $y = x + 1$;
 - deasupra axei Ox ;
 - în cadranul II sau în cadranul III;
 - în interiorul pătratului $OABC$, unde $A(0, 1), B(1, 1)$ și $C(1, 0)$.
- 33.** Demonstrează că, dacă $a, b, c > 0$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} + \sqrt{c}$ și $\sqrt{c} + \sqrt{a}$ sunt raționale, atunci $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$.
- 34.** Determină $x \in \mathbb{R}$ pentru care există $^{6-x}\sqrt{x}$.
- 35.** Compară numerele:
- $2\sqrt{3}, 6 - \sqrt{5}, \sqrt[4]{112}$;
 - $\sqrt{4 + \sqrt{7}}, \sqrt[3]{6 + \sqrt{8}}$;
 - $\sqrt[3]{18}, \sqrt{15}, \sqrt[4]{24}, \sqrt[12]{36}$.

36. a) Demonstrează că $x + y \leq 2\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}}$, $x, y > 0$.

b) Dedu că $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$, $\forall a, b > 0$.

37. a) Justifică faptul că $\sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} + \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38} = \sqrt{20}$.

b) Justifică faptul că următoarele funcții sunt monotone: $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + \frac{1}{x}$; $h: \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(n) = \sqrt[n]{17\sqrt{5} + 38}$; $f: \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{17\sqrt{5} + 38} + \sqrt[n]{17\sqrt{5} - 38}$.

c) Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ are loc relația $\sqrt[n]{17\sqrt{5} + 38} + \sqrt[n]{17\sqrt{5} - 38} = \sqrt{20}$?

38. a) Justifică faptul că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1}$ este strict crescătoare.

b) Dedu că $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+5} + \sqrt{x+6}$ este strict monotonă.

39. Calculează $\sum_{k=1}^n \sin kx \cos(n-k)x$.

40. Se consideră $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, astfel încât $\cos^2(x-y) = \sin 2x \sin 2y$. Justifică faptul că $x + y = \frac{\pi}{2}$.

41. Justifică faptul că, pentru orice număr real x , are loc inegalitatea $(1 + \sin x)(1 + \cos x) \leq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

42. Știind că x, y și z sunt măsurile unghiurilor unui triunghi (în radiani), atunci:

$$x \cos x + y \cos y + z \cos z - \frac{4\pi}{3} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} \leq \frac{\pi}{3}.$$

43. Știind că $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$, justifică faptul că avem

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z = 1$$

dacă și numai dacă $x + y + z = \pi$.

44. Justifică faptul că, pentru orice număr natural

$n \geq 2$, are loc inegalitatea:

$$\sin a_1 x \sin a_2 x \dots \sin a_n x + \cos a_1 x \cos a_2 x \dots \cos a_n x \leq 1.$$

45. Justifică faptul că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{3})$ nu este periodică.

46. a) Justifică faptul că, pentru valorile care asigură sensul expresiilor, $\frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$.

b) Calculează $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sin 2^k x}$.

47. Justifică faptul că, pentru valorile care asigură sensul expresiilor, au loc egalitățile:

$$\text{a) } \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x = \operatorname{ctg} x - 8 \operatorname{ctg} 8x; \quad \text{b) } \frac{\cos 2x + \cos 4x + 3}{1 + \cos x} + \frac{\cos 2x - 4 \cos x + 3}{1 - \cos x} = 4.$$

48. Demonstrează că, dacă medianele din B și C ale triunghiului ABC sunt perpendiculare, atunci $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

49. Se consideră A, B, C, D patru puncte oarecare, iar E și F mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[DB]$. Demonstrează că $4EF^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - DB^2 - AC^2$ (relația lui Euler).

50. Justifică faptul că, dacă în triunghiul ABC există relația $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + 2 \sin B \sin C \cos A$, atunci triunghiul este dreptunghic.

51. Un triunghi dreptunghic are perimetrul egal cu 36. Știind că cercul înscris în acest triunghi este tangent ipotenuzei într-un punct, care o împarte în raportul $\frac{2}{3}$, determină lungimile laturilor triunghiului.

52. În triunghiul ABC este înscris un cerc care este tangent laturilor sale în punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $L \in (AC)$. Determină lungimea segmentului MN , cunoscând $LA = 2$, $LC = 3$ și $m(\widehat{BCA}) = \frac{\pi}{3}$.

53. Se consideră triunghiul ABC și cercul înscris în acesta, de rază r , care este tangent la laturile triunghiului în $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$. Știind că $AP = r$, $PC = a$, calculează aria triunghiului BMN .

54. Justifică faptul că în triunghiul ABC avem $c^2 + b^2 = 5a^2$ dacă și numai dacă $\operatorname{ctg} A = 2(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$.



- 55.** Se consideră $ABCDEFGH$ un *heptagon* regulat înscris în cercul de rază R . Știind că A' este punctul diametral opus lui A , justifică faptul că $A'B + A'D = R + A'C$.
- 56.** Prin centrul cercului înscris în triunghiul ABC se duce o dreaptă *antiparalelă* la BC , care intersectează AB în M și AC în N (antiparalela determină triunghiul ANM asemenea cu triunghiul ABC). Justifică faptul că $BM + CN = MN$.
- 57.** Se consideră un triunghi ABC . Determină locul geometric al punctului O (centrul cercului circumscris triunghiului), dacă raportul $\frac{R}{r}$ este constant.
- 58.** Se consideră triunghiul ABC , în care $B = 45^\circ$, $C = 75^\circ$ și $BC = 6\sqrt{2}$. Calculează lungimea laturii AC .
- 59.** Se consideră triunghiul isoscel ABC în care $BC = 12$ și $B = C = 30^\circ$. Calculează aria triunghiului.
- 60.** Pe latura AB a triunghiului ABC se consideră punctul M astfel încât $AM = \frac{1}{2}AB$, iar pe latura AC se consideră punctul N astfel încât $AN = \frac{1}{3}AC$. Calculează raportul dintre ariile triunghiurilor AMN și ABC .
- 61.** În triunghiul ABC se cunosc $A = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$ și $b - c = 12$. Rezolvă triunghiul ABC , apoi determină aria și raza cercului circumscris ale acestuia.
- 62.** Justifică faptul că triunghiul ABC este isoscel dacă $2S = b^2 \sin B$.
- 63.** Arată că triunghiul ABC este dreptunghic dacă între elementele sale are loc relația $a \cos B + a \cos C = b + c$.
- 64.** Se consideră triunghiul ABC . Demonstrează că următoarele relații sunt adevărate:
 a) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$; b) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$; c) $a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = 2(R + r)$.
- 65.** Arată că, în orice triunghi ABC , sunt adevărate inegalitățile:
 a) $\cos B + \cos C > \sin A$; b) $a \cos A + b \cos B + c \cos C \leq p$; c) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.
- 66.** Demonstrează că, dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $a \sin x + b \sin 2x = a \cos x + b \cos 2x$ pentru orice x real, atunci $a = b = 0$.
- 67.** Dacă $\sin x = \sin y$ și $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, rezultă $\cos x = \cos y$?
- 68.** Demonstrează că pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ are loc inegalitatea $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.
- 69.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [\sin x]$.
 a) Justifică faptul că f este periodică. b) Reprezintă grafic funcția.
- 70.** Determină mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin(\sin x) = x - 4\pi\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \arccos(\cos x) = 2\pi + x\}$.
- 71.** a) Demonstrează că, dacă $\sin t = x, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, atunci $t = \arcsin x$.
 b) Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{4}, 0]$, astfel încât $f(\sin t) = t^2 - \pi \cdot t$, pentru orice $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Demonstrează că: i) $f(x) = (\arcsin x)^2 - \pi \cdot \arcsin x$; ii) f este bijectivă.
- 72.** Rezolvă ecuațiile:
 a) $2 \sin x - \cos x = 0$; b) $\operatorname{tg} x = -\sin x$; c) $\sin 3x = -\cos 2x$; d) $\sin(\cos x) = 0$;
 e) $\frac{|\cos x|}{\cos x} = 1$; f) $\operatorname{arctg}(\sin x) = \frac{x}{2}$; g) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{2\pi}{3}$;
 h) $2 \arcsin x + \arccos x = \pi$; i) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1} + \sqrt[3]{3 \operatorname{tg} x + 1} = 2$.
- 73.** Demonstrează că $\sin(\sin x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 74.** Știind că $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ și $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, atunci verifică relațiile:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma}{3} \text{ și } \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma}{3}.$$



75. Obiectiv didactic: Elevul trebuie să demonstreze că înțelege importanța domeniului și codomeniului în stabilirea proprietăților unei funcții (injectivitate, surjectivitate) și să aplice rigoarea matematică pentru a corecta erorile de raționament ale unui algoritm AI. Inteligența artificială poate genera demonstrații aparent logice, dar care omit subtilități matematice esențiale, în special legate de restricțiile pe domeniu.

✓ **Partea A (Interacțiunea cu IA):**

Deschide un asistent IA și introdu exact următorul prompt: „Analizează funcția de gradul al doilea $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Demonstrează matematic dacă această funcție este injectivă și dacă este surjectivă.”. Generează răspunsul și salvează-l.

✓ **Partea B (Sarcina matematică – analiză umană):**

1. Rezolvarea riguroasă: Rezolvă problema pe hârtie, folosind definițiile algebrice și graficul (forma canonică) învățate la clasă. Demonstrează valoarea de adevăr a injectivității și a surjectivității pentru funcția dată pe domeniul și codomeniul specificat.

2. Evaluarea IA-ului: Compară demonstrația ta cu cea generată de IA. A ținut cont IA de restricția domeniului $x \in [2, \infty)$ atunci când a verificat injectivitatea sau a tratat-o ca fiind definită pe $\mathbb{R}$? A confundat IA imaginea funcției, $\text{Im}(f)$, cu codomeniul $\mathbb{R}$ pentru a stabili surjectivitatea?

3. Prompt de corectare: Redactează un nou prompt prin care să îi explici IA, folosind argumente matematice de clasa a IX-a (vârful parabolei, intervale de monotonie), unde a greșit în raționamentul său inițial și cere-i să rescrie corect demonstrația.



76. Obiectiv didactic: Elevul va folosi IA pentru a scrie cod și a genera un set mare de date pe baza unei reguli recurente (progresie geometrică), pe care apoi va trebui să le valideze analitic, înțelegând diferența dintre calculul iterativ al unui computer și formula termenului general.

O companie care dezvoltă infrastructură pentru modele mari de limbaj (LLM) raportează că puterea de procesare a serverelor sale crește constant. În prezent (anul 1), rețeaua procesează $P_1 = 500$ de teraflopi, iar planul este o creștere anuală garantată de 15% față de anul precedent.

✓ **Partea A (Delegarea calculului către IA):**

Cere unui asistent IA să calculeze puterea de procesare pentru fiecare din următorii 15 ani. Poți folosi un prompt de tipul: „Generează o listă sau scrie un scurt cod în Python care să calculeze un șir de 15 numere. Primul termen este 500. Fiecare termen următor se obține adăugând o creștere de 15% la termenul anterior. Afișează doar valorile finale, rotunjite la două zecimale.”

✓ **Partea B (Sarcina matematică – demonstrația analitică):**

1. Modelarea matematică: Justifică faptul că șirul generat de puterea de procesare $(P_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie geometrică. Determină primul termen P_1 și rația q .

2. Validarea algoritmului: Folosind formula termenului general al unei progresii geometrice, $P_n = P_1 \cdot q^{n-1}$, calculează manual (sau cu un calculator de buzunar) valoarea exactă a puterii de procesare pentru anul 10 (P_{10}). Compară rezultatul obținut analitic cu rezultatul generat de IA la Partea A. Sunt identice?

3. Suma progresiei (costul total): Știind că formula sumei primilor n termeni este $S_n = P_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, calculează puterea totală de procesare cumulată pe parcursul celor 15 ani de funcționare a serverelor.

Test de evaluare final

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 1$.
 - a) (1p) Verifică dacă funcția este injectivă.
 - b) (1p) Demonstrează că funcția este strict monotonă pe $[1, \infty)$.
 - c) (1p) Ordonează crescător numerele $f(1,5)$, $f(\sqrt{2})$ și $f(\sqrt[3]{3})$.

2. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are primul termen $x_1 = 1$ și $x_{n+1} - x_n = 2n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) (1p) Demonstrează că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, definit prin $y_n = x_n - n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este o progresie aritmetică.
 - b) (1p) Află termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

3. a) (1p) Justifică faptul că ecuațiile $2 \sin^3 x = \cos x$ și $2 \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$ sunt echivalente pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
 b) (1p) Rezolvă, în $\mathbb{R}$, ecuația $2 \sin^3 x = \cos x$.

4. Triunghiul ABC , dreptunghic în A , are cateta AC de lungime 15 cm, iar proiecția catetei AB pe ipotenuză este de 16 cm.
 - a) (1p) Află lungimea ipotenuzei BC .
 - b) (1p) Dacă $E \in (BC)$ astfel încât $\frac{BE}{BC} = \frac{2}{5}$, demonstrează că unghiul AEB este obtuz și calculează lungimile razelor cercurilor înscris, respectiv circumscris ale triunghiului AEC .

Timp de lucru: 60 de minute

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.



INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Capitolul 1.

Pg. 12-13. Propoziții. 1. a) falsă; b) Nu este propoziție (enunț interogativ); c) falsă; d) Nu este propoziție; e) propoziție; f) Nu este propoziție; g) adevărată; h) adevărată; i) falsă; j) falsă; k) falsă. 2. $\bar{p}$: Triunghiul ABC nu este isoscel; $p \vee q$: Triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic. $p \wedge q$: Triunghiul ABC este isoscel și dreptunghic. $q \rightarrow r$: Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, atunci este echilateral. $\bar{p} \wedge q$: Triunghiul ABC nu este isoscel și este dreptunghic. $q \vee r$: Triunghiul ABC este dreptunghic sau echilateral. $r \rightarrow p$: Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci este isoscel. 3. a) A; b) A; c) F; d) A; e) F; f) F; g) A; h) A. 4. a) A; b) F; c) A. 5. a) A; b) A; c) A; d) F; e) A; f) A; g) A. 6. a) Dacă un romb are un unghi drept, atunci el este pătrat. b) Dacă două numere sunt raționale, atunci suma lor este număr rațional. c) Dacă iese fum, atunci este foc. 7. a) $2 \notin \mathbb{N}$ și $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. b) $3 \notin \mathbb{Q}$ sau $2 \nmid 10$. c) 5 nu este număr natural par sau $\frac{2}{3} \leq 0$. d) Punctul A nu aparține dreptei d sau punctul B nu aparține dreptei d . e) Nu merg sau nu privesc. f) Nu merg sau nu privesc sau înțeleg. g) Dorm și nu mă odihnesc. h) Un triunghi este dreptunghic și nu are niciun unghi ascuțit. i) Plec și nu mă voi întoarce foarte curând. 8. a) $D_p = \mathbb{Z}$; $D_q = A = \{-3, -\sqrt{5}, -\frac{1}{2}, 0, 1, 4, 2\sqrt{5}\}$; $D_r = B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. b) i. $p(1) \vee q(3)$ adevărat; ii. $q(4) \wedge r(0)$ adevărat; iii. $(p(\frac{1}{2}) \vee q(-\sqrt{5}))$ fals; iv. $\overline{r(-2)}$ fals; c) i. $D_{p \vee q} = D_p \cup D_q = \mathbb{Z} \cup \{-\sqrt{5}, -\frac{1}{2}, 2\sqrt{5}\}$; ii. $D_{q \wedge r} = D_q \cap D_r = \{-3, 0, 1\}$; iii. $D_{r \rightarrow p} = \overline{D_r} \cup D_p = \mathbb{R}$; iv. $D_r = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; e) Predicatul aferent diferenței de mulțimi este $r(x) \wedge \overline{q(x)}$. **Pg. 13-14. Predicate.** 1. $p(0): 0 > 0$ (F); $p(1/2): 1/2 > 1/4$ (A); $p(2/3): 2/3 > 4/9$ (A); $p(-2): -2 > 4$ (F); $p(\sqrt{3}): \sqrt{3} > 3$ (F). 2. a) F; b) A; c) F; d) F. 3. a) $(\exists x \in \mathbb{R}) 2x + 3 = 5$; b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) 2x + 3y = -5$; c) $(\forall k \in \mathbb{Z}) 2|k(k+1)$; d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x+y=3 \wedge x-y=4)$. 4. a) 1; b) 0; c) 1; d) 0; e) 1; f) 1; g) 0; h) 0; i) 1; j) 1; k) 1. 5. a) 1; b) 0; c) 0. 6. a) 0 (fals pentru numere negative); b) 0; c) 1; d) 1; e) 0 (există și cazul $x=y=z$); f) 1; g) 1 (ex. pentru numere negative). 7. a) $x \in A \vee x \in B$; b) $x \in A \wedge x \in B$; c) $x \in A \wedge x \notin B$; d) $x \notin B \vee x \in A$. 8. a) $x \in (-3, 3) \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow |x| < 3$; b) $x \in [0, \infty) \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$; c) $|x| = -6 \Rightarrow -6 \leq x < -5 \Rightarrow x \in [-6, -5)$; d) $\frac{x}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow \frac{2x}{3} = 2k \in \mathbb{Z}$; e) $7|(2x+5) \Rightarrow 7|(2x+5-7) \Rightarrow 7|2(x-1) \Rightarrow 7|(x-1)$; f) $4x+5=7 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=1/2$ respectiv $2x-3=-2 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=1/2$; g) $3x < 6 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow -2x+1 > -3$. 9. a) Suma este 0 doar dacă ambele elemente pozitive sunt 0 $\Leftrightarrow x=y \wedge x=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$; b) Ridicând la pătrat se obține $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \Leftrightarrow xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$; c) Funcția parte întreagă este monoton crescătoare, deci inegalitatea nestrictă se păstrează $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$; d) media armonică $\leq$ geometrică pentru $x, y > 0$. 10. p: $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + 2x + 5 \geq 4 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 0$. Valoare de adevăr: 1; q: $(\forall a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N}) a < b$. Valoare de adevăr: 1. 11. a) $n \geq 78$; $n = 3^{10} \approx 0,66$; b) $4(5x+7y) - 5(4x+3y) = 13y$. 12. Se demonstrează direct prin aplicarea izomorfismului dintre logica propozițională și teoria mulțimilor (ex. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$), urmată de aplicarea asociativității, comutativității sau a legilor lui De Morgan. 13. a) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$; b) Diferența conține toate elementele lui $A \Leftrightarrow$ Mulțimile sunt disjuncte, adică $A \cap B = \emptyset$; c) $X \subset A \cap B \Leftrightarrow X \subset A \wedge X \subset B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; d) Din $X \subset A \vee X \subset B$ se deduce imediat incluziunea în reuniune $X \subset A \cup B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. 14. a) Identitatea devine $y(8x-12) + (2x-3) = 0, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow 8x-12=0 \wedge 2x-3=0 \Rightarrow x=3/2$; b) $m=6$. **Pg. 20-22.** 1. a) O dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi segmente proporționale dacă și numai dacă este paralelă cu a treia latură. b) Un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c este dreptunghic având ipotenuza a dacă și numai dacă $a^2 = b^2 + c^2$. c) Un număr natural este divizibil cu 4 dacă și numai dacă numărul format de ultimele sale două cifre este divizibil cu 4. 2. a) O condiție necesară și suficientă ca două plane să fie paralele este ca unul dintre ele să conțină două drepte concurente, ambele paralele cu celălalt plan. b) O condiție necesară și suficientă ca două triunghiuri să fie congruente este să aibă două laturi și unghiul cuprins între ele, o latură și unghiurile alăturate sau toate cele trei laturi, respectiv, congruente. 3. a) Fie $a = 6k$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Produsul $ab = 6kb = 6(kb)$, care este multiplu de 6. Condiția este suficientă, dar nu este necesară (dacă de exemplu $a = 2$ și $b = 3, ab = 6$); b) Orice număr natural se poate scrie la împărțirea prin 6 sub una din formele: $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$. Dintre acestea, cele de forma $6k, 6k+2, 6k+4$ sunt pare, iar $6k+3$ este divizibil cu 3. Pentru ca un număr p să fie prim ($p > 3$), nu trebuie să fie divizibil cu 2 sau 3, rămânând exclusiv formele de $6k+1$ și $6k+5$; c) Un dreptunghi este din definiție un paralelogram cu unghiuri drepte. O condiție necesară și suficientă ca un paralelogram să devină romb (să aibă laturi consecutive egale) este ca diagonalele sale să fie perpendiculare. 4. a) Din $\angle DAC \equiv \angle BCA$ (alterne interne) rezultă că dreptele AD și BC sunt paralele. Corelând cu $DO = OB$ și $\angle AOD \equiv \angle COB$ (opuse la vârf), triunghiurile AOD și COB sunt congruente, conform cazului U.L.U. Rezultă că diagonalele se înjumătățesc reciproc și patrulaterul este paralelogram. Reciproc, paralelogramul îndeplinește întotdeauna aceste ipoteze. b) Segmentul MN , unind mijloacele a două laturi opuse, este linia mijlocie a

figurii geometrice. Identitatea sa cu semisuma bazelor determină implicit paralelismul celorlalte două laturi opo-
nente prin inegalitatea patrulaterului, condiție unică pentru trapez. **5.** a) A; b) F; reciproca: A; c) A; reciproca: F,
ambele pot fi impare; d) A; reciproca F; e) A; reciproca A. **6.** a) Presupunem prin absurd contrariul: pentru $\forall i = \overline{1,5}$,
 $a_i < 3$. Suma lor, $a_1 + \dots + a_5$, devine strict mai mică decât 15, ceea ce contrazice imediat ipoteza; b) Presupunând
contrariul, avem $a_i > 60$ pentru toți termenii. În acest scenariu, suma celor șase componente depășește 360, fapt
incompatibil cu $S = 360$; c) Translând cele șase drepte coplanare pentru a fi concurente în același punct, planul
este fracționat în 12 unghiuri adiacente. Presupunând prin contrapozitie că fiecare din aceste 12 unghiuri ar fi
strict mai mare de 60° , suma acestora va fi mai mare ca rotația completă de 360° . **7.** a) Presupunem că $\sqrt{6} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,
unde fracția este ireductibilă; b) Presupunem $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$; $x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$; c) Presupunem
construirea a două perpendiculare distincte ce unesc un punct exterior cu aceeași dreaptă de bază (intersectând-o
în punctele B, respectiv C). Triunghiul geometric format ar poseda două unghiuri de 90° și o sumă generală ce de-
pășește 180° , contradicție; d) Considerăm variabila x care satisface cele două cazuri din enunț. Expresia formală
 $x = 3(2k + 1)$. Condiția dublată cere ca restul acestuia la 3 să fie 2. **8.** Ionescu Cristiana. **9.** Metoda contrapozitiei.
10. Se folosește suma elementelor din mulțimi. **11.** a) Considerăm rapoarte fracționare mai mici ca unu; b) Produ-
sul elementelor este 1. **12.** a) Utilizăm raționamentul de reducere la extrem. Presupunem $x > 2$ și $y > 2$; b) Folosim
 $x + y = xy$. **13.** Mulțimea celor 11 numere luate are suma generală termenilor 66. **14.** Principiul cutiei. **15.** Se pre-
supune $a \neq b$, însemnând $|a - b| = k > 0$. **16.** a) Se calculează mai întâi lungimile laturilor triunghiului; b) nu. **17.** Se
folosește $1 < 1/\sqrt{5} + 1/(1 + \sqrt{5})$. **18.** a) A; b) F. **19.** B. **20.** A.1. a) Sub 40%: România, Bulgaria; b) Între 50% și 60%:
Slovenia, Letonia; c) Peste 70%: Finlanda, Suedia. A.2. Cadrul statistic denotă un unghi procentual raportat la 27%.
A.3. falsă (ex: România atinge cota de 28%). B.1. „Țara are prag de minim 50% competențe sau deține scor superior
valorii blocului european comun”. B.2. a) $p(x)$ adevărat: Franța; b) $q(x)$ falsă: Germania; c) adevărată: Estonia. C.1.
a) „Există țări cel puțin cu un procent sub 50%”; b) „Orice țară UE are cel mult 70% per sector național vizat”. D.1.
A; 2. A; E.2. Malta; Spania. E.3. Da. G. Nu. Pg. 26-27. 1-4. Toate propozițiile se demonstrează verificând etapa ini-
țială $P(1)$ și demonstrând pasul inductiv $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. 5-7. Se verifică etapa inițială, apoi pentru demonstrarea
pasului inductiv $P(k + 1)$, se utilizează inegalitatea din ipoteza $P(k)$, realizându-se majorări sau minorări convena-
bile asupra termenilor adăugați. 8. Relațiile se demonstrează izolând un multiplu al divizorului la trecerea de la
rangul k la $k + 1$. De exemplu, pentru 8.a), expresia la pasul $k + 1$ se rescrie astfel: $5^{k+1} - 1 = 5(5^k - 1) + 4$, ambii
termeni fiind divizibili cu 4. 9. Suma se demonstrează prin evaluarea pasului inductiv, unde adăugarea termenu-
lui de rang $k + 1$ în structura sumei confirmă formula dreaptă pentru nivelul $n = k + 1$. 10. Trecerea la pasul $k + 1$
se reduce la aplicarea aceleiași inegalități pentru 2 grupe. 11. Se bazează pe faptul că adăugarea celui de-al
($k + 1$)-lea punct adaugă exact k drepte noi la subpunctul a), respectiv $\frac{k(k-1)}{2}$ triunghiuri noi la subpunctul b). 12.
La pasul inductiv, o mulțime cu $k + 1$ elemente va avea toate cele 2^k submulțimi ale mulțimii precedente, la care se
adaugă aceleași 2^k submulțimi reunite cu noul element, obținându-se totalul de 2^{k+1} submulțimi. 13. Inegalitatea
se demonstrează multiplicând relația de la pasul k cu $\frac{a+b}{2}$ și exploatând identitatea cert pozitivă $(a-b)(a^k - b^k) \geq 0$. 14. Pasul inductiv demonstrează că funcția creată din suma respectivă se conservă intactă (nu se modifică) la
adăugarea unității. 15. a) $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ adevărate; b) Se folosește $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} > 0$. 16. a) Se
demonstrează direct observând că suma celor 2^k termeni adăugați la pasul $k + 1$ este strict mai mare decât $1/2$; b)
Grupează termenii adăugați în calupuri de puteri ale lui 2 pentru a susține dubla inegalitate; c) minorare a produ-
sului nou obținut. 17. a) Prin varianta de inducție cu doi pași anteriori recurenți: $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) -$
 $\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \in \mathbb{Q}$; b) Asemănător a); c) Soluția unică este $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 19. Aplicăm Identitatea lui Abel, sumele
se restrâng la formele: i) $S = 2 - \frac{n+2}{2^n}$; ii) $S = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6$. 20. Numărul total se compune din participanții
din ziua k adunați cu noii recrutați: $(2^k - 1) + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$. 21. Se aplică varianta de inducție. Se vali-
dează etapa de inițiere pentru baza $P(8)$, $P(9)$ și $P(10)$. Pentru orice pas ulterior $k + 1$ (unde $k \geq 10$), suma se obține
reluând configurația din etapa $k - 2$, la care se adaugă o canistră de 3 credite. Pg. 28. Test de evaluare. 1. a) A; b)
F; c) F. 2. a) „Dacă suma $x + y$ este un număr irațional, atunci cel puțin unul dintre numerele x și y este irațional.”;
b) „Dacă cel puțin unul dintre numerele x și y este irațional, atunci suma $x + y$ este un număr irațional.”. Falsă.
Contraexemplu: $x = \sqrt{2}$ și $y = -\sqrt{2}$. 3. Inducție: $C_{k+1} = C_k + k = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1) + 2k}{2} = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$.
4. a) $p: xy + 2x + 3y + 6 \neq 0$; $q: x \neq -3$ sau $y \neq -2$; b) $(\neg q \rightarrow \neg p)$: „Dacă $x = -3$ și $y = -2$, atunci $xy + 2x + 3y + 6 = 0$ ”;
c) Contrapozitia este o propoziție adevărată.

Capitolul 2

Pg. 35-36. 1. c). 2. a) $a_{20} = -1$; b) $a_{100} - a_{50} = 1$; c) $S_{100} = 0$; d) $a_n = 0$, dacă $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$; $a_n = -1$, dacă $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$; $a_n = 1$, dacă $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}^*$. 3. b) $(x_n)_{n \geq 1}$ este șirul lui Fibonacci. 4. f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{3n-2}{4n+1}$, $n \geq 1$. 5. a) Asemănări: ambele șiruri încep cu 2, sunt crescătoare, au termeni pozitivi, sunt definite printr-o regulă. Deosebiri: șirul A crește prin adunare cu 5, iar șirul B prin înmulțire cu 2; b) Șirul A: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47. Șirul B: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024; c) $a_n = 5n - 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 6. a) Primii 5 termeni sunt: $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $a_3 = 2$, $a_4 = -2$, $a_5 = 2$; b) Vârfurile patrulaterului sunt $A_2(2, -2)$, $A_3(3, 2)$, $A_4(4, -2)$, $A_5(5, 2)$; $A_2A_4 \parallel A_3A_5 \parallel OX$, $A_2A_4 = A_3A_5 = 2$, deci $A_2A_4A_5A_3$ este paralelogram; c) Construind punctele $B(1, 2)$, $C(1, -2)$, $D(5, -2)$, aria polygonului $A_1A_2A_4A_5A_3$ se poate calcula scăzând din aria pătratului $BCDA_5$ ariile triunghiurilor dreptunghice A_1CA_2 , A_1BA_3 și A_4DA_5 . Deci, $\text{aria}(A_1A_2A_4A_5A_3) = 4^2 - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} = 11(u^2)$. 7. Numărul de pagini citite în ziua n este $z_n = 5n + 10$, $\forall n \geq 1$. 8. Numărul total de pagini citite până la finalul zilei n este $p_n = \sum_{k=1}^n z_k = \frac{5n(n+5)}{2}$, $\forall n \geq 1$. 9. a) $x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 1$; b) $x_n = (n-1)^2$, $\forall n \geq 1$; c) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(n-1)!}$, $\forall n \geq 1$ (cu convenția $0! = 1$); d) Relația de recurență se rescrie $x_{n+1} - 1 = \frac{x_n - 1}{n}$ și notând $y_n = x_n - 1$, $\forall n \geq 1$, se obține șirul de la punctul c), dar $y_1 = -1$; deci $y_n = -\frac{1}{(n-1)!}$, iar $x_n = 1 - \frac{1}{(n-1)!}$, $\forall n \geq 1$. 10. Șirul este periodic, cu perioada 6; $2026 = 6 \cdot 337 + 4$, deci $a_{2026} = 3$, a patra valoare din secvența de 6 numere. 11. $\frac{17}{4n+10} < \frac{1}{10000}$, $n > 42497,5$, deci $p = 42498$. 12. a) Orice număr natural este de forma $n = 10k + r$, unde $k \in \mathbb{N}$ și r este una dintre cifrele 0, 1, 2, ..., 9. Ultima cifră a lui n^2 este ultima cifră a lui r^2 , ceea ce înseamnă una dintre cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9. Deci, ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi 2, 3, 7 sau 8; b) Termenii primului șir, $x_n = 10^{n-1} + 8$, au ultima cifră 8, $\forall n \geq 2$, deci nu pot fi pătrate perfecte. Pentru $n = 1$, $x_1 = 9$ este pătrat perfect. Răspunsul este 1. Pentru al doilea șir, cu $y_n = n! + 8$, toți termenii cu ranguri mai mari sau egale cu 5 au ultima cifră 8, căci $n!$ va avea ultimă cifră 0, deci nu sunt pătrate perfecte. Verificând pentru valorile rămase, găsim un singur pătrat perfect: $y_1 = 9$. **Pg. 46-47. Activități de învățare:** 1. a) Progresie aritmetică; b) $r = 10$; c) În fiecare lună economisește cu 10 lei mai mult decât în luna precedentă; d) Decembrie: 160 lei; e) Total 2027: 1 260 lei; f) Total 2027-2028: 3 960 lei; g) $S_n = 5n(n+9)$. Din $5n(n+9) = 14\,750$, rezultă $n = 50$, deci februarie 2031; h) Situația cea mai avantajoasă este ca rația înjumătățită să apară cât mai târziu, adică în ultimii doi ani consecutivi analizați. 2. a) La Pasul 3: 16 piese; b) Model aritmetic pe rânduri: $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, rație 2. Model geometric pe pași: 1, 4, 16, ..., rație 4; c) Pasul 4 are 64 piese; d) $p_n = 4^{n-1}$; e) Aria unei piese: la Pasul 2 este $\frac{1}{4}$ din aria inițială; la Pasul 3 este $\frac{1}{16}$; f) $(s_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică, cu rația $\frac{1}{4}$. 3. a) $a = 1,03$, $b = 1,02$; b) Andrei: $2\,000 \cdot 1,03^4 = 2\,251,01762$ lei; Bogdan: $2\,000 \cdot 1,02^4 = 2\,164,86432$ lei; c) Diferența: 86,1533 lei; d) Nu este $2000 \cdot 0,01 \cdot 4$, deoarece diferențele lunare se capitalizează; e) Da, $2000(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 86,1533$; f) Termenii lipsă: $2000(a-b)a^2b$, $2000(a-b)ab^2$, $2000(a-b)b^3$; g) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. **Pg. 47-52. Probleme propuse.** 1. a) PG, $q = -\frac{1}{3}$; b) PA, $r = 5$; c) PG, $q = 3\sqrt{3}$; d) șir constant, PA cu $r = 0$, PG cu $q = 1$. 2. a) $x_n = \frac{n+1}{3n+2}$, nu este PA/PG; b) $x_n = \sqrt{n^3 - 1}$, nu este PA/PG; c) $x_n = 2(-2)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2^n$, PG, $q = -2$. 3. a) $0, \frac{1}{3}, 1, \frac{12}{5}, \frac{10}{3}$, nu; b) $-1, -1, -1, -1, -1$, PA și PG; c) $-2, 4, -6, 8, -10$, nu; d) 65536, 256, 16, 4, 2, nu; e) 2, -3, 7, -13, 27, nu; f) 1, 2, 6, 24, 120, nu; g) 1, 1, 2, 3, 5, nu. 4. a) $a = 2, b = 4, c = 5$; b) $a = -1, b = 1, c = 5$. c) $a = 0, b = -3, c = -6$; d) $a = 0, b = 4\sqrt{2}, c = 8\sqrt{2}$. 5. a) $x = 4, y = 32, z = 64$; b) $x = \sqrt{3}, y = 3\sqrt{3}, z = 27$; c) $x = \frac{1}{2}, y = 4, z = \frac{1}{128}$. 6. a) $a_n = 3n - 1$, $S_n = \frac{n(3n+1)}{2}$; b) $a_n = 5 - 2n$, $S_n = n(4 - n)$; c) $a_1 = 3$, $a_n = 10n - 7$, $S_n = n(5n - 2)$; d) $r = -\sqrt{3}$, $a_n = -(n-1)\sqrt{3}$, $S_n = -\frac{n(n-1)\sqrt{3}}{2}$. 7. a) $b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $S_n = 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$; b) $q = \pm 2$, $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_n = 3 \cdot 2^{n-2}$, $S_n = \frac{3}{2}(2^n - 1)$, $S_{n_2} = \frac{1}{2}(1 - (-2)^n)$; c) Șirul nu este constant, căci $3 = 3b_1 \neq 7 = S_3$, deci $q \neq 1$. Din $\frac{q^3 - 1}{q - 1} = 7$, $q \neq 1$, se obține ecuația $(q-1)(q^2 + q - 6) = 0$, cu soluții $q = 2$, $b_n = 2^{n-1}$, $S_n = 2^n - 1$, respectiv $q = -3$, $b_n = (-3)^{n-1}$, $S_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)$; d) $b_1 = -1$, $q = -3$, $b_n = -(-3)^n$, iar $S_n = \frac{1}{4}(-1 - (-3)^n)$. 8. a) Suma primilor 2017 termeni ai unei PA cu primul termen 10 și rația 1 este 2053306; b) Suma primilor 11 termeni într-o PG cu primul termen 2 și rația 2 este 4094; c) Suma primilor 105 termeni ai unei PA cu primul termen 20 și rație -5 este -25200; d) Suma primilor 8 termeni în PG cu primul termen 9 și rație $\frac{1}{3}$ este $\frac{3280}{243}$; e) Suma primilor 56 de termeni în PA cu rația 4 este $56x + 6216$; f) Suma se



scrie $3(1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^9) = \frac{3}{5}(6^{10} - 1)$; g) $\sum_{k=1}^n \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$; h) $n^2 + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. **9.** a), b), c) se demonstrează cu formula: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$. Pentru $x^{2n} + y^{2n}$, nu există o descompunere analogă prin factorul $x + y$, deoarece exponentul este par. **10.** Dacă unghiurile sunt în PA, le scriem: $x - r, x, x + r$. Suma lor este 180° , deci: $3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$. Triunghiul are un unghi de 60° . **11.** a) $y_5 = -\frac{9}{16}$, $y_{2n-1} = \frac{-4n+3}{6n-2}$, $y_{3n+1} = \frac{-6n-1}{9n+4}$; b) $y_{n+1} - y_n = \frac{-5}{(3n+1)(3n+4)} < 0, \forall n \geq 1$; c) Nu. **12.** a) $a_n = \frac{b_n+1}{6-4b_n}$, $b_n = \frac{6a_n-1}{4a_n+1}$, $n \geq 1$; b) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$, $n \geq 1$; c) $b_{n+1} = \frac{9-b_n}{11-4b_n}$, $b_{n+2} = \frac{18-7b_n}{17-8b_n}$, $n \geq 1$; d) $(a_n)_{n \geq 1}$ este PA cu rație $\frac{1}{2}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ nu este nici PA, nici PG. **13.** a) $b_n = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $n \geq 1$; b) $a_{4n+3} - a_{4n-1} = \left[\frac{4n+4}{2}\right] - \left[\frac{4n}{2}\right] = 2n + 2 - 2n = 2, \forall n \geq 1$. Termenii $a_3, a_7, a_{11}, \dots$ (cu rangurile din 4 în 4) formează o PA cu rație 2. **14.** $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_{20} = \frac{401}{43}$, dar $\frac{13}{7}$ nu este termen al șirului. **15.** Șirul este constant, $b_n = 4, \forall n \geq 1$, deci este PA cu rație 0 și PG cu rație 1. **16.** a) Primii zece termeni sunt: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3. Da, graficul corespunde; b) $S_{25} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 = 75$; c) Dacă $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p \in \mathbb{N}^*$, atunci $S_n = \sum_{k=1}^{p-1} k(2k+1) + p(n - p^2 + 1) = \frac{p(p-1)(4p+1)}{6} + p(n - p^2 + 1)$. **17.** a) Dacă $z_1 = 0$, șirul este constant $z_n = 0, \forall n \geq 1$, este PG banală, iar rația poate fi orice număr real. Dacă $z_1 = 1$, șirul are termenii 1, 0, 0, ..., 0, ... și orice termen, începând cu al doilea, se obține înmulțindu-l pe precedentul cu 0. Este PG banală, cu rație 0; b) Se demonstrează prin inducție matematică; c) $z_{n+1} - z_n = -z_n^2 < 0, \forall n \geq 1$. **18.** a) $a_8 = 1$; b) Șirul este periodic, cu perioada 6, deci $a_{2026} = a_{6 \cdot 337 + 4} = a_4 = 0$; c) $100 = 6 \cdot 16 + 4$, deci $S_{100} = 16(0 + 1 + 1 + 0 - 1 - 1) + 0 + 1 + 1 + 0 = 2$. **19.** Se demonstrează prin inducție matematică. **20.** Primul șir este PA cu rația 3, al doilea șir nu este nici PG, nici PA, al treilea șir nu este nici PA, nici PG, al patrulea șir este PG cu rație $\frac{1}{3}$. **21.** a) $a_1 = 1, r = 1$; b) $a_1 = 5, r = -2$; c) A doua ecuație este echivalentă cu $a_5 = 13$, iar prima se scrie $(a_5 - 2r)(a_5 + 2r) = 133$, de unde rezultă două progresii posibile, cu $a_1 = 1, r = 3$ sau cu $a_1 = 25, r = -3$. **22.** a) $b_1 = \frac{3}{7}$, $q = \frac{1}{2}$ sau $b_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$; b) $b_1 = 2, q = 3$ sau $b_1 = -2, q = -3$. c) Dacă $q = 0$, atunci $b_1 = 4 + \sqrt{3}$ (PG banală). Dacă $q \neq 0$, atunci $q^3 = 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$, deci $q = \sqrt{3}$ și $b_1 = 1$. Obs.: $b_1 \neq 0$, căci $S_3 \neq 0$. **23.** a) $x = -\frac{11}{3}$; b) $x \in \{-1, 3\}$; c) $x = \frac{4}{25}$; d) $x \in \left(\frac{7}{3}, 3\right]$; e) Relația între cei 3 termeni consecutivi din PA se reduce la ecuația $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \frac{2x-11}{5}$. Notând valoarea comună a celor două numere cu k , rezultă $k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{5k+11}{2}$ și $k \leq \frac{2x+1}{3} < k+1$. Înlocuind x în dubla inegalitate și rezolvând sistemul de inecuații, cu necunoscuta k , se obține $k \in \left[-6, -\frac{9}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{-6, -5\}$, deci $x \in \left\{-\frac{19}{2}, -7\right\}$. **24.** a) $x = \pm\sqrt{3}$; b) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$; c) Relația dintre cei 3 termeni consecutivi se reduce la $\left[\frac{1-x}{3}\right] = \pm 4$. Rezolvând cele două ecuații, se obține $x \in (-14, -11] \cup (10, 13]$; d) Relația dintre cei 3 termeni consecutivi se reduce la $x = 3\left[\frac{3x-1}{5}\right]$, deci $\left[\frac{3x-1}{5}\right] = k$ și $x = 3k$. Rezultă $k = 1$ și $x = 3$. **25.** a) A 11-a casă; b) Pe dreapta apar numerele pare; de la 12 la 36 sunt $((36-12)/2) + 1 = 13$ case. **26.** a) $S = 10\,000 \cdot 1,05^5 = 12\,762,815625$ euro; b) $S_0 = \frac{46305}{1,05^3} = 40\,000$ euro. **27.** $\frac{2}{2b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$ $b^2 = ac$. Numerele fiind nenule, a, b, c sunt în PG. **28.** $P = y_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **29.** a) $|x| \neq |y| \Rightarrow x \neq \pm y$, deci $x + y \neq 0$ și similarele, deci numitorii nu sunt nuli, de unde rezultă că a, b, c sunt bine definite; b) Dacă x^2, y^2, z^2 sunt în PA, atunci $y^2 = \frac{x^2 + z^2}{2}$. Dar $a + c = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{2y+x+z}{xy+xz+y^2+yz} = \frac{2(2y+x+z)}{(x+z)(2y+x+z)} = \frac{2}{x+z}$, deci a, b, c sunt în PA. Reciproc, dacă a, b, c sunt în PA, atunci $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{2}{x+z}$, de unde $x^2 + z^2 = 2y^2$, deci x^2, y^2, z^2 sunt în PA. **30.** $a + c = 2b$; a) $(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) = a^2 + c^2 + b(a+c) + 2b^2 = a^2 + c^2 + \frac{(a+c)^2}{2} + \frac{(a+c)^2}{2} = 2(a^2 + ac + c^2)$; b) Se aplică 29.b). **31.** a) $a_1 = \frac{13S-9T}{40}$, $r = \frac{T-S}{20}$; b) Dacă $q = 1$, șirul este constant, deci $S = T = 10a_1$, de unde $a_1 = \frac{S}{10}$. Dacă $q \neq 1$, atunci $S = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1}$, $T = a_3 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = a_1 \cdot q^2 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1}$. Dacă PG este degenerată, pentru $a_1 = 0$ se obține $S = T = 0$ și rația poate fi orice număr real, iar pentru $q = 0$ se obține $S = a_1$ și $T = 0$. Dacă PG nu este degenerată (banală), se obține $q^2 = \frac{T}{S}$, deci $q = \pm\sqrt{\frac{T}{S}}$, iar $a_1 = \frac{S(\pm\sqrt{\frac{T}{S}}-1)}{\left(\frac{T}{S}\right)^5-1}$. **32.** Propoziția este falsă. Doar implicația directă este adevărată, reciproca este falsă: pentru $a = 1, b = 2, c = 4, d = 5$, numerele $a + b = 3, b + c = 6, c + d = 9$ sunt în PA,

dar a, b, c, d nu sunt în PA. **33.** a) Sunt 57 de termeni în PA cu rație 2; $x = \frac{3}{2}$; b) Ecuația devine $2^{1+3+5+\dots+x} = 2^{36}$, de unde $1 + 3 + 5 + \dots + x = 36$, iar $x = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}^+$; $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, de unde $n = 6$ și $x = 11$; c) $x = 1$ nu este soluție. Ecuația se rescrie $\frac{x^6 - 1}{x - 1} = 0$, de unde $x = -1$; d) $x = 1$ nu este soluție. Ecuația devine $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = 0$, cu singura soluție reală $x = 1$ care nu convine; e) Ecuația se rescrie $\left[x + \frac{1}{10}\right] + \left[x + \frac{1}{10}\right] + 2 + \left[x + \frac{1}{10}\right] + 4 + \dots + \left[x + \frac{1}{10}\right] + 20 = 99$, de unde $11 \cdot \left[x + \frac{1}{10}\right] + 110 = 99$, sau $\left[x + \frac{1}{10}\right] = -1$; $x \in \left[-\frac{11}{10}, -\frac{1}{10}\right)$; f) Notând $\{x\} = t$, avem $t \in [0, 1)$ și ecuația devine $t \cdot \frac{t^9 - 1}{t - 1} = \frac{1024t - 1}{1024(1 - t)}$, de unde $t^{10} = \frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, cu soluția $t = \frac{1}{2}$; $x \in \left\{k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **34.** Dacă unghiurile sunt în PA cu rație r , măsurile lor se pot scrie $x, x + r, x + 2r, x + 3r$, iar suma lor este 360° . Deci $4x + 6r = 360^\circ$, sau $x = 90^\circ - \frac{3r}{2}$. Dar, în patrulaterul convex $x \in (0^\circ, 180^\circ)$, adică $r \in (-60^\circ, 60^\circ)$. **35.** Într-o PA, diferența oricăror doi termeni (nu neapărat consecutivi) este produsul dintre rație și un număr întreg, ceea ce conduce la $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ (sau oricare altă permutare a radicalilor în raportul diferențelor), ceea ce este fals. Într-o PG, raportul a doi termeni (nu neapărat consecutivi) este o putere cu exponent întreg a rației, ceea ce conduce la o relație de forma $2^u \cdot 5^v \cdot 7^p = 1$, unde $u, v, p \in \mathbb{Z}$, ceea ce este imposibil din unicitatea descompunerii în factori primi. **36.** a) Termenii $x_1, x_5, x_9, x_{13}, \dots$ sunt de forma x_{4n-3} , $n \geq 1$. Diferența a doi termeni consecutivi, de această formă, este $x_{4n+1} - x_{4n-3} = x_1 + 4n \cdot r - x_1 - (4n - 4) \cdot r = 4r$, $\forall n \geq 1$, deci termenii formează PA cu rația $4r$; b) Dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ este PA de numere naturale, cu rația $p \in \mathbb{N}$, atunci $b_n = b_1 + (n - 1) \cdot p$, $\forall n \geq 1$; $x_{b_{n+1}} - x_{b_n} = x_1 + (b_{n+1} - 1) \cdot r - x_1 - (b_n - 1) \cdot r = (b_{n+1} - b_n) \cdot r = p \cdot r$, $\forall n \geq 1$, deci șirul este PA cu rație $p \cdot r$. **37.** a) Se calculează $T - \frac{1}{q}T = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} - \frac{n}{q^n} = \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} - \frac{n}{q^n}$, pentru $q \neq 1$; $T = \frac{q}{q-1} \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} - \frac{n}{q^n}\right]$. Pentru $q = 1$, $T = \frac{n(n+1)}{2}$; b) Dacă $q = 1$, șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este constant, deci $S = \frac{1}{b_1} \cdot \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(2a_1 + (n-1) \cdot r) \cdot n}{2b_1}$. Dacă $q \neq 1$, $S = \sum_{k=1}^n \frac{a_1 + (k-1) \cdot r}{b_1 \cdot q^{k-1}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^{k-1}} + \frac{r}{b_1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{q^{k-1}} = \frac{q}{q-1} \left(a_1 \left(1 - \frac{1}{q^n}\right) + \frac{r}{q-1} \left(1 - \frac{1}{q^{n-1}}\right) - \frac{(n-1)r}{q^n}\right)$. **38.** Problema pixelilor. a) $p_7 = 100 \cdot 2^6 = 6400$; b) $p_k \geq 2000000 \Leftrightarrow 100 \cdot 2^{k-1} \geq 2000000 \Leftrightarrow 2^{k-2} \geq 10000 \Leftrightarrow k - 2 \geq 14$, deci după 16 pași imaginea devine foarte bună. **Pg. 54. Test evaluare.** **1.** a) $\frac{95}{12}$; b) $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, deci nu este PA, iar $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(3n+5)(n+1)}{(3n+2)(n+2)}$, deci nu este PG. **2.** a) $a_{2026} = 6077$, $S_{50} = 3775$; b) $b_{12} = 4096$, $S_{12} = 8190$; c) $a_{171} = 512$, deci este termen al progresiei aritmetice, $512 = 2^9 = 2 \cdot 2^8 = b_9$, deci este termen al progresiei geometrice. **3.** a) $x = \pm 1$; b) Membrul stâng este suma primilor n termeni în PA, cu $a_1 = 1$ și $r = 4$; $x = a_n = 4n - 3$, deci $(2n - 1) \cdot n = 780$, cu singura soluție naturală $n = 20$, de unde $x = 77$. **4.** După 4 ani. **5.** $a \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$.

Capitolul 3

Pg. 60-62. **1.** a) Da; b) Da; c) Nu; d) Nu; e) Da. **2.** $Im(f) = \{2, 5, 8\}$. **3.** a) reprezintă o funcție; b) nu reprezintă o funcție. **4.** a) $B = \{6\}$; b) B poate fi orice submulțime a lui A . **5.** $f(2) = 1$, $f(-1) = 1$. **6.** $Im(f) = \{4\}$. **7.** $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită ca $g(x) = x - 2$. **8.** $a = 1$. **9.** Preimaginea este $\{5\}$. **10.** Presupunerea $f(x_1) = f(x_2)$ ar duce la concluzia că $3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$, fals. **11.** Condiția de existență a radicalului; a) $A = [-4, \infty)$; $f(0) = 2$; $f(2) = \sqrt{6}$; b) $A = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $f(0) = -\frac{1}{3}$; $f(2) = -5$; c) $A = \mathbb{R} \setminus [3, 4)$; $f(0) = -\frac{1}{3}$; $f(2) = -1$. Da, 2 este imaginea funcției de la punctul a) pentru $x = 0$. Celelalte nu sunt imagini pentru 0 sau 2. **12.** 1 aparține imaginii, iar preimaginea lui este $\{0, 1\}$; 0 nu aparține imaginii. **13.** Dacă $a \geq 1$, atunci preimaginea conține cel mult un singur element. **14.** Nu sunt egale. **15.** $\frac{x}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$. $\Delta = -3 < 0$. **16.** a) $Im(f) = [1, \infty)$; b) $Im(f) = [1, 7]$. **17.** Restricția este $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{Q}$, $g(x) = x + 2$. **18.** Preimaginea este $\{1, 3\}$. **19.** a) $f(x) = 3x + 15$; b) $D = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$; c) Imaginea conține toate costurile posibile: $Im(f) = \{15, 18, 21, \dots, 105\}$. **20.** $f(2030) = 6090$. **21.** $Im(f) = [-1, 1)$. **22.** Pentru $y = -x$ avem $f(0) \geq f(x) + f(-x)$, iar știind că $f(0) = 0 \Rightarrow 0 \geq f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) \leq -f(-x)$. **23.** $f(x^2) = ax^2 + b$. Funcția este de forma $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$. **24.** $x = 5$. **25.** $f(x) = x + 1$. **26.** A poate fi orice mulțime finită de numere întregi. **27.** a) $f(x) = 15$, dacă $0 \leq x \leq 10$, $f(x) = 2x - 5$, dacă $x > 10$. b) $D = [0, 80]$; c) $Im(f) = [15, 155]$. **28.** a) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$; b) 3; c) 2^3 . **29.** a) $Im(f) = \mathbb{R}$. b) $Im(f) = \{3\}$; c) $Im(f) = (8, \infty)$; d) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; e) $Im(f) = [-1, \infty)$. **30.** Funcția este definită pe ramuri și valorile vor corespunde proiecției. a) $\{0, -3\}$; b) $(-5, -1]$; c) $(-7, 5]$; d) $(-\infty, 1]$; e) $[-3, 1) \cup (3, 5]$; f) $Im(f) = (-\infty, 1) \cup (-\infty, 5] = (-\infty, 5]$. **31.** a) $f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{2}, 6\}$; b) $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$, imposibil (deoarece $x < 0$); $\sqrt{x+3} = 1 \Rightarrow x = -2$, imposibil ($x \geq 0$);



c) $Im(f) \subset (1, \infty)$. **32.** $f(2) = 1$ și $f(3) = 1$. **Pg. 67-69. 1.** $(2, 0); (0, 8); (3, -4); (1, 25, 3)$. **2.** Pentru $x \in (-\infty, 5)$, $f(x) > 0$. Pentru $x \in (5, \infty)$ funcția este negativă $f(x) < 0$; $f(5) = 0$. **3.** $G_f \cap Ox = \emptyset$. **4.** $G_f = \{(-2, 5), (-1, 3), (0, 1), (1, -1), (2, -3)\}$. **5.** $y = 21$; $x = 4, 5$. **6.** Graficul se află deasupra axei Ox pentru $x \in (\frac{3}{5}, \infty)$. **7.** $a \in \mathbb{R}$ și $b = -12$. **8.** $a = 1$. **9.** Punctul de intersecție este $P(5, 18)$. **10.** Intersecția cu Ox este punctul $A(-2, 0)$. Intersecția cu Oy este punctul $B(0, 2)$. **11.** $x = 1$. Abscisa intersecției graficului funcției cu dreapta orizontală $y = 2$. **12.** Aria triunghiului este 4. **13.** $QP = 5,5$ și $RQ = 2\sqrt{5}$. **14.** a) $f(x) = 5x + 40$; b) După 28 de zile. Geometric, reprezintă abscisa punctului de intersecție dintre dreapta funcției și orizontala $y = 180$; c) $Im(f) = [40, 190]$. **15.** a) $f: [0, \frac{25}{3}] \rightarrow [0, 100]$, $f(x) = -12x + 100$; b) $(\frac{25}{3}, 0)$ sau $(8, 33, 0)$. Bateria s-a descărcat complet la 0%; c) Domeniul de timp valid este $x \in [0, \frac{25}{3}]$ ore. **16.** a) $f(x) = 5x + 10$; b) $x = 9$ zile. Geometric, abscisa punctului de pe grafic aflat la înălțimea $y = 55$; semnifică numărul de zile necesar atingerii sumei pentru pizza; c) Segmentul de dreaptă ce unește punctele $(0, 10)$ și $(10, 60)$. **17.** a) $f(x) = 2x + 50$ și $g(x) = 4x + 30$; b) $x = 10$. Reprezintă numărul de GB suplimentari la care ambele oferte au exact același cost total (70 lei); c) Oferta lui Matei este mai avantajoasă. **18.** Nu, nu există. **19.** $f(x) = 0$. **20.** $a = 3$, $b = -5$. **21.** $x \in \{-1, 3\}$, abscisele celor două puncte în care graficul funcției „modul” intersectează dreapta orizontală $y = 2$. **22.** $x \in \{-4, 6\}$. **23.** $f(x) = -4x$. **24.** $m \in (-\infty, 1]$. **25.** a) $(0, 10)$; $f(5) = 60$ semnifică dificultatea maximă a jocului; b) Intersecția cu Ox este punctul $(17, 0)$. Semnul este pozitiv pe $(5, 17)$ și negativ pe $(17, \infty)$. Dificultatea negativă arată sfârșitul matematic al modelului jocului; c) Soluțiile sunt $x = 3$ și $x = 9$. Acestea sunt momentele de intersecție cu dreapta $y = 40$, reprezentând minutele în care dificultatea ideală este atinsă; d) Valoarea maximă este 60, atinsă în minutul 5. **Pg. 77-78. 1.** $\mathbb{R}$. **2.** Minimul este $f(-1) = 0$, iar maximul este $f(2) = 3$. **3.** Funcția este pară. **4.** Graficul este simetric față de origine (funcție impară), nu față de axa Oy . Da, există funcții simultan pare și impare: funcția constantă nulă, $f(x) = 0$ (simetrică atât față de axa Oy , cât și față de origine). **5.** Reprezentarea grafică este o dreaptă ce trece prin origine. Orice funcție liniară este o funcție convexă, fiind simultan și concavă. **6.** strict crescătoare. **7.** $f(-2) = f(2) = 5$. **8.** Funcția este strict descrescătoare. Pentru a-i rămâne cel puțin jumătate din sumă (500 lei), inecuația este $-35x + 1000 \geq 500 \Rightarrow 35x \leq 500 \Rightarrow x \leq 14,28$. Trebuie să anuleze abonamentul după cel mult 14 luni. **9.** Funcția este strict descrescătoare pe $(-\infty, 3]$ și strict crescătoare pe $[3, \infty)$. **10.** Domeniul $[-1, 1]$ este simetric. Funcția este impară. **11.** a) Inegalitatea devine $(x - 1)^2 \geq 0$, ceea ce este adevărat pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) Funcția este mărginită superior de 4, dar nu este mărginită inferior. **12.** $f(-3) + f(3) = -f(3) + f(3) = 0$. **13.** Distanța este 2. **14.** Exemplu de interval pe care e descrescătoare: $I = [-5, -2]$. Cel mai „mare” interval pe care funcția rămâne strict crescătoare (de la vârf spre dreapta) este $J = [0, \infty)$. **15.** Funcția este monoton crescătoare pe tot domeniul. **16.** funcția este strict crescătoare. **17.** Funcția $f(x) = x^2 - 2$ este mărginită. Minimul: $f(0) = -2$. Maximul: $f(-1) = f(1) = -1$. **18.** $a = 0$. **19.** Funcția este strict crescătoare pe intervalul $[-5, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, 5]$. Maximul: $f(0) = 5$. **20.** Funcția este crescătoare și pe $[-5, 0]$. **21.** a) Pe $[0, 4]$, funcție strict descrescătoare; pe $(4, 10]$, funcție strict crescătoare; b) Funcția are un punct de extrem. Funcția este nemonotonă pe tot intervalul $[0, 10]$. **22.** Da, există. **Pg. 82-84. 1.** a) $(f + g)(x) = x^2 + 6x$; $(f \cdot g)(x) = 3x^3 + 11x^2 - 4$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+2}{x^2+3x-2}$, pe domeniul $(0, \infty) \setminus \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$; b) $(f + g)(x) = \frac{x^2+4x+5}{x+2}$; $(f \cdot g)(x) = 1$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (x+2)^2$, pe domeniul $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; c) Intersecția domeniilor este $(-2, 2)$. Astfel: $(f + g)(x) = x^2 + x - 12$; $(f \cdot g)(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x+3}$ pe $(-2, 2)$; d) Intersecția domeniilor $(0, \infty)$ și $(-3, 0)$ este mulțimea vidă ($\emptyset$). Operațiile nu se pot defini. **2.** Înmulțirea cu un număr pozitiv $a > 0$ păstrează monotonia, iar înmulțirea cu $a < 0$ o inversează. În ambele cazuri, rezultatul rămâne o funcție monotonă. **3.** a) Da, se poate generaliza: suma a două funcții crescătoare este crescătoare, iar a două funcții descrescătoare este descrescătoare; b) i) strict descrescătoare; ii) strict crescătoare; c) i) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; ii) $x \in (-\infty, 1]$. **4.** a) Dacă ambele iau valori negative și au aceeași monotonie, produsul lor își inversează monotonia; b) i) strict crescătoare; ii) nemonotonă pe $\mathbb{R}$; c) i) $x \in (\sqrt{2}, \infty)$; ii) $x \in [1, \pi]$. **5.** a) $|f(x)| \leq M \Rightarrow |af(x)| \leq |a|M$; b) $|f + g| \leq M_1 + M_2$ și $|f \cdot g| \leq M_1 \cdot M_2$; c) i) $0 \leq \{x\} < 1$ și $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow f(x) \in [0, 1)$; ii) $f(x) \in [-1, 2)$. **6.** a) $(g \circ f)(x) = 2x + 5$; $(f \circ g)(x) = 2x + 7$; b) x ; c) $(g \circ f)(x) = x^2 + 4$; $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 4$; d) 0; e) $(g \circ f)(x) = 2x$ (pentru $x < -\frac{1}{2}$) și $4x - 3$ (pentru $x \geq -\frac{1}{2}$); $(f \circ g)(x) = 2x - 1$ (pentru $x < 0$) și $4x - 9$ (pentru $x \geq 0$); f) nu este comutativă. **7.** $(h = f \circ g)$; a) $g(x) = x - 1$, $f(x) = 2|x| + 1$; b) $g(x) = x + 1$, $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$; c) $g(x) = x^2 + x + 1$, $f(x) = 2x^2 + x + 3$; d) $g(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2 + x + 1$; e) $g(x) = x + \frac{1}{x}$, $f(x) = 2(x^2 - 2) + x$. **8.** a) $(g \circ f)(x) = x$; $(f \circ g)(x) = x$; b) $(g \circ f)(x) = -x + 3$; $(f \circ g)(x) = -x$; c) $(g \circ f)(x) = x$; $(f \circ g)(x) = x$. **9.** a) $P(x) = 35x - 350$; b) $P(20) = 350$. Interpretare: Andrei obține un profit de 350 lei din vânzarea a 20 de tricouri. **10.** a) strict crescătoare; b) strict descrescătoare. **11.** a) $x + n$; b) $2^n x + 3(2^n - 1)$; c) x dacă n par;

$-x + 3$ dacă n este impar; d) $a^n x + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$ (dacă $a \neq 1$) și $x + nb$ (dacă $a = 1$). **12.** a) Substituind $y = g(x)$, deducem $|f(g(x))| \leq M, \forall x$. **13.** a) Valorile funcției se află între $f(a)$ și $f(b)$; b) Deoarece $g(x) \in [a, b]$, funcția $f(g(x))$ va fi mărginită. **14.** a) Compunerea a două funcții impare produce o funcție *impară*; b) La parități diferite (una pară, alta impară), compusa va fi întotdeauna o funcție pară. **15.** a) Presupunând prin absurd, ar rezulta că $f(f(f(x))) = f(4x) = 3x$ și, simultan, $f(f(f(x))) = 4f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}x$. Această formă conduce la $f(f(x)) = \frac{9}{16}x$, contradicție; b) Există $f(x) = 2x$. **16.** a) $g(2x) = x$. Putem alege $g(y) = y/2$ pentru orice număr par, iar pentru y impar îi putem atribui orice valoare. b) Nu. **17.** a) $V(x) = -10x^2 + 100x + 2000$; b) $V(5) = 2250$ lei. **18.** a) $g(x) \in \{2x, 2x + 1\}$; b) Nu există. **19.** a) $(A \circ r)(t) = 3,14 \cdot (0,5t)^2 = 0,785t^2$; b) $A(10) = 0,785 \cdot 100 = 78,5 \text{ m}^2$. **20.** $f(n) = n + 3$. **Pg. 88-89. 2.** Funcțiile posibile sunt trei: $f_1(1) = 5, f_1(2) = 9, f_1(3) = 5; f_2(1) = 5, f_2(2) = 9, f_2(3) = 7; f_3(1) = 5, f_3(2) = 9, f_3(3) = 9$; singura funcție injectivă este f_2 . **3.** a) injectivă; b) injectivă. **4.** a) $f(0) = f(7)$; b) $f(1) = f(3)$; c) $f(1) = f(-1)$; d) $f(1) = f(1,5)$; e) $f(1) = f(2)$; f) $f(1) = f(2)$; g) $f(2) = f(0,5)$. **5.** a) Nu este injectivă; b) Este injectivă. **6.** a) Este injectivă; b) Nu este injectivă; c) Este injectivă; d) Este injectivă. **7.** a) $m + 2 \geq 1 \Rightarrow m \in [-1, \infty)$; b) $m \cdot 1 + 2 \geq 1$ și $m > 0 \Rightarrow m \in (0, \infty)$; c) Nu există niciun $m \in \mathbb{R}$; d) $m \in (0, \infty)$; e) $m \in (-\infty, 1]$. **8.** a) Strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$. Este injectivă; b) Descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$. Nu este injectivă; c) Funcție monoton crescătoare. Nu este injectivă; d) Crescătoare, dar constantă pe intervalul $(0, 1)$. Nu este injectivă; e) Funcție strict descrescătoare, injectivă. **9.*** a) $h(2) = h(8) = 16$, deci funcția nu este injectivă; b) Nu; c) $t \in [0, 5]$ sau $t \in [5, 10]$. Pe oricare dintre ele funcția este strict monotonă și injectivă. **10.** a) $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{3n_1}{n_1 + 100} = \frac{3n_2}{n_2 + 100} \Rightarrow 3n_1n_2 + 300n_1 = 3n_1n_2 + 300n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$; b) Nu. **11.** Rezolvând ecuația $f(x_1) = f(x_2)$, obținem: $\frac{2x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{2x_2 + 1}{x_2 - 1} \Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 + x_1 - 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Funcția este injectivă. **12.** Folosim definiția injectivității. Nu este obligatoriu ca g să fie injectivă pe întreg domeniul B . Este suficient ca g să fie injectivă doar pe submulțimea imaginilor lui f . **Pg. 93-94. 1.** $Im(f) = \mathbb{R}$. Funcția este surjectivă. **2.** f este surjectivă, g nu este surjectivă. **3.** Funcția este surjectivă. **4.** Nu este surjectivă. **5.** a) $Im(f) = \mathbb{R}$; b) $Im(f) = [-\frac{25}{12}, \infty)$; c) $Im(f) = [-\frac{A}{4a}, \infty)$ pentru $a > 0$, respectiv $Im(f) = (-\infty, -\frac{A}{4a}]$ pentru $a < 0$; d) $Im(f) = [-1, 1]$; e) $Im(f) = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$; f) $Im(f) = \mathbb{R}$. **6.** a) Este surjectivă; b) Nu este surjectivă; c) Nu este surjectivă; d) Este surjectivă. **7.** Toate sunt nesurjective deoarece imaginile lor sunt strict incluse în codomeniu. **8.** a) $m \in [-1, \infty)$; b) Nu există $m \in \mathbb{R}$ care să facă funcția surjectivă; c) $m \in (-\infty, 0)$. **9.** a) $f(x) = \begin{cases} 4x + 2, & x \in [0, 0,5] \\ -4x + 6, & x \in (0,5, 1] \end{cases}$; b) $g(x) = x + 2$. Imaginea e $[2, 3] \subset [2, 4]$. Este injectivă, dar nu surjectivă. **10.** Pentru ca funcția să fie surjectivă, trebuie să acopere toate cele n elemente ale codomeniului. Cum din cele n elemente ale domeniului ies cel mult n imagini distincte, acoperirea totală implică faptul că nu pot exista două elemente din domeniu trimise în același element din codomeniu. **11.** a) Starea operațională necesită ca nicio zonă din Z să nu rămână fără curier, ceea ce înseamnă că imaginea funcției de alocare este întregul Z . Aceasta este însăși definiția surjectivității; b) Aplicăm regula: $a(c_1) = z_2; a(c_2) = z_3; a(c_3) = z_1; a(c_4) = z_2$. Deoarece toate cele trei zone (z_1, z_2, z_3) au primit cel puțin un curier, funcția este surjectivă, așadar serviciul este operațional. **12.** Ecuația de dispersie asociază claselor *mod*12 resturi *mod*4; $x = 0 \Rightarrow (0 + 2) \text{ mod } 4 = 2$; $x = 1 \Rightarrow (3 + 2) \text{ mod } 4 = 1$; $x = 2 \Rightarrow (6 + 2) \text{ mod } 4 = 0$; $x = 3 \Rightarrow (9 + 2) \text{ mod } 4 = 3$. Funcția este surjectivă. Fiindcă 12 intrări sunt distribuite în mod egal în 4 containere, fiecare recipient va conține exact 3 chei. Aceasta înseamnă 3 *suprapuneri* pentru fiecare element din codomeniu. **Pg. 96. 1.** a) bijectivă; b) bijectivă; c) nu este bijectivă. **2.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **3.** Pot fi construite 3! funcții bijective. **4.** Funcția este strict crescătoare pe $[1, \infty)$ și $Im(f) = [0, \infty)$. **5.** a) funcție strict descrescătoare cu imaginea $\mathbb{R}$; b) strict crescătoare, $Imf = [0, \infty)$; c) strict descrescătoare pe domeniu, cu $Imf = [0, \infty)$; d) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, Imf = \mathbb{R}$; e) funcție strict crescătoare; $f((-\infty, 2]) = (-\infty, 3], f(2, \infty) = (3, \infty)$; f) permutare în perechi de numere naturale consecutive; g) surjectivă și injectivă datorită unicității soluției pe $[1, \infty)$. **6.** a) Nu e injectivă ($f(0) = f(-1)$); b) Nu e injectivă ($[1] = [1, 5]$); c) Nu e injectivă ($\{0\} = \{1\}$); d) Nu e surjectivă; e) Nu e surjectivă (nu se poate obține $(1, 2)$); f) Nu e surjectivă. **7.** Prima funcție: nu este bijectivă. A doua funcție: nu este bijectivă. **8.** a) Ramura $2n$ acoperă numerele naturale pare cu unicitate, iar $-2n - 1$ acoperă cu unicitate numerele impare; bijectivă; b) Analog, bijectivă. **9.** $f_1(x) = 3x + 1$ și $f_2(x) = -3x + 4$. **10.** $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **11.** Orice funcție strict crescătoare este injectivă. O funcție injectivă definită pe o mulțime finită către ea însăși este și surjectivă, deci bijectivă. **12.** a), b) Se demonstrează folosind definiția. **Pg. 99-100. 1.** Este inversabilă. **2.** $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. **3.** $f^{-1}(5) = 3$. **4.** $f^{-1}(3) = 1$. **5.** Este inversabilă; $f^{-1}(n) = f(n)$. **6.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. **7.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$. **8.** $m = -1$. **9.** Domeniul maxim este $[1, \infty)$, iar pentru ca funcția să fie inversabilă, codomeniul trebuie restrâns la $[0, \infty)$. **10.** $f_1(x) = 3x + 1$ și $f_2(x) = -3x + 4$. **11.** Se verifică relația identității prin compunere directă (ex: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$). **12.** $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.



13. Este inversabilă. **14.** a) $(f \circ g)(x) = x$ și $(g \circ f)(x) = x$. Sunt inversabile și reprezintă inverse una pentru cealaltă; b) $(f \circ f)(n) = n$. Funcția e inversabilă și inversa ei este ea însăși. **15.** a) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$; b) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$; c) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}, x \leq -1$ și $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}, x > -1$; d) $f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x}, x < 1$ și $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}, x \geq 1$; e) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; f) $f^{-1}(x) = x+1, x < 2$ și $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-2}, x \geq 2$; g) $f^{-1}(x) = -(x+2)^2 - 4, x < -2$ și $f^{-1}(x) = (x+2)^2 - 4, x \geq -2$. **16.** Se rezolvă prin reprezentare grafică fixată simetric față de prima bisectoare $y = x$. **17.** Niciuna nu este inversabilă: a) funcție pătratică, neinjectivă pe $\mathbb{R}$; b) funcție injectivă, dar $Im(f) = (0, \infty) \neq \mathbb{R}$, deci nu e surjectivă pe codomeniul; c) imaginile ramurilor se suprapun între $(0, 1]$, deci nu este injectivă; d) $f(1) = f(\frac{1}{n})$. **18.** b) Folosește a). **19.** $f^{-1}(a, b) = (\frac{a+b}{3}, \frac{2a-b}{3})$. **21.** $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **22.** Da, orice funcție strict crescătoare pe o mulțime finită este bijectivă, implicit inversabilă. **23.** Intersecția are loc doar pe prima bisectoare. **24.** a) Funcția de grad 1 este bijectie, deci PIN-urile sunt generate biunivoc; b) $f^{-1}(y) = \frac{y+24}{3}$; c) $PIN = f^{-1}(1206) = \frac{1206+24}{3} = 410$. **Pg. 108.** **1.** a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Nu; **2.** a) $S = \{-2, 3\}$; b) $S = \{-\frac{2}{5}, 1\}$; c) $S = \{2, \sqrt{2}\}$; d) $S = \{\frac{1}{2}\}$; e) $S = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$; f) $S = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$; g) $S = \{\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$. **3.** a) $x^2 + 3x - 4 = 0$; b) $x^2 - 25 = 0$; c) $x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0$; d) $x^2 - 3x - 2 = 0$; e) $3x^2 - 10x + 3 = 0$. **4.** a) $-x^2 - 5x - 6 = 0$; b) $x^2 - 2x - 6 = 0$. **5.** a) Ecuația nu are soluții reale ($\Delta < 0$); b) Ecuația are o singură soluție reală dublă ($\Delta = 0$); c) Ecuația are două soluții reale și distincte ($\Delta > 0$). **6.** a) Pentru $m = 2$: $S = \{-1\}$ (soluție dublă); b) $m = 2 - \sqrt{2}$; cealaltă soluție este $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) Nu, deoarece înlocuind $x = 0$ obținem $1 = 0$, ceea ce este imposibil; d) $\Delta = (m-2)^2 \geq 0$. Pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ecuația are soluțiile reale: $x_1 = -1$ și $x_2 = \frac{1}{1-m}$ (acestea depind de m , cu excepția soluției constante -1); e) Verificare prin calcul direct: $S = -1 + \frac{1}{1-m} = \frac{m}{1-m}$ și $P = -1 \cdot \frac{1}{1-m} = \frac{1}{m-1}$ (adevărat); f) $m \in \{0, 2\}$. **7.** a) $p^2 - 4q = 0$ și $p = -2\alpha, q = \alpha^2$; b) $p = 0$ și $q = -\alpha^2 \leq 0$; c) $q = 1$ și $p = -(\alpha + \frac{1}{\alpha})$, cu $|p| \geq 2$. **8.** Pentru soluția $\sqrt{3}$: $x^2 - 3 = 0$. Pentru soluția $\sqrt{2} - 1$: $x^2 + 2x - 1 = 0$. **Pg. 125-126.** **1.** a) $f(x) = (x+1)^2 + 2$; b) $f(x) = 2(x+1)^2 - 1$; c) $f(x) = -2(x-1)^2 + 7$; d) $f(x) = x^2 - 4$; e) $f(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$. **2.** a) $Imf = (-\infty, \frac{7}{3}]$; b) $Imf = [0, +\infty)$; c) $Imf = [\frac{3}{4}, +\infty)$; d) $Imf = [-3, +\infty)$; e) $Imf = [0, +\infty)$; f) $Imf = (-\infty, \frac{21}{4}]$; g) $Imf = (-\infty, 1]$. **3.** **1:** a) $x = -1$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) $x = 0$; e) $x = -\frac{5}{2}$. **2:** a) $x = \frac{2}{3}$; b) $x = -1$; c) $x = -\frac{1}{2}$; d) $x = 0$; e) $x = 0$; f) $x = \frac{3}{2}$; g) $x = 0$. **4.** Justificare $f(-4) = f(0)$ Deoarece abscisa vârfului este $x_v = -2$, punctele $x = -4$ și $x = 0$ sunt simetrice față de axa de simetrie, fiind situate la o distanță egală de $\alpha = 2$ față de aceasta. Din proprietatea de simetrie a parabolei rezultă direct egalitatea valorilor funcției. **5. Funcțiile de la exercițiul 1:** a) $f \searrow$ pe $(-\infty, -1]$; $f \nearrow$ pe $[-1, +\infty)$; Punct de minim; b) $f \searrow$ pe $(-\infty, -1]$; $f \nearrow$ pe $[-1, +\infty)$; Punct de minim; c) $f \nearrow$ pe $(-\infty, 1]$; $f \searrow$ pe $[1, +\infty)$; Punct de maxim; d) $f \searrow$ pe $(-\infty, 0]$; $f \nearrow$ pe $[0, +\infty)$; Punct de minim; e) $f \searrow$ pe $(-\infty, -\frac{5}{2}]$; $f \nearrow$ pe $[-\frac{5}{2}, +\infty)$; Punct de minim. **Funcțiile de la exercițiul 2:** a) $f \nearrow$ pe $(-\infty, \frac{2}{3}]$; $f \searrow$ pe $[\frac{2}{3}, +\infty)$; Punct de maxim; b) $f \searrow$ pe $(-\infty, -1]$; $f \nearrow$ pe $[-1, +\infty)$; Punct de minim; c) $f \searrow$ pe $(-\infty, -\frac{1}{2}]$; $f \nearrow$ pe $[-\frac{1}{2}, +\infty)$; Punct de minim; d) $f \searrow$ pe $(-\infty, 0]$; $f \nearrow$ pe $[0, +\infty)$; Punct de minim; e) $f \searrow$ pe $(-\infty, 0]$; $f \nearrow$ pe $[0, +\infty)$; Punct de minim; f) $f \nearrow$ pe $(-\infty, \frac{3}{2}]$; $f \searrow$ pe $[\frac{3}{2}, +\infty)$; Punct de maxim; g) $f \nearrow$ pe $(-\infty, 0]$; $f \searrow$ pe $[0, +\infty)$; Punct de maxim. **6.** Pe intervalul $(-\infty, 1]$: strict descrescătoare. Pe intervalul $(3, 7)$: strict crescătoare. Pe intervalul $[-1, 5]$: nu este monotonă. **7.** Parametrul m pentru f strict crescătoare pe $(2, \infty)$; a) $m \in [-9, +\infty)$; b) $m \in (0, \frac{1}{5}]$. **8.** a) Nu există soluții reale ($m \in \emptyset$); b) $m \in (-\infty, -1) \cup \{-1\}$ (sau compact scris: $m \in (-\infty, -1]$). **9.** a) Ambele ramuri sunt strict crescătoare pe intervalele lor, iar în punctul de legătură avem $f(0) = 3$ pe ambele ramuri, asigurând continuitatea crescătoare a funcției pe $\mathbb{R}$; b) Pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcția are vârful în $x_v = 1$, fiind strict crescătoare pe această ramură. Pe intervalul $[0, +\infty)$ funcția liniară are panta $a = 1 > 0$, fiind de asemenea strict crescătoare. Intersecția imaginilor restricțiilor pe ramuri este vidă, deci funcția este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. **10.** a) Pe intervalul $x < 0$, parabola are panta descrescătoare spre vârful aflat la $x_v = 1$. Pe intervalul $x \geq 0$, funcția liniară $a = -3 < 0$. Cum restricțiile pe ramuri au intersecția vidă, funcția este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$; b) Pe intervalul $x < 0$, parabola are panta descrescătoare spre vârful aflat la $x_v = 1$. Pe intervalul $x \geq 0$, a doua parabolă descrește de la vârful său aflat în $x_v = 1$. Intersecția imaginilor restricțiilor pe ramuri este vidă, monotonia strict descrescătoare se păstrează pe $\mathbb{R}$. **11.** a) Deoarece abscisa vârfului este $x_v = -\frac{3}{2}$, acest punct aparține intervalului $[-5, 5]$. Pe acest interval, funcția descrește pe $[-5, -\frac{3}{2}]$ și crește pe $[-\frac{3}{2}, 5]$, deci nu este monotonă; b) Deoarece abscisa $x_v = -1 \in [-2, 2]$, parabola își schimbă sensul variației în interiorul intervalului dat, nefiind monotonă. **12.** Fie x și y laturile dreptunghiului. Perimetrul fiind constant, avem $2x + 2y = 2p \Rightarrow y = p - x$. Aria este o funcție de gradul al doilea: $A(x) = x(p - x) = -x^2 + px$. Coeficientul dominant

fiind negativ, funcția admite un maxim global în vârful parabolei: $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{p}{2}$. Astfel, $x = \frac{p}{2}$ și $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$, ceea ce înseamnă că laturile sunt egale ($x = y$), iar dreptunghiul este pătrat. **14.** a) $V(-2, 1)$; b) $V(2, -2)$; c) $V(2, -2)$; d) $V(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$; e) $V(0, 5)$. **15.** $m \in \{-1, -\frac{1}{5}\}$. **16.** $m = \frac{1}{4}$. **17.** $m \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$. **18.** $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x - 1$. **19.** a) $Imf = [11, +\infty)$; b) $Imf = (3, +\infty)$; c) $Imf = [3, 35]$; d) $Imf = [3, +\infty)$; e) $Imf = [3, +\infty)$. **20.** a) $m \in [-\frac{1}{5}, +\infty)$; b) $m \in [0, \frac{2}{3}]$. **21.** a) $(m \in \emptyset)$; b) $m \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{8}, +\infty)$. **22.** a) $m \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (2, +\infty)$; b) $m \in (0, \frac{1}{8})$. **23.** $m \in [1, 2]$. **24.** $m \in (-\infty, -1]$. **25.** $m \in \emptyset$. **26.** a) $x_v = -\frac{2m+1}{2(m+1)}$ și $y_v = \frac{3m+7}{4(m+1)}$. Înlocuind direct în ecuația dreptei, obținem identitatea. **27.** a) Coordonatele vârfului sunt $x_v = -\frac{m+1}{m}$ și $y_v = \frac{1}{m}$. Înlocuind în ecuația dreptei $y = x + 1$, obținem $\frac{1}{m} = -\frac{m+1}{m} + 1 = -\frac{1}{m}$, ceea ce confirmă apartenența invariantă la dreaptă; b) Parabolele cu vârful în sus au $m < 0$, caz în care $x_v \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \rightarrow$ porțiunea de dreaptă este formată din semidreptele deschise corespunzătoare acestor intervale de abscise; c) Punctul comun fix al familiei este $P(-1, 1)$. **28.** a) Coordonatele vârfului sunt $x_v = \frac{2m+1}{2m}$ și $y_v = -\frac{1}{4m}$. Acestea descriu dreapta de ecuație $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; b) Parabolele cu vârful în jos au $m > 0$, caz în care $x_v \in (1, +\infty)$. Porțiunea este semidreapta deschisă aflată la dreapta punctului de abscisă $x = 1$; c) Punctul comun fix al familiei este $P(1, 0)$. **29.** Coordonatele vârfului sunt $x_v = \frac{m-1}{2}$ și $y_v = -\frac{5m^2-2m-15}{4}$. Eliminând parametrul m prin relația $m = 2x_v + 1$, obținem ecuația locului geometric descris de vârful: $y = -5x^2 - 4x + 3$, care reprezintă ecuația unei parabole. **30.** a) $Imf = (-\infty, -1]$; b) $Imf = [-1, 3]$; c) $Imf = [-5, 3]$; d) $Imf = [2, +\infty)$; e) $Imf = [2, +\infty)$. **31.** a) $Imf = (-\infty, 19]$; b) $Imf = [-1, 6]$; c) $Imf = [-5, 1) \cup [2, 6]$; d) $Imf = [2, 19]$; e) $Imf = (-\infty, 19]$. **Pg. 131-132.** **1.** a) $m = -2$; b) $m \in \{1, 2\}$; c) $m = 1$; d) $m \in \{-1, 2\}$. **2.** $f(x) = x^2 + 3x - 4$; $f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$. **3.** a) Vârf: $V(0, 0)$, punct de minim. Intersecții: $Ox \cap Oy = \{(0, 0)\}$. Imagine: $Imf = [0, +\infty)$. Monotonie: $f \searrow$ pe $(-\infty, 0]$, $f \nearrow$ pe $[0, +\infty)$; b) Vârf: $V(0, 0)$, punct de maxim. Intersecții: $Ox \cap Oy = \{(0, 0)\}$. Imagine: $Imf = (-\infty, 0]$. Monotonie: $f \nearrow$ pe $(-\infty, 0]$, $f \searrow$ pe $[0, +\infty)$; c) Vârf: $V(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, punct de maxim. Intersecții: $Oy: (0, 0)$; $Ox: (0, 0), (3, 0)$. Imagine: $Imf = (-\infty, \frac{9}{4}]$. Monotonie: $f \nearrow$ pe $(-\infty, \frac{3}{2}]$, $f \searrow$ pe $[\frac{3}{2}, +\infty)$; d) Vârf: $V(0, -8)$, punct de minim. Intersecții: $Oy: (0, -8)$; $Ox: (-2, 0), (2, 0)$. Imagine: $Imf = [-8, +\infty)$. Monotonie: $f \searrow$ pe $(-\infty, 0]$, $f \nearrow$ pe $[0, +\infty)$; e) Vârf: $V(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$, punct de minim. Intersecții: $Oy: (0, -1)$; $Ox: (-\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 0)$. Imagine: $Imf = [-\frac{5}{4}, +\infty)$. Monotonie: $f \searrow$ pe $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, $f \nearrow$ pe $[-\frac{1}{2}, +\infty)$; f) Vârf: $V(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, punct de minim. Intersecții: $Oy: (0, 1)$; $Ox: \emptyset$. Imagine: $Imf = [\frac{3}{4}, +\infty)$. Monotonie: $f \searrow$ pe $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, $f \nearrow$ pe $[-\frac{1}{2}, +\infty)$; g) Vârf: $V(5, 0)$, punct de minim. Intersecții: $Oy: (0, 25)$; $Ox: (5, 0)$ (tangentă). Imagine: $Imf = [0, +\infty)$. Monotonie: $f \searrow$ pe $(-\infty, 5]$, $f \nearrow$ pe $[5, +\infty)$; h) Vârf: $V(-\frac{1}{3}, 0)$, punct de minim. Intersecții: $Oy: (0, 1)$; $Ox: (-\frac{1}{3}, 0)$ (tangentă). Imagine: $Imf = [0, +\infty)$. Monotonie: $f \searrow$ pe $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $f \nearrow$ pe $[-\frac{1}{3}, +\infty)$. **4.** i) a) Graficul obținut este simetricul graficului funcției f față de O ; b) Graficul se mută pe verticală în sus cu 4 unități; c) Graficul se mută pe verticală în jos cu 1 unitate; d) Graficul se mută pe orizontală spre dreapta cu 2 unități; e) Graficul se mută pe orizontală spre stânga cu 1 unitate; ii) Graficul funcției g se reprezintă prin simetrie axială față de axa Ox a întregului grafic al lui f . iii) f, g, h arată legătura dintre legea algebrică și poziția în plan: adunarea unei constante modifică ordonata vârfului (translație verticală), iar înmulțirea cu -1 schimbă orientarea concavității; iv) Pentru funcția $p(x) = |f(x)|$, porțiunea de sub axa Ox (unde $f(x) < 0$) este reflectată simetric deasupra axei Ox , obținându-se o funcție cu valori exclusiv pozitive, strict pozitivă pe intervalele de la f și nulă în rădăcinile acestuia. **5.** a) Da; b) Cele trei puncte determină o parabolă unică dacă și numai dacă nu sunt coliniare și abscisele lor sunt distincte. Condiția pentru a nu fi coliniare este $m - 2n + p \neq 0$. Proprietatea pentru a nu determina nicio parabolă: punctele sunt coliniare (situate pe aceeași dreaptă, adică $m - 2n + p = 0$). **6.** a) 25 metri față de nivelul mării; b) Înălțimea maximă atinsă: 45 metri, realizată după 2 secunde de la lansare; c) Interval de urcare (monotonie strict crescătoare): $t \in [0, 2]$ secunde. Interval de cădere (monotonie strict descrescătoare): $t \in [2, 5]$ secunde; d) Racheta cade în mare după 5 secunde, reprezintă rădăcina strict pozitivă a ecuației $h(t) = 0$ (punctul de intersecție cu axa orizontală); e) $h(t) = -4t^2 + 16t + 24$. **Pg. 136-137.** **1.** a) $x \in (-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$; b) $x \in [-2, 2]$; c) $x \in [0, \frac{12}{5}]$; d) $x \in \emptyset$. **2.** a) $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}]$; b) $x \in (\frac{4 + \sqrt{26}}{2}, +\infty)$. **3.** Mulțimea soluțiilor este $x \in (2 - \sqrt{39}, 2 + \sqrt{39})$. Numărul de valori întregi este 13 (valorile sunt $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$). **4.** a) Deoarece $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ și coeficientul dominant $a = 1 > 0$, expresia păstrează semnul pozitiv pe tot domeniul real, deci $E(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; b) Da, expresia admite o valoare minimă egală cu 1, atinsă în punctul de minim $x = -2$.



5. $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. 6. a) $x \in [\frac{2}{3}, 1]$; b) $x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in (-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$; e) $x \in [0, 3]$; f) $x \in \emptyset$. 7. a) $x \in (-2, 0) \cup [\frac{2}{3}, 1]$; b) $x \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup [2, +\infty)$; c) $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-2, 4)$; d) $x \in [1, \frac{4}{3}]$; e) $x \in (\frac{5-\sqrt{57}}{4}, \frac{5+\sqrt{57}}{4})$; f) $x \in (-7, \frac{13}{11}) \cup (2, +\infty)$; g) $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 0] \cup [\frac{4}{5}, +\infty)$. 8. $t \in (0, 7)$ secunde.
9. $x \in (2, 8)$. 10. $m \in (-\infty, -3]$. 11. $a \in \emptyset$. 12. $a \in (-\infty, -1) \cup (\frac{11-4\sqrt{6}}{2}, \frac{11+4\sqrt{6}}{2})$. 13. a) $m \in (\frac{-5-2\sqrt{2}}{7}, \frac{-5+2\sqrt{2}}{7}) \setminus \{-\frac{1}{2}\}$; b) $m \in (4-2\sqrt{6}, 4+2\sqrt{6}) \setminus \{1\}$. 14. a) $m \in (\frac{1}{9}, 1)$; b) $m \in (-\infty, \frac{-11-4\sqrt{6}}{5}) \cup (\frac{-11+4\sqrt{6}}{5}, +\infty)$. 15. a) $m \in (-\infty, -\frac{4}{5})$; b) $m \in (-\infty, -\frac{8}{5})$. 16. a) $m \in (\frac{8}{9}, +\infty)$; b) $m \in (\frac{4}{3}, +\infty)$. 17. a) $m \in [1, 2]$; b) $m \in (-\infty, \frac{-2-2\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{-2+2\sqrt{6}}{3}, +\infty)$. 18. $m \in (-\infty, -\frac{9}{5}]$. 19. a) $m \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, 1)$ (Condiționat de existența rădăcinilor reale: $m \in (-1, -1,25] \cup [0,25, 1)$); b) $m \in [-\frac{5}{2}, -1] \cup [0, +\infty)$ (Condiționat de rădăcini reale: $m \in [-\frac{5}{2}, -1,25] \cup [0,25, +\infty)$).
20. a) $a \in [-1, \frac{-3-\sqrt{17}}{4}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{4}, 1]$ (Condiționat: $a \in [-1, \frac{-3-\sqrt{17}}{4}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{4}, \frac{-1-\sqrt{2}}{7}] \cup [\frac{-1+\sqrt{2}}{7}, 1]$); b) $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$ (Condiționat de existența rădăcinilor reale: $a \in [-\frac{1+\sqrt{2}}{7}, 0)$). **Pg. 145-146.** 1. a) Primul sistem: $S = \{(1, 3), (3, 7)\}$, al doilea sistem: $S = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})\}$, al treilea sistem: $S = \emptyset$, al patrulea sistem: $S = \{(1, 1)\}$; b) Dacă $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, sistemul are două soluții reale distincte. Dacă $m \in \{-1, 1\}$, sistemul are o singură soluție reală dublă (dreapta este tangentă). Dacă $m \in (-1, 1)$, sistemul nu are soluții reale (dreapta este exterioară). 2. a) Primul sistem: $S = \{(1, 1), (2, 2)\}$, al doilea sistem: $S = \{(-1, \frac{1}{2})\}$, al treilea sistem: $S = \{(-1, 2)\}$. 3. a) Sistemul 1: două soluții distincte pentru $m \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$; o soluție pentru $m \in \{-7, 1\}$; zero soluții pentru $m \in (-7, 1)$. Sistemul 2: două soluții distincte pentru $n > -2$; o soluție pentru $n = -2$; zero soluții pentru $n < -2$. Sistemul 3: două soluții distincte pentru $a \in (-\infty, 2) \setminus \{0\}$; o soluție pentru $a = 2$; zero soluții pentru $a \in (2, +\infty)$. Pentru $a = 0$, sistemul devine de gradul I și are o singură soluție. Sistemul 4: două soluții distincte pentru $b \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$; o soluție pentru $b \in \{-5, -1\}$; zero soluții pentru $b \in (-5, -1)$. Sistemul 5: două soluții distincte pentru $c < 3$; o soluție pentru $c = 3$; zero soluții pentru $c > 3$. 4. a) Parabola convexă intersectată de o dreaptă oblică în două puncte distincte: $S = \{(1, -3), (3, 1)\}$; b) Parabola convexă intersectată de o dreaptă oblică în două puncte distincte: $S = \{(-7, 36), (5, -4)\}$; c) Parabola convexă tangentă la o dreaptă orizontală: $S = \{(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3})\}$; d) Parabola convexă intersectată de o dreaptă verticală într-un singur punct: $S = \{(-4, 12)\}$. 5. a) $S = \emptyset$; b) $S = \{(1, 3), (3, 1)\}$; c) $S = \{(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}), (\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})\}$; d) $S = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(2, -2), (-2, 2)\}$.
6. Dacă $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, sistemul are două soluții reale distincte (reprezentate prin două perechi simetrice). Dacă $\alpha \in \{0, 4\}$, sistemul are o singură soluție reală (o singură pereche ordonată, unde $x = y$). Dacă $\alpha \in (0, 4)$, sistemul nu are soluții reale. 7. a) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} xy(x+y)=-30 \\ x^2y+xy^2=-30 \end{cases}$; c) $\begin{cases} xy(x+y)=-30 \\ x^2y+xy^2=-30 \end{cases}$. 8. a) $S = \{(1, -2), (2, 0)\}$; b) $S = \{(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}), (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})\}$; c) $S = \{(4, -2)\}$. 9. Pentru $m = 0$: o singură soluție reală (originea $V(0, 0)$, dreaptă orizontală tangentă la vârf). Pentru $m = 1$: două soluții reale distincte (dreaptă oblică secantă, intersecție în $(0, 0)$ și $(1, 1)$). Pentru $m = -2$: două soluții reale distincte (dreaptă oblică secantă, intersecție în $(0, 0)$ și $(-2, 4)$). 10. $S = \{(2, 3), (0, -1)\}$. Dreapta este secantă față de parabolă. 11. Dacă $m > -1$: două soluții reale distincte (dreapta orizontală este situată deasupra vârfului, fiind secantă). Dacă $m = -1$: o singură soluție reală dublă (dreapta este tangentă la vârful parabolei $V(2, -1)$). Dacă $m < -1$: zero soluții reale (dreapta este exterioară, situată sub vârful parabolei). 12. Mulțimea soluțiilor este $S = \{(0, 0), (2, 5, 2, 5)\}$. Toate soluțiile reale obținute au proprietatea $x = y$, punctele de intersecție se situează pe prima bisectoare. 13. a) Condiția se scrie sub forma inecuației: $-x^2 + 6x - 8 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 6x - \frac{17}{2} \geq 0$. Din punct de vedere geometric, reprezintă determinarea absciselor pentru care punctele parabolei se află deasupra sau la nivelul dreptei orizontale $y = \frac{1}{2}$; b) Intervalul de prețuri acceptabile: $x \in [\frac{6-\sqrt{2}}{2}, \frac{6+\sqrt{2}}{2}]$ mii lei (aproximativ între 2,29 și 3,71 mii lei). 14. a) Dreapta este secantă (intersectează parabola în două puncte distincte: $x = -5$ și $x = -2$); b) Dreapta este exterioară; c) Dreapta este tangentă (intersectează parabola într-un singur punct dublu, în $x = -2$); d) Dreapta este secantă (intersectează parabola în două puncte distincte: $x = -4$ și $x = -4$ curbă tangentă/secantă degenerată în $x = -4$, soluție dublă). 15. a) Se intersectează în

două puncte distincte; b) Se intersectează în două puncte distincte; c) Se intersectează într-un singur punct; d) Nu se intersectează. **16.** a) Două puncte distincte: $m \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$; b) Un singur punct: $m = 8$ (pentru $m = 0$ ecuația devine de gradul I, reprezentând o singură intersecție între două drepte); c) Niciun punct: $m \in (0, 8)$. **17.** $m \in (-\infty, -\frac{5}{4}) \cup (0, +\infty) \setminus \{3\}$. **Pg. 149. Test de evaluare. I. 1.** Intersecția cu axa Ox : $A(1, 0)$ și $B(3, 0)$. Intersecția cu axa Oy : $C(0, 3)$. **2.** Vârful parabolei este $V(2, -1)$. Axa de simetrie are ecuația $x = 2$. **3.** Soluția $x \in [1, 3]$. **II. 1.** Parabolă cu ramurile în jos, având vârful în $V(1, 4)$ și intersecțiile cu axele în punctele $(-1, 0)$, $(3, 0)$ și $(0, 3)$. **2.** Funcția este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$. Imaginea funcției este $\text{Im}g = (-\infty, 4]$. **III. 1.** a) Demonstrație pe baza perimetrului disponibil: lățime x , lungime $40 - 2x \Rightarrow A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$. **2.** b) Dimensiunile optime: lățimea este 10 m, lungimea este 20 m. Aria maximă obținută este de 200 m². **3.** Valorile parametrului sunt $m \in (-6, 6)$. **Pg. 163-165. 1.** a) 76/9; b) 14; c) 1024; d) $\frac{49\sqrt{6}}{120}$. **2.** Pentru $x = y$, $P = 2x \cdot 2x^2 \cdot 2x^4 \cdot 2x^8 = 16 \cdot x^{15}$. Pentru $x \neq y$, se înmulțește produsul cu $(x - y)$ și se identifică succesiv formula de descompunere a diferenței de pătrate. **3.** a) $16^2 < 4^7$; b) $81^{-4} < 9^{-7}$; c) $(-\sqrt{5})^{-3} > (-\sqrt{5})^3$; d) Dacă $n > 0$, atunci $(\frac{1}{x^2+1})^n > 1$ pentru $x \neq 0$. Dacă $n < 0$, atunci $(\frac{1}{x^2+1})^n < 1$, pentru $x \neq 0$. Și $(\frac{1}{x^2+1})^n = 1$ dacă $n = 0$, indiferent de x , sau dacă $x = 0$, indiferent de n . **4.** a) $2 \cdot 10^{-5}$; b) $3 \cdot 10^{-8}$; c) $101 \cdot 10^{-4}$; d) $4 \cdot 10^{-5}$; e) $4 \cdot 10^{-4}$; f) $8 \cdot 10^{-3}$. **5.** a) $(1 - 2p)^{10} \geq 0, \forall p \in \mathbb{R}$, anulându-se pentru $p = \frac{1}{2}$; b) are semnul lui $2p + 3$; c) Numărul este pozitiv pentru $p \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, este 0 pentru $p \in \{1, 2\}$ și este negativ pentru $p \in (1, 2)$; d) Este negativ pentru $p < -1$, este 0 pentru $-1 \leq p < 0$ și este pozitiv pentru $p \geq 0$. **6.** Funcții putere: 4 și 5. **7.** a) 385; b) $[\frac{1}{9}, 4]$; c) Se folosește *inegalitatea mediilor*; d) $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1) \cdot k} = 1 + \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$; e) $A = [\frac{1}{625}, 16]$; f) $g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. **8.** $B = [0, 256]$. **9.** Translații: a) în sus cu o unitate; b) în jos cu 2 unități; c) la dreapta cu o unitate; d) în stânga cu 2 unități și în sus cu o unitate. **10.** Funcția este strict descrescătoare, deci injectivă. **11.** a) $f_k \circ f_k(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$, deci toate sunt inversabile, fiecare egală cu propria inversă; b) se compun, pe rând, două câte două; c) compunerea este f_1 , indiferent de ordine; d) $(-\infty, 0) \cup \{1\}$. **12.** $\frac{16}{81}$. **13.** a) $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$; b) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2(x^2 + x + 1)}$; c) $\frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^4}$. **14.** $f(-2) = 4 > \frac{1}{2} = f(2)$, dar $f(0) < f(\frac{1}{2})$, deci nu este descrescătoare; b) nu e injectivă, nu e surjectivă, nu e bijectivă; c) $x \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\}$; d) $(-1, 1) \cup (1, \infty)$; e) $x = 1$ sau $x = -\sqrt{m}, m \in \mathbb{N}$. **15.** Folosind inegalitatea $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2 = 1$, aplicând-o pentru a^4 și b^4 se obține $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq (\frac{a^2 + b^2}{2})^2 \geq 1$, de unde rezultă concluzia. **16.** Din ipoteză rezultă că două dintre numerele a, b, c sunt opuse, de unde rezultă concluzia. **17.** a) $n = 4$; b) $n = 5$; c) $n = 6$. **18.** a) $x \in \{-1, 0, 1\}$; b) $P = \frac{\sqrt{17} + \sqrt{65}}{8} + \sqrt{2}$; c) Reprezentarea este simetrică față de origine. Aria triunghiului OBC este $3/16$, deci $S > 2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$, căci funcția g este convexă. Pe de altă parte, S este mai mică decât dublul ariei triunghiului ODC , unde $D(1, 0)$, unde $\text{aria}(ODC)$ este $\frac{1}{2}$. Rezultă, de aici, concluzia. **19.** $M = \{1, 2, 3, \dots, 2^{100}\}$, $S_M = \frac{2^{100}(2^{100} + 1)}{2} = 2^{99}(2^{100} + 1)$, $N = \{2, 2^2, \dots, 2^{100}\}$, $S_N = 2(2^{100} - 1)$, $P = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^{100}}\}$, $S_P = 1 - \frac{1}{2^{100}}$. Numerele $\frac{S_M}{2^{99}} = 2^{100} + 1$, $\frac{S_N}{2} + 1 = 2^{100}$, $2^{100} \cdot S_P = 2^{100} - 1$ sunt în PA. **20.** $5^{-13} = \frac{2^{13}}{10^{13}} = \frac{8192}{10^{13}}$, deci ultimele 3 zecimale nenule sunt 192; $2^{-30} = \frac{5^{30}}{10^{30}}$, deci ultimele 3 zecimale nenule sunt ultimele 3 cifre ale lui 5^{30} . Cum ultimele 3 cifre ale lui $5^{2k}, k \geq 2$ sunt 625, răspunsul este 625. **21.** a) $n = 2$; b) $n = 3$; c) $a(x) \geq 2$ din *inegalitatea mediilor*, $f_4(x) + f_4(\frac{1}{x}) = x^4 + \frac{1}{x^4} = a(x)^2 - 2$, $f_6(x) + f_6(\frac{1}{x}) = x^6 + \frac{1}{x^6} = a(x)^3 - 3a(x)$, $f_1(x) + f_1(\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{a(x) + 2}$. **22.** $N = 3 \in \mathbb{N}$. **23.** Presupunem că $\exists m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^m = a + (a + 1) + \dots + (a + k - 1)$, $a, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Rezultă $2^m = \frac{k(2a + k - 1)}{2}$. Pentru k impar egalitatea este imposibilă, căci 2^m nu are divizori impari mai mari ca 1. Pentru k par, numărul $2a + k - 1$ este impar, deci, fiind divizor impar al lui 2^m , ar trebui să fie egal cu 1, deci $2a + k = 2$, de unde $k = 2$ și $a = 0$, adică suma de numere naturale consecutive devine $0 + 1 = 1 = 2^0$, ceea ce contrazice ipoteza $m \neq 0$. **24.** Se demonstrează că $\frac{2x^2 + x + 2}{3x^4 - x + 4} \in (0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$. **25.** $a_{2m} = m, \forall m \in \mathbb{N}^*, a_{2m-1} = a_{2m} - 2m = -m, \forall m \in \mathbb{N}^*$. $\frac{a_{2p}}{a_{2p+1}} = \frac{p}{-(p+1)} \mathbb{Z}$, iar $\frac{a_{2p-1}}{a_{2p}} = \frac{-p}{p} = -1 \in \mathbb{Z}$. **26.** Dacă unul dintre exponenți este pozitiv, egalitatea este falsă, căci membrul stâng n-ar fi număr întreg, iar membrul drept este număr întreg. Deci, $m, n, p \leq 0$, de unde $-n \stackrel{\text{def}}{=} a \geq 0, -m \stackrel{\text{def}}{=} b \geq 0, -p \stackrel{\text{def}}{=} c \geq 0$. Egalitatea devine $2^a + 3^b + 5^c = 53$; $5^c < 53 \Rightarrow c \leq 2$, deci $c \in \{0, 1, 2\}$. Evaluând toate variantele se obține un singur triplet $(m, n, p) = (0, -3, -2)$.



27. $29^{2k} = (29^k)^2 + 0^2$; $29^{2k+1} = 29 \cdot 29^{2k} = (2^2 + 5^2) \cdot 29^{2k} = (2 \cdot 29^k)^2 + (5 \cdot 29^k)^2, \forall k \in \mathbb{N}$. 28. $15^{27} = (15^3)^9 = 3375^9 < 4225^9 = (65^2)^9 = 65^{18}$. 29. Pentru $x = 1, E_n(1) = 2 = \frac{1^n + 1}{1^{2n}}$. Pentru $x \neq 1, E_n(x) = \frac{x^{-4n} \cdot \frac{(x^n)^6 - 1}{x^n - 1}}{x^{-2n} \cdot \frac{(x^{2n})^3 - 1}{x^{2n} - 1}} = x^{-2n} \cdot (x^n + 1) = \frac{x^n + 1}{x^{2n}}$.
30. $f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) - t \cdot f(x_1) - (1-t) \cdot f(x_2) = \frac{-t(1-t)(x_1 - x_2)^2}{x_1 \cdot x_2 \cdot (t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2)}$ și se analizează cazurile $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, respectiv $x_1, x_2 \in (0, \infty)$. 31. a) $I_A(x) = \frac{k}{4x^2}, I_B(x) = \frac{k}{(30-x)^2}$; b) $x \in (0, 30)$; c) Dacă una dintre intensități este mai mică decât cealaltă, atunci valoarea minimă este dată de intensitatea mai slabă; d) $I_A(x) = I_B(x), x \in (0, 30)$, de unde $x = 10$ (m) – distanța față de biroul A. Pg. 178-180. 1. a) 1/3; b) 4; c) 4; d) $-\sqrt{2}$; e) $\frac{1}{|x|}$; f) 1/20. 2. a) 1/8; b) 36; c) ± 8 .
3. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $[1/3, \infty)$; c) $\mathbb{R}$; d) $(-1, 1/3] \cup (1, \infty)$. 4. a) 6; b) 1/2; c) $\sqrt{2}$; d) $-\sqrt[3]{32} = -2\sqrt[3]{4}$. 5. a) $60\sqrt[6]{2^{47}}$; b) $\sqrt[6]{3/20}$; c) $\sqrt[4]{y^3}, y \geq 0$; d) $\sqrt[12]{x^{19}}$. 6. a) $\sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{8} < \sqrt{5}$; b) $\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$. 7. a) $6\sqrt[3]{6}$; b) $2\sqrt{2}$; c) $\frac{x^2}{|y|}$; d) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$. 8. a) $\sqrt{28}$; b) $-\sqrt[5]{486}$; c) $-\sqrt[4]{2}$; d) $-\sqrt{3}$. 9. Conjugatele: $\sqrt[5]{16}, \sqrt[3]{25} - \sqrt{5} + 1, \sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt{3} + 1, \sqrt[3]{3} - 1, \sqrt[3]{4} - 2\sqrt{2} + 4, \sqrt[4]{7}$. Produsele: 2, 6, 2, 2, 10, 7. 10. Pentru $f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = \sqrt[3]{x+1}, h(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ domeniu și imagine: $\mathbb{R}$. Zerouri: $f: x = 0, g: x = -1, h: x = -1$; b) G_g și G_h sunt translații ale G_f la stânga cu o unitate pentru g și în sus cu o unitate pentru h . 11. a) $[0, \frac{3}{2}]$; b) $(-2, 1)$; c) $[2, \infty)$; d) $\emptyset$. 12. a) $m_a = 13/3, m_g = 3, m_h = 27/13$. b) $m_a = 15/2, m_g = 4\sqrt{2}, m_h = 64/15$; c) $m_a = \frac{38}{5\sqrt{3}}, m_g = \sqrt[5]{\frac{1}{9\sqrt{3}}}, m_h = \frac{180}{433\sqrt{3}}$. 13. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată. 14. $a > b$. 15. a) $2(3\sqrt{5} + \sqrt{2})$; b) $3\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)$; c) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} - 1)$; d) $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$; e) $2(\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{9} + 4)$; f) $\sqrt[3]{2} + 1$; g) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$; h) $\frac{2 - \sqrt[4]{8}}{2}$; i) $\frac{12}{5}(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)(\sqrt{2} + 1)$; j) $\frac{\sqrt{3 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{46}}{46}$; k) $-(\sqrt[6]{4^5} + \sqrt[6]{4^4 \cdot 343} + \sqrt[6]{4^3 \cdot 343^2} + \sqrt[6]{4^2 \cdot 343^3} + \sqrt[6]{4 \cdot 343^4} + \sqrt[6]{343^5})$. 16. a) $\mathbb{R}$; b) $\{1\}$; c) $[-3, 3] \setminus \{0\}$. 17. $m \in [-2, 1]$. 18. a) Presupunem că $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, prime între ele. Rezultă $2n^2 = 3m^2$, deci 2 divide $3m^2$, de unde rezultă că 2 divide m , deci $m = 2k, k \in \mathbb{N}^*$. Revenind la egalitate, se obține $2n^2 = 3 \cdot 4k^2$, de unde $n^2 = 3 \cdot 2k^2$, deci 2 divide n , ceea ce contrazice faptul că m și n sunt prime între ele; b) Separând radicalii se obține $\sqrt{2}(x - a) = \sqrt{3}(b - y)$. Presupunând $x - a \neq 0$, se obține $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{b - y}{x - a}$, egalitate falsă, căci numărul din membrul stâng este irațional, iar cel din membrul drept este rațional. Presupunerea a fost falsă, deci $x = a$ și, în consecință, $y = b$; c) $a = b = 1$. 19. a) $S_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; b) $S_2 = \sqrt[3]{n+1} - 1$; c) $S_3 = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$; d) $S_4 = \sqrt{n+1} - 1$. 20. a) Calcul direct. b) Pentru $a, b, c > 0$, membrul drept din egalitatea de la a) este cel puțin zero, deci $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Înlocuind $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}, c = \sqrt[3]{z}$ se obține media aritmetică mai mare sau egală cu media geometrică. Înlocuind apoi $a = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, b = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}, c = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ se obține media armonică mai mică sau egală cu media geometrică ($x, y, z > 0$); c) Egalitatea se obține doar dacă, în realitatea de la a), membrul drept este 0, ceea ce conduce la $a = b = c$, deci mediile sunt egale dacă și numai dacă numerele sunt egale; d) Media aritmetică este egală cu media geometrică, de unde $x = y = z = 1$. 21. $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{x+25}{2}}$. 22. $a = \frac{100}{27}$. 23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$, iar funcția de la numitor este strict crescătoare, deci f este strict descrescătoare. Cum $x \geq 1$, rezultă $f(x) \leq f(1) = \sqrt{2}$. 24. a) $D = \mathbb{R}$; b) Funcția dată este suma distanțelor de la un punct de pe axa $Ox, M(x, 0)$ la punctele fixe $A(1, 2)$, respectiv $B(2, 5)$; c) valoarea minimă este $5\sqrt{2}$, atinsă pentru $x = \frac{9}{7}$ (problema drumului minim: minimumul se atinge în punctul de intersecție cu Ox al dreptei AC , unde C este simetricul lui B față de Ox). 25. $x = \frac{5}{2}$. 26. a) Prima relație este echivalentă cu $\sum_{k=1}^4 (\sqrt[4]{|a_k|} + 1) = 16$, iar cu această scriere ambele relații devin simetrice în raport cu modulele celor 4 numere, iar alegerea semnelor nu contează; b) Media aritmetică și media geometrică a celor 4 paranteze este 4, deci parantezele sunt egale, așadar modulele celor 4 numere sunt egale cu 81. Seturile sunt $(\pm 81, \pm 81, \pm 81, \pm 81)$ cu orice alegere de semne, adică sunt 2^4 seturi. 27. Relația din ipoteză conduce la $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$, deci două dintre numere sunt opuse, de unde rezultă concluzia. 28. a) Inducție matematică; b) $\sqrt[n]{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt[n]{5} + 2}$. Presupunând că $\sqrt[n]{5} + 2 + \sqrt[n]{5} - 2$ este rațional, din a) rezultă că $(\sqrt[n]{5} + 2)^n + \frac{1}{(\sqrt[n]{5} + 2)^n} \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$, ceea ce este fals. 29. a) $N = \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b) $P = 4 \in \mathbb{Q}$. 30. a) $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este impară; b) $f(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f nu este

surjectivă; c) $|f(x)| = \left| \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} < \frac{|x|}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \sqrt[4]{\frac{x^4}{x^4+x^2+1}} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci $Im f(-1, 1)$. Reciproc, demonstrăm că $\forall y \in [0, 1), \exists x \in [0, \infty)$, astfel încât $f(x) = y$ (este suficient, căci f este impară). Efectuând calculele pentru $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = y$, se obține $x = \frac{y}{4} \sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}} \in [0, \infty)$. **31.** a) $(-\infty, \frac{4}{3}] \cup [3, \infty)$; b) $[3, \frac{7}{2}]$; c) $[34/15, \infty)$; d) $(-\infty, 2]$; e) $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [\frac{7+\sqrt{97}}{8}, \infty)$. **Pg. 184-185.** **1.** a), b) și c). **2.** a) 1 și b) 0. **3.** $(-\infty, -1] \cup [1, 2]$. **4.** a) membrul stâng este pozitiv, cel drept negativ; b) membrul stâng este negativ, cel drept pozitiv; c) o sumă de numere mai mari sau egale cu zero este zero, doar dacă ambii termeni sunt nuli simultan, ceea ce este imposibil; d) fiecare termen al sumei este mai mic sau egal cu suma, deci $\sqrt{x} \leq 1$, dar $x \geq 10$, ceea ce este imposibil. **5.** a) $\{-3\}$; b) $\{1\}$; c) $\emptyset$; d) $\{2\}$. **6.** a) nu; b) da; c) da. **7.** a) $\{-2, -1\}$; b) $\{1\}$; c) $\{2\}$; d) $x \geq 7$. Ecuația se reduce la $\sqrt{x^4-7} = x^2 - \sqrt{x^3-7}$. Prin ridicare la pătrat se obține $x^2(x-2\sqrt{x^3-7}) = 0$, cu singura soluție $x = 2$; e) $\emptyset$. Prin amplificare cu conjugata fiecărui membru se obține în stânga un număr negativ, iar în dreapta un număr pozitiv. **8.** a) $\sqrt{x^2+3x-6} \stackrel{\text{def}}{=} t \geq 0$. Ecuația devine $t^2 + 4t - 12 = 0$, cu singura soluție pozitivă $t = 2$, iar $\sqrt{x^2+3x-6} = 2$ are soluțiile $x = 2$ și $x = -5$; b) $\sqrt[3]{3x-4} \stackrel{\text{def}}{=} a, \sqrt{x+5} \stackrel{\text{def}}{=} b \geq 0, x \geq -5$. Cum $a - b = -1$, deci $b = a + 1 \geq 0$, rezultă $a \geq -1$. Prin eliminarea radicalilor se obține $a^3 - 3b^2 = -19$, iar din înlocuirea lui b se obține ecuația $a^3 - 3a^2 - 6a + 16 = 0$, cu soluții convenabile $a = 2$ și $a = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$, de unde $x \in \{4, \frac{11+3\sqrt{33}}{2}\}$; c) $\sqrt[3]{2x-5} \stackrel{\text{def}}{=} t$ și ecuația devine $t^3 + t^2 - t + 2 = 0$, cu unica soluție reală $t = -2$, de unde $x = -\frac{3}{2}$; d) $x = \pm 1$ nu verifică ecuația, deci se poate împărți prin $\sqrt[3]{x^2-1}$, apoi se notează $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = t$. Ecuația devine $t - \frac{3}{t} = 2$, cu soluții -1 și 3 , care conduc la $x \in \{0, -\frac{14}{13}\}$. **9.** a) $\{4\}$; b) $\emptyset$; c) $\{2\}$; d) $\{1\}$. **10.** a) $\{2\}$; b) $\{1\}$; c) $\{1\}$. **11.** a) $D_{ex} = \emptyset$; b) Un număr pozitiv (membrul stâng) nu poate fi mai mic decât unul negativ (membrul drept); c) contrazice *inegalitatea mediilor*. **12.** a) $[-\frac{5}{3}, \infty)$; b) $[1, \frac{3}{2}]$; c) $(1, \infty)$; d) $\{1, \frac{5}{4}\}$; e) $(\frac{1+\sqrt{29}}{2}, \infty)$; f) $[-\frac{4}{3}, 4]$; g) $[0, \infty)$; h) $(-\infty, -2) \cup [\frac{41}{2}, \infty)$. **13.** a) $D_{ex} = [0, 1] \cup [\sqrt{2}, \infty)$, $x \in \{\frac{\sqrt{2}}{3}\}$; b) $D_{ex} = (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$, $x \in [2, 6]$; c) $\{-5, 5\}$; d) $D_{ex} = [-11, \frac{1-3\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+3\sqrt{5}}{2}, 8]$, $x = 5$; e) $\emptyset$; f) $\{-\frac{9}{2}, 2\}$; g) $\{0, 2\}$; h) $\{-6, -\frac{11}{2}, -5\}$; i) $\{1\}$; j) $\{-1, -\frac{9}{13}\}$; k) $\{-3\}$. **14.** a) $[0, \infty)$; b) $(-\infty, -2) \cup [\frac{41}{2}, \infty)$; c) $(-\infty, 2\sqrt{5}-4)$; d) $\mathbb{R}$; e) $[1, 9]$; f) $(-\frac{1}{2}, \infty)$; g) $(-\infty, 0) \cup [1, \frac{3}{2}]$. **15.** a) $x \geq 1$. Ecuația devine $|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$. Cum $1 = |\sqrt{x-1}-2| + (3-\sqrt{x-1}) \leq |\sqrt{x-1}-2| - 2 + 3 - \sqrt{x-1} = 1$ (*Inegalitatea triunghiului*), rezultă că numerele $\sqrt{x-1}-2$ și $3-\sqrt{x-1}$ au același semn, de unde $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$, deci $x \in [5, 10]$; b) 2 și 3 nu sunt soluții ale ecuației, deci se poate împărți cu $\sqrt[3]{x^2-5x+6} = \sqrt[3]{(x-2)(x-3)}$. Ecuația se reduce la o ecuație de gradul al II-lea, $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, cu soluții 2 și $\frac{1}{2}$, unde $t = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}$; $x \in \{\frac{13}{7}, \frac{22}{7}\}$; c) $x \geq 3$. Se ridică la puterea a șasea: $(x+1)^2 = (x-3)^3$, adică $x^3 - 10x^2 + 25x - 28 = 0$, cu unica soluție reală $x = 7$; d) $x \geq 0, \sqrt{x} \neq 0, 1, 2, 3$, deci $x \in (0, \infty) \setminus \{1, 4, 9\}$. Notând $\sqrt{x} = t \geq 0$, după efectuarea calculelor se obține $(t^2-3t+2)(t^2-3t-4) = 0$, deci $t \in \{1, 2, 4\}$, de unde convine doar $t = 4$, deci $x = 16$; e) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Notând $\sqrt[3]{1-x} = a, \sqrt[3]{x+1} = b$, deducem $a^3 + b^3 = 2$ și $a + b \geq 2$. Se obține $ab = 1$, de unde $\sqrt[3]{1-x^2} = 1$, deci $x = 0$; f) Ordinele radicalilor sunt numere naturale mai mari sau egale cu 2, deci $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Egalitatea se verifică doar pentru $x = 4$; g) $D_{ex} = [-17, 17] \setminus \{0\}$. Amplificând cu conjugata număratorului și împărțind cu $x \neq 0$, se obține $(\sqrt{17+x} - \sqrt{17-x})^2 = 4$, cu soluțiile $x \in \{-8, 8\}$; h) $x \in [-15, 1]$. Notând $\sqrt[4]{1-x} = a \geq 0, \sqrt[4]{15+x} = b \geq 0$, se obține sistemul simetric $a + b = 2$ și $a^4 + b^4 = 16$, de unde $a = 2, b = 0$ sau $a = 0, b = 2$. Deci $x \in \{-15, 1\}$; i) $x \in (-\infty, 1] \cup [33, \infty)$. Notând $\sqrt[4]{x^2-34x+33} = t \geq 0$, ecuația devine $\sqrt[5]{t^4+31} - t = 1$, de unde $\sqrt[5]{t^4+31} = t + 1$. Ridicând la puterea a cincea, se obține ecuația $(t-1)(t^4+5t^3+15t^2+25t+30) = 0$, cu singura soluție pozitivă $t = 1$, de unde $x^2 - 34x + 32 = 0$ și $x \in \{17 \pm \sqrt{257}\}$. **16.** a) $x \in [8, \infty) \cup \{2, 3\}$; b) $x \geq 0$. Notând $\sqrt[4]{x} = t \geq 0$, se obține $\sqrt{x} = t^2$ și inecuația devine $t^2 - 9t + 18 \geq 0$, cu soluțiile $t \in ((-\infty, 3] \cup [6, \infty)) \cap [0, \infty) = [0, 3] \cup [6, \infty)$, iar $x \in [0, 81] \cup [1296, \infty)$; c) $x \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$. Notând $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} = t \geq 0$ și rezolvând inecuația t , se obține $t > 2$, de unde $x \in (2, 8)$; d) $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \setminus \{0\}$, iar prin amplificare cu conjugate număratorului și efectuarea calculelor, se



obține $9x - 1 < \sqrt{1 - 9x^2}$, cu soluțiile $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{5}\right)$. **17.** a) $m = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$; b) Notând $\sqrt{x+1} = t \geq 0$, $x \geq -1$, ecuația se transformă în $mt^2 - (2m+3)t + m+2 = 0$, care trebuie să aibă o singură soluție pozitivă, așadar fie admite o singură soluție și aceasta este pozitivă, fie admite 2 soluții, una pozitivă și una negativă. Se obține $m \in \left\{-\frac{9}{4}\right\} \cup (-2, 0)$; c) ecuația de gradul al II-lea în t trebuie să admită două soluții pozitive: $\Delta > 0$, $S \geq 0$, $P \geq 0$, de unde $m \in \left(-\frac{9}{4}, -2\right] \cup (0, \infty)$. **18.** $a_k \geq k^2, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Notând $\sqrt{a_k - k^2} = b_k$, de unde $a_k = b_k^2 + k^2, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, relația din ipoteză devine $\sum_{k=1}^n (b_k - k)^2 = 0$, de unde $b_k = k$, deci $a_k = 2k^2, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. **19.** a) Dacă $a < -5$, $x \in \emptyset$. Dacă $a \geq -5$, $x = \frac{a-5}{2}$; b) Dacă $a < -\frac{1}{4}$, $x \in \emptyset$. Dacă $a = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$. Dacă $a \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Dacă $a = 0$, $x \in \{0, 1\}$. Dacă $a > 0$, $x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$; c) $x = \sqrt{3}|a|, \forall a \in \mathbb{R}$. **20.** a) Dacă $a < 0$, $x \in \left(-\infty, \frac{a}{2}\right]$. Dacă $a = 0$, $x \in (-\infty, 0)$. Dacă $a > 0$, $x \in (-\infty, \sqrt{a+1} - 1)$; b) Dacă $a \leq 0$, $x \in [1, \infty)$. Dacă $a \in (0, 1)$, $x \in \left[1, 1 + \frac{(1-a^2)^2}{4a^2}\right)$. Dacă $a \geq 1$, $x \in \emptyset$; c) Dacă $a < 0$, $x \in [a, 0]$. Dacă $a = 0$, $x \in \emptyset$. Dacă $a > 0$, $x \in (0, a)$. **Pg. 186. Test de evaluare. I. 1.** $V(2, 3)$. Valoarea maximă a funcției: $y_{\max} = 3$. Imaginea funcției: $\text{Im}(f) = (-\infty, 3]$. **2.** Domeniul maxim de definiție: $D = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. **3.** Funcția h este impară. **II. 4.** a) $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 3x + 1$. Justificare marginare: forma canonică este $3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, rezultă $(f \circ g)(x) \geq \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția este mărginită inferior de $\frac{1}{4}$; b) Funcția f este bijectivă: $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$. **III. 5.** a) poziția vârfului: $x_v = 1$; b) Funcția este bijectivă, deoarece este strict crescătoare (deci injectivă) pe $[1, \infty)$ și $f(1) = 2$, determinând $\text{Im}(f) = [2, \infty)$ (deci surjectivă). Expresia funcției inverse se verifică rezolvând ecuația $x^2 - 2x + 3 = y$ pentru $x \in [1, \infty)$, obținând: $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$; c) Mulțimea soluțiilor în intervalul $[1, \infty)$ este: $x \in \{2\}$.

Capitolul 4

Pg. 190-191. 1. a) $12^\circ 20' 24''$; b) $36^\circ 3'$; c) $80^\circ 9' 36''$. **2.** $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{120\pi}{180}, \frac{2418\pi}{180}$. **3.** $180^\circ, 90^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 330^\circ, (180/\pi \cdot 3)^\circ$. **4.** $\pi/2$. **5.** $(360/R)^\circ$. **6.** $120^\circ; 2\pi/3$. **8. 3. 9.** $7\pi/12, 11\pi/12$. **10.** 2; $114^\circ 35' 24''$. **11.** $5\pi/3$. **12.** 6. **13.** minutarul parcurge 90° , orarul parcurge $7^\circ 30'$; unghiul = $82^\circ 30'$. **14.** $x \in \{2\pi - 6; 2\pi - 3; 4\pi - 14; 12\pi - 39; 3\pi/4\}$. **16.** II; III; IV; I. **18.** laturile subîntind coarde de arce de 120° ; **19.** Dreptunghi. **Pg. 194. 1.** $f(x+2) = f(x)$; $x, x+2 \in \mathbb{Z}$, deci $x \in \mathbb{Z}$. **2.** Nu este monotonă; este mărginită. **3.** $f(x+T_1+T_2) = f(x+T_2) = f(x)$. **5.** $f(x+6) \leq f(x+3) + 3 \leq f(x) + 6$; $f(x+6) \geq f(x+4) + 2 \geq f(x+2) + 4 \geq f(x) + 6$; $f(x+6) = f(x)$. **6.** $f(x+2a) = -1 / f(x+a) = -1 / (-1/f(x)) = f(x)$. **7.** Dacă $T > 0$ este o perioadă, atunci f este constantă pe orice interval $[a, a+T)$, $a \in \mathbb{R}$, deci constantă pe domeniu. **9.** periodică de perioadă 2. **Pg. 196-197. 2.** $\cos 3\pi/4 = -\sqrt{2}/2$; $\sin 4\pi/3 = -\sqrt{3}/2$; $\sin 150^\circ = 1/2$. **3.** a) $M(1/5; 2\sqrt{2}/3)$; b) $M(-\sqrt{21}/5; -2/5)$. **4.** $\cos 1 > \cos 5$; **5.** a) $\sin x + \cos x = -2 \Rightarrow \sin x = -1$; $\cos x = -1$, deci $\cos^2 x + \sin^2 x = 2$, contradicție. **8.** $\sin x \cos x = (a^2 - 1)/2$; $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$. **9.** $b = 1 - 3((a^2 - 1)/2)^2$. **12.** a) $[-5, 1]$; b) $\{2\}$; c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. **Pg. 198-199. 3.** a) negativ; b) negativ; c) $\sqrt{216} = 6$; $\sin 6 < 0$. **5.** a) -1 ; b) $44^\circ \approx 0,006 \in \text{cadrantul I}$, deci $\sin 44 > 0$. **7.** $3\cos 2 \in \text{cadrantul II}$. **8.** $[\sin x] \leq \sin x \leq 1$; $[\cos x] \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow [\sin x] + [\cos x] \leq 2$. **9.** a) $x \in (\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$. **10.** a) $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$; b) $x \in (0, \pi/2) \cup (5\pi/6, 3\pi/2) \cup (11\pi/6, 2\pi)$. **11.** a) $t \in (\pi/4, 5\pi/4)$; b) $t \in (3\pi/4, 7\pi/4)$. **12.** $a^2 + b^2 = 1$; $b = -\sqrt{1 - a^2}$; b) $N(-a; -b)$; c) $\cos AOM = a$ cu $AOM = \alpha$. **13.** Inducție varianta a n -a: $\sin^{4n} x + \cos^{4n} x = (\sin^{4n-2} x + \cos^{4n-2} x)(\sin^2 x + \cos^2 x) - (\sin x \cos x)^2(\sin^{4n-4} x + \cos^{4n-4} x)$; $\sin x \cos x \in \mathbb{Q}$. **Pg. 200. 1.** b) $\cos(\theta - 25\pi) = \cos(\theta - 25\pi + 26\pi) = \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta = -1/3$; d) $\alpha = 6\pi$. **3.** Pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, $2\pi/a$ este perioadă. **4.** Nu (domeniul de definiție este mărginit). **5.** a) $2\pi/3$; b) 2π ; c) 2π ; d) $2\pi/7$. **6.** a) Presupunem că $(\exists) T > 0, f(x+T) = f(x) \Rightarrow x+T + \cos(2x+2T) = x + \cos 2x$; deci $T + \cos(2x+2T) = \cos 2x$ (*), $\forall x \in \mathbb{R}$. Fie $x = \pi - T$; atunci $T + 1 = \cos 2T$, de unde rezultă $\cos 2T > 1$, fals; b) Presupunem $T > 0$ perioadă $\Rightarrow \sin(x+T) - (x+T)^2 = \sin x - x^2$; înlocuim x cu 0 și $-T$; obținem $\sin T = T^2$, respectiv $\sin T = -T^2 \Rightarrow T = 0$, fals; c) facem $x = 0$; rezultă $x(T) \cdot \cos T = 1$, contradicție. **8.** $(720\pi / (180 - \pi))^\circ = 4\pi^2 / (180 - \pi)$; $\sin(720\pi / (180 - \pi)) = \sin((720\pi / (180 - \pi)) - 4\pi) = \sin(4\pi^2 / (180 - \pi))$. **Pg. 201. 1.** $f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$. **2.** $g(-x) = 2(-x)^5 + \sin(-3x) = -2x^5 - \sin 3x = -g(x)$. **3.** $\sin(-17\pi/4) = -\sin(17\pi/4) = -\sin(\pi/4 + 4\pi) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. **4.** $f(-x) = f(x) \Rightarrow -\sin x + \cos x = \sin x + \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\sin x = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$, fals. **5.** Din operații cu funcții pare, a), f impară $\Rightarrow f^3$ impară și produs cu funcție pară $\Rightarrow$ funcție $x \mapsto x^2(\sin x)$ impară. **6.** a) folosim $a = 0$; $b = 0$; b) $f(x) = x^2$; c) Demonstrăm că f este pară: lucrez cu $a = 0$. **Pg. 203. 1.** $\sin \frac{3\pi}{4} = +\sin \frac{\pi}{4}$, iar $\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{2000\pi}{3} = \sin\left(666\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$, $\sin(-240^\circ) = -\sin 240^\circ = -\sin(180^\circ + 60^\circ) = -(-\sin 60^\circ) = \sin 60^\circ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$\sin x \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. 4. a) 0; b) 1. 5. a) $\left[\sin \frac{14\pi}{3}\right] = \left[-\sin \frac{\pi}{3}\right] = -1$, $\left\{\sin \frac{14\pi}{3}\right\} = -\sin \frac{\pi}{3} + 1$; b) $45^\circ \in$
cadranul I; deci $[\sin 45^\circ] = 0$; $\{\sin 45^\circ\} = \sin 45^\circ - 0 = \sin 45^\circ$. 6. a) $\sin \frac{108\pi}{9} = \sin 12\pi = \sin 0 = 0$; b) $50^\circ \in$ *cadranul I*,
 deci $\cos 50^\circ > 0$, $\sin \frac{\pi}{3} > 0$; c) $3\cos 3 \in$ *cadranul 2*. 7. analizăm cazurile: n par, n impar; a) $n = 6k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $\cos \frac{n\pi}{3} = \cos\left(\frac{(6k+r)\pi}{3}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{r\pi}{3}\right) = \cos \frac{r\pi}{3}$, deci $\cos \frac{n\pi}{3} \in \left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right\}$; b) $\cos \frac{n\pi}{4} \in \left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right\}$; c)
 $\sin \frac{(2n-3)\pi}{6} = \sin\left(\frac{2n\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{3}\right) = \cos \frac{n\pi}{3}$. 10. a) 0; b) $-\cos x + \sin x$; c) 1; d) 0. 11. $\sin(a + 5\pi/4) = -\sin(a + \pi/4)$;
 $\cos(5\pi/4 - a) = -\cos(\pi/4 - a) = -\sin(\pi/2 - \pi/4 + a) = -\sin(\pi/4 + a)$. 12. $\cos 1^\circ = \cos(180^\circ - 1^\circ) = -\cos 179^\circ$; $\cos 2^\circ =$
 $-\cos 178^\circ$ etc.; $\sin 1^\circ = \sin(360^\circ - 1^\circ) = -\sin 359^\circ$; $\sin 2^\circ = -\sin 358^\circ$. 13. $-\cos x = \cos x \Rightarrow \cos x = 0$. 14. $\cos((360\pi)/$
 $(180 + \pi)) = \cos((360\pi)/(180 + \pi) - 2\pi) = \cos(2\pi^2/(180 + \pi))$. Pg. 207. 1. $\sin x = 2/3$, $\cos x = \sqrt{5}/3$, $\tan x = 2/\sqrt{5}$, $\cot x = \sqrt{5}/2$.
 2. $\cos x = -1/3 \Rightarrow \sin x = 2\sqrt{2}/3$; $\sqrt{(\tan x / \cot x)} = \sqrt{(\tan^2 x)} = |\tan x| = 2\sqrt{2}$. 3. $\tan 2025\pi/8 = \tan(6,75\pi) = \tan 0 = 0$. 4. $\cot x =$
 $-1/2$; $\sin x = -2\cos x$; $5\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1/\sqrt{5}$. 5. b) $\tan x = 3$; $\sin x = 3\cos x$; $x \in$ *cadranul I*; $M(\cos x, \sin x) \Rightarrow N(-\cos x,$
 $\sin x)$. 6. Punem domeniul lui f : $x \neq \pi/2 + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; $f(-x) = -\tan 2x + x = -f(x)$; domeniul lui $h = \mathbb{R} \setminus$
 $\{3\pi/8 + 3k\pi/4 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 7. $\cos x \neq 0$; împărțim relația cu $\cos^2 x$. Obținem $\tan^2 x - \tan x - 6 = 0$; $\tan x = 3$ (pentru că $\tan x > 0$).
 8. $\tan x + \cot x = \sin x / \cos x + \cos x / \sin x = 1 / (\sin x \cos x)$; $(\sin x + \cos x)^2 = 1/4 \Rightarrow \sin x \cos x = -3/8$. 9. $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,
 $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8} \in (\pi/2, \pi)$. 10. $\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ = \tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ = 1$; $\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ = 1$. 11. $E = 0$; $F = -(\sin x + \cos x)^2 / \cos^2 x + 1 + \tan^2 x$
 $+ 2 \tan x = 0$. 12. Nu: $x = \pi/2$; $y = 3\pi/2$. 13. a) perioada $\pi/3$; b) perioadă 2π ; c) perioada $\pi / (2\pi/3) = 3/2$; d) funcția
 este periodică. 15. a) $\sin(\pi/9) < \pi/9 < 7/20$; b) $\sin x > 1 / \sqrt{(x^2 + 1)} \Leftrightarrow \sin^2 x > 1 / (x^2 + 1) \Leftrightarrow \sin^2 x + x^2 \sin^2 x > x^2 \Leftrightarrow$
 $\sin^2 x > x^2(1 - \sin^2 x) \Leftrightarrow \sin^2 x > x^2 \cos^2 x \Leftrightarrow \tan x > x$. 16. a) $(\sin x + 2\cos x) / (\cos x - \sin x) = (\tan x + 2) / (1 - \tan x) = (a + 2)$
 $/ (1 - a)$; b) $\sin x < -1/3 \Rightarrow \sin x < 0$; $\sin x = -\sqrt{(1 - \cos^2 x)}$. 17. a) $\mathbb{R}$; b) dacă $a > 0 \Rightarrow a + 1/a \geq 2$; $\text{Im} = [2, \infty)$; c) $h(x) =$
 $(\tan^2 t + 2 \tan t + 1) / (1 + \tan^2 t) = 1 + (2 \tan t) / (1 + \tan^2 t)$; $\text{Im} h = [0, 2]$. Pg. 211. 2. $\tan |x|$; 3. $\tan 120^\circ = \tan 2\pi/3$, $2\pi/3 > 2$; $\tan$ este
 crescătoare pe intervalul $(\pi/2, \pi)$. 4. $\cos 3 < \cos 4 < \cos 2 < \cos 1$. 5. $\cos 5 < 0$; $\cos 1 = \sin(\pi/2 - 1) < \sin 1$. 7. $\sin(\cos x) \leq \sin 1$
 $< \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$. 9. Pentru $x = \pi/2$, egalitatea devine $f(\pi/2) = -\sin \pi + 2f(\pi/2)$; $f(\pi/2) = 0$; $f(x) = -\cos x$. Pg. 213-214.
 2. a) $\cos 2x$; b) $\cos \pi/4$; c) $\sin \pi/2$; d) $\sin 11\pi/24$. 3. a) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$; b) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$; c) $\sin 75^\circ = \sin 105^\circ$; d) $\sin(\pi/4 + \pi/3)$; e)
 $\sqrt{3}$. 4. a) $\cos(a + b + c) = \cos(a + b) \cos c - \sin(a + b) \sin c \dots$ d) se folosește b). 5. $\cos x = 4/5$; $\sin y = -7/25$. 6. a)
 $\cos(a - b) / (\cos a \cos b) = (\cos a \cos b + \sin a \sin b) / (\cos a \cos b) = 1 + \tan a \tan b$. 7. i) $a = b$; ii) $\cos x = a\sqrt{3} - b$; $\sin x =$
 $-a + \sqrt{3} b$; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ etc. 8. $\Delta = \cos^2(a + b)$. 9. În trecerea de la k la $k + 1$ este suficient să arătăm că $\sin(ak - a_{[k-1]}) +$
 $\sin(a_{[k+1]} - ak) - \sin(a_{[k+1]} - a_{[k-1]}) \leq 0 \Leftrightarrow \sin(x + y) \leq \sin x + \sin y$; $x = a_{[k+1]} - ak$; $y = ak - a_{[k-1]}$, $x, y \in (0, \pi/2)$. 10.
 $|\cos(x - y)| = |\cos x \cos y + \sin x \sin y| \leq |\cos x \cos y| + |\sin x \sin y| \leq |\cos x| + |\sin y|$. 11. $|ax + b\sqrt{(1 - x^2)}| = |a \cos \alpha +$
 $b \sin \alpha| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)}$. 12. a) $\cot 2x - \cot 4x = (\cos 2x \sin 4x - \sin 2x \cos 4x) / (\sin 2x \sin 4x) = \sin 2x / (\sin 2x \sin 4x) = 1 /$
 $\sin 4x$; b) punem $x = 2^k y$; însumăm egalitățile de la a). 13. $0 < \cos A \cos B < 1$; $\sin A > 0$, $\sin B > 0 \Rightarrow \cos A \cos B > 0$;
 deci $A, B \in (0, \pi/2)$; $\cos A \cos B < \sin A \sin B \Leftrightarrow \cos(A + B) < 0 \Rightarrow A + B > \pi/2 \Rightarrow C < \pi/2$. 14. Fie $a = \sin x$ și $b = \cos y$,
 $x, y \in [0, 2\pi)$. Inegalitatea se rescrie $|\cos x| + |\cos y| \leq \sqrt{(4 - (\sin x + \sin y)^2)} \Leftrightarrow (|\cos x| + |\cos y|)^2 + (\sin x + \sin y)^2 \leq 4$,
 adevărat. 15. Împărțim intervalul $[0, 1]$ în 6 părți egale. Atunci într-un subinterval se află cel puțin două numere
 $(\cos \alpha, \cos \beta)$, să presupunem $\alpha > \beta$. Putem presupune că numerele sunt $\sin a_1, \sin a_2, \dots, \sin a_7$, cu $a_1, a_2, \dots, a_7 \in [0, \pi/2]$.
 Împărțim intervalul în 6 subintervale egale. Aplicăm principiul cutiei. Putem presupune că două dintre numere a_k
 și a_j sunt în $[0, \pi/12]$ etc. Pg. 215. 1. $\cos x = -4/5$; $\sin y = -\sqrt{3}/2$; $\tan x = -3/4$; $\tan y = -\sqrt{3}$. 2. $\tan 7\pi/12 = \tan(\pi/3 + \pi/4)$;
 $\cot 5\pi/12 = \cot(\pi/6 + \pi/4)$. 3. $\tan x = (a - 1)/(a + 1)$; $\cot x = (a + 1)/(a - 1)$. 4. $3 \cot b = \cot a + \cot c \Leftrightarrow 3 \cot(\pi/2 - (a + c)) =$
 $\cot a + \cot c \Leftrightarrow 3 = (\cot a + \cot c) \cot(a + c) \Leftrightarrow 3 = \cot a \cot c - 1$. 5. $\cot(\pi - C) = \cot(A + B)$ etc. 6. $\tan 2x = \tan(3x - x) =$
 $(\tan 3x - \tan x) / (1 + \tan 3x \tan x)$. 7. reducere la absurd: $(\exists) T > 0$ a.î. $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow T + \tan(x + T) = \tan x$; pentru $x = 0$
 obținem $\tan T = -T$; pentru $x = \pi/4$ obținem $T + (\tan T + 1)/(1 - \tan T) = 1 \Rightarrow (1 - T)/(1 + T) = 1 - T \Rightarrow T = 0$, contradicție
 sau $T = 1$, contradicție. 8. a) $\tan a \cdot (\sqrt{3} - \tan a) / (1 + \sqrt{3} \tan a) \cdot (\sqrt{3} + \tan a) / (1 - \sqrt{3} \tan a) = \tan 3a$; $\tan 3a = \tan(a + 2a)$; b)
 înlocuim a cu 20° . 9. a) $\tan x > x (*) \forall x \in (0, \pi/2) \Rightarrow \tan(b - a) > b - a$; $\tan(b - a) = (\tan b - \tan a)/(1 + \tan b \tan a) < \tan b - \tan a$
 $\Rightarrow b - a < \tan b - \tan a$; b) $f(-x) = \tan(-x) - (-x) = -\tan x + x = -f(x)$; $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$; c) ecuația echivalentă cu $f(x) =$
 $f(\pi/4) \Rightarrow x = \pi/4$ (deoarece f este injectivă). 10. $\tan 55^\circ = \tan(45^\circ + 10^\circ) = (1 + \tan 10^\circ) / (1 - \tan 10^\circ)$; $\tan 10^\circ = \pi/18 > 3/18 =$
 $1/6$. Pg. 217. 1. a) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$; $\sin 2a = 2\sin a \cos a$; $\cos a = -4/5$; b) $\sin x = (2\tan(x/2)) / (1 + \tan^2(x/2))$; $\cos x =$
 $(1 - \tan^2(x/2)) / (1 + \tan^2(x/2))$. 2. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$; $\sin 2a = 1 - 2\sin^2 a$; $\sin 4a = 2 \sin 2a \cos 2a$. 3. Ridicăm la pătrat:
 $\sin 2x = (1 - a^2)/2$. 4. c) $2\cos^2 75^\circ - 1 = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$; b) $2 \sin 7^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30' = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$
 etc. 5. $\sqrt{(1 + \sin 2x)} = \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x)} = \sqrt{((\sin x + \cos x)^2)}$; c) $1 - 2 \sin^2(\pi/4 - x/2) = \cos(\pi/2 - x) = \sin x$;
 d) $\sin 2x / (1 - \cos 2x) = (2 \sin x \cos x) / (2 \sin^2 x) = \cot x$. 6. $\tan 2a = (2 \tan a) / (1 - \tan^2 a) = 4/3$. 7. $\sin 2x = (2 \tan x) / (1 +$
 $\tan^2 x)$; $\cos 2x = (1 - \tan^2 x) / (1 + \tan^2 x)$. 8. a) $\cos 2x + 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x = 1$; b) $\sin^4 x - \sin^6 x \leq 1/4 \Leftrightarrow (\sin^2 x -$
 $1/2)^2 \geq 0$; c) $\cos x + \sin 2x = 1 + \cos 2x + \sin 2x = 1/2 + 1/2 \cos 2x + \sin 2x \leq 1/2 + \sqrt{(1/4 + 1)} = (1 + \sqrt{5})/2$; d) echiv.
 cu $2 \tan(x/2) < \tan x \Leftrightarrow 2 \tan(x/2) < (2 \tan(x/2)) / (1 - \tan^2(x/2)) \Leftrightarrow (\tan^3(x/2)) / (1 - \tan^2(x/2)) < 0$. 9. $2 \sin x - 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $(4 \tan(x/2)) / (1 + \tan^2(x/2)) - 3(1 - \tan^2(x/2)) / (1 + \tan^2(x/2)) + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan(x/2) = \sqrt{3}/2$. 10. b) Înlocuim x cu $2^k x$, $k = 1, 2, \dots, n$,



apoi însumăm. **11.** $1 - x^2/2 < \cos x < 1 - x^2/2 + x^4/24 \Leftrightarrow 2\sin^2(x/2) < x^2/2 \Leftrightarrow \sin^2(x/2) < x^2/4 \Leftrightarrow \sin(x/2) < x/2$ (A).

12. a) $\sin 80^\circ = 1$; $a = 1/8$; b) $b = 1$. **13.** Considerăm un triunghi dreptunghic cu catetele a și b și ipotenuza c ; rezultă $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$; $\alpha \in (0, \pi/2)$; obținem echivalent $8(1 - 1/2 \sin^2 2\alpha) \geq 4 \sin^4(\alpha + \pi/4)$. Membrul stâng este mai mare decât 4, iar membrul drept este mai mic decât 4; b) Putem considera $b = a \sin x$, $x \in (0, \pi/2)$; obținem echivalent $\cos x + \sqrt{(2 \sin x - \sin^2 x)} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2 \sin x - \sin^2 x)} \geq 1 - \cos x \Rightarrow 2 \sin x - \sin^2 x \geq 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x \geq 0$.

16. Dacă $\sin 1^\circ \in \mathbb{Q}$, atunci $\sin 3^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin 9^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin 18^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin 36^\circ \in \mathbb{Q}$, contradicție. **17.** Conform ex. 14, $a = 1/8 \sin 80^\circ$; deci $1/8 > a > 1/8 \sin 60^\circ = \sqrt{3}/16$, rezultă $0,125 > a > 0,1$ deci prima zecimală este 1. **Pg. 218. 1.** a) $\cos x = -\sqrt{11}/6$; $\sin x/2 = \sqrt{(6 - \sqrt{11})}/12$; $\cos x/2 = \sqrt{(6 + \sqrt{11})}/12$. **2.** $\cos \pi/12 = \cos(\pi/3 - \pi/4) = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$; b) $\cos \pi/12 = \sqrt{((1 + \cos \pi/6)/2)} = \sqrt{(4 - \sqrt{12})}/8$; d) $\operatorname{tg}^2 7^\circ 30' = (1 - \cos 15^\circ)/(1 + \cos 15^\circ)$. **3.** $1/\sin^2 15^\circ + 1/\cos^2 15^\circ = 1/(\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ) = 4/\sin^2 30^\circ = 16$. **4.** $\operatorname{tg}(x/2) = \sin x/(1 + \cos x)$; $\cos x = -\sqrt{5}/3$; $\operatorname{tg}(\pi/4 + x/2) = \operatorname{ctg}(-x/2) = -\operatorname{ctg}(x/2) = -1/\operatorname{tg}(x/2)$. **5.** $\operatorname{ctg} a/2 = \sin a/(1 - \cos a)$. **6.** $\sin^2 \pi/8 = 1/2(1 - \cos \pi/4)$; $\sin^2 3\pi/8 = 1/2(1 - \cos 3\pi/4)$ etc. **7.** a) $\cos^4 \alpha = 3/8 + 1/8 \cos 4\alpha + 1/2 \cos 2\alpha$; b) Facem $x = 10^\circ$; $\cos^4 130^\circ = \cos^4 50^\circ$. **8.** $\operatorname{tg} \pi/10 = \sin(\pi/5)/(1 + \cos(\pi/5))$. **Pg. 220-221. 1.** a) $2 \sin 35^\circ \cos 20^\circ$. **2.** $\sin(\pi/5) - \sin(3\pi/5) = -2 \sin(\pi/5) \cos(2\pi/5) > 0$; $\cos(2\pi/5) > 0$; $\cos 1 + \cos 5 = 2 \cos 3 \cos 2$; $\cos 3 < 0$, $\cos 2 < 0$. **3.** a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = (\sin 2x)(2 \cos x + 1)$; e) $1 + \cos 2x - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$. **4.** a) $(2 \cos 20^\circ - 1)/(\sqrt{3} + 2 \sin 40^\circ) = (\cos 20^\circ - 1/2)/(\sqrt{3}/2 + \sin 40^\circ) = (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)/(\sin 60^\circ + \sin 40^\circ)$; e) $(1 + \sqrt{2} \sin 5^\circ)/(1 - \sqrt{2} \sin 5^\circ) = (1/\sqrt{2} + \sin 5^\circ)/(1/\sqrt{2} - \sin 5^\circ) = (\sin 45^\circ + \sin 5^\circ)/(\sin 45^\circ - \sin 5^\circ)$. **5.** a) Fiecare produs se transformă în diferență de cos. **6.** Dacă $\pi/2 > x > y > -\pi/2$, atunci $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \sin(x - y)/(\cos x \cos y) > 0$. **7.** a) Produsul $= 1/2(\cos x)(\cos 2x + \cos(2\pi/3)) = 1/2 \cos x \cdot (2 \cos^2 x - 1) - 1/4 \cos x = 1/4 \cos 3x$; se aplică a) pentru $x = 25^\circ$. **8.** a) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) = 2 \sin((a + b)/2) \cos((a - b)/2) + 2 \sin((-a - b)/2) \cos((a + b + 2c)/2) = \dots$; c) $\sin(a + b)/(\cos a \cos b) + \sin(-a - b)/(\cos c \cos(a + b + c)) = \dots$. **9.** a) $\operatorname{tg} x + \sin(y + z)/(\cos y \cos z) = \sin x/\cos x + \sin x/(\cos y \cos z)$; b) $2 \cos((x + y)/2) \cos((x - y)/2) + 2 \cos^2(z/2) = 2 \cos(z/2) \cos((x - y)/2) + 2 \cos^2(z/2)$. **10.** a) Fie $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$; $f(x_1) - f(x_2) = x_1 - \cos x_1 - x_2 + \cos x_2 = x_1 - x_2 + 2 \sin((x_1 - x_2)/2) \sin((x_1 + x_2)/2) > 0$, dacă $x_1 > x_2$. **11.** Scriem $\operatorname{aria}(ABC)$ în două moduri (B și C sunt vârfuri ale bradului) $\Rightarrow AC = (2 \sin 52^\circ 30')/\sin 15^\circ$; aflăm DC ; din $\triangle OCA$. **15.** $\cos A + \cos B + \cos C = 3/2 \Leftrightarrow 2 \cos((A + B)/2) \cos((A - B)/2) + 2 \cos^2(C/2) - 1 - 3/2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos((A + B)/2) \cos((A - B)/2) - 2 \cos^2((A + B)/2) - 1/2 = 0$, ecuație de gr. II în $\cos((A + B)/2)$; discriminant pozitiv implică $\sin^2((A - B)/2) = 0$ etc. **16.** $(\sin x + \sin y)/2 = \sin((x + y)/2) \cos((x - y)/2) \leq \sin((x + y)/2)$; $((x - y)/2 \in [-\pi/2, \pi/2])$. **Pg. 225. 1.** 0; $-\pi/2$; $2\pi/3$; $\pi/3$; $-\pi/3$; $\pi/3$; $2\pi/3$. **2.** a) $x/\sqrt{(1 - x^2)}$; b) $\sqrt{(1 - x^2)}/x$; c) $\sqrt{(1 - x^2)}/x$; d) $\sqrt{((1 + \cos(\arccos x))/2)} = \sqrt{((1 + x)/2)}$; e) $\operatorname{tg}(1/2 \arcsin x) = \sin(\arcsin x)/(1 + \cos(\arcsin x))$; f) $x = \operatorname{tg}(\pi/2 - \arctg 1/5) = \operatorname{ctg}(\arctg 1/5) = 5$. **3.** a) calcul; b) Nu (sumă de numere pozitive); c) de la a) $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $k = 1$, convine. **4.** calculăm tangenta ambilor membri. **5.** $\operatorname{tg}(\arctg(k + 1) - \arctg k) = (k + 1 - k)/(1 + k(k + 1)) = 1/(1 + k + k^2)$ și $\arctg(k + 1) - \arctg k \in (0, \pi/2)$; b) se aplică a), adunând egalitățile; $\arctg(1 + k + k^2) = \arctg(1/(1 + k + k^2))$. **6.** $\arctg(\operatorname{tg} x) = x^*$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$; periodice de perioadă π . **7.** Ecuația $\sin x = y$, $y \in [-1, 1]$ are soluție unică $\pi - \arcsin y \in [\pi/2, 3\pi/2]$. **8.** a) $x = \sqrt{(1 - x^2)}$; $x \in [0, 1]$; b) $\arcsin 2x = \pi/3 + \arcsin x$; $3x = \sqrt{3}(1 - x^2)$. **9.** a) $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; b) $x + 8\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$; c) $2\pi - x \in [0, \pi]$. **10.** a) $1/x \in [-1, 1] \Rightarrow |1/x| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; b) $2x - x^2 \in [-1, 1]$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x/(x + 2) \in [-1, 1]$. **11.** $\arccos(\cos x) \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq 0$; $\arcsin(\sin x) \leq \pi/2 \Rightarrow \cos x \geq 0$; $\sin(\arcsin(\sin x)) = \sin(\arccos(\cos x))$. **Pg. 228-229. 1.** a) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{\pi/4 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/4 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$; c) $\{\arcsin 1/3 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin 1/3 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$; d) $\emptyset$. **2.** e) $\pm \arctg 2$. **3.** a) Observăm că $y = 30^\circ$ este soluție, ecuație echivalentă cu $\operatorname{tg} y = \sin 40^\circ/(2 \cos 10^\circ + \cos 40^\circ)$, $y \in (0, 90^\circ)$; rezultă $y = 30^\circ$ soluție unică; b) echivalent $\sin 2x = 2 \sin 35^\circ > 2 \sin 30^\circ = 1$; $\emptyset$; c) echivalent cu $\sin x = -1$; $\cos x = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \geq 4$; $\pi/n \leq \pi/4$; soluție unică $n = 12$. **6.** a) $x = 2x + 2k\pi$ sau $x = \pi - 2x + 2k\pi$; b) $\sin x = \sin x/\cos x \Leftrightarrow \sin x = 0$ sau $\cos x = 1$; $x = k\pi$; c) $2 \sin x/2 \cos x/2 = \sin x/2/\cos x/2 \Leftrightarrow \cos x/2 = 0$ sau $2 \sin^2 x/2 = 1$. **7.** $\sin 5x = -\cos x \Leftrightarrow \sin 5x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow 5x = \pi/2 - x + 2k\pi$ sau $5x = x - \pi/2 + 2k\pi$. **8.** a) $\cos^2(-7\pi/3) - \sqrt{3} \sin(-7\pi/3) + a = 0 \Leftrightarrow \cos 2\pi/3 + \sqrt{3} \sin \pi/3 + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; b) $\operatorname{tg} x + \sin 2x = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + (2 \operatorname{tg} x)/(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2$ (ecuație de grad 3 în $\operatorname{tg} x$; se observă $\operatorname{tg} x = 1$; etc); c) $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$; $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0$. **9.** d) $\sin x = 0$ sau $2 \sin x + 3 \cos x = 2\sqrt{2}$. **10.** a) $\sin 4x/(\cos x \cos 3x) = \sin 4x/\cos 4x$; b) $2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x$; c) $\cos(\pi/2 - \pi \cos x) = \cos(\pi \sin x) \Leftrightarrow \pi/2 - \pi \cos x = \pi \sin x + 2k\pi$ sau $\pi/2 - \pi \cos x = -\pi \sin x + 2k\pi$; d) $\sqrt{(5 + \sin^2 3x)} \geq \sqrt{5}$; $2 \cos x/2 + \sin x/2 \leq \sqrt{5}$; e) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) + \cos^2 x(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$, $\cos x = 0$ sau $\sin x = 0$, $\cos x = 1$; f) $(\sin x + \cos x)^3 = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$; omogenă de grad 3; împărțim cu $\cos^3 x \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 1)^3 = \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$; $\operatorname{tg} x = 1$ etc.; g) $2 \cos^3 x = (\sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$; h) $\operatorname{tg} x = t$, ec. devine $\sqrt[3]{(t - 1)} + \sqrt[3]{t} = 1$; soluție unică $t = 1$ (funcția din membrul stâng este strict crescătoare). **11.** Se știe că $R = a/2$ și $r = p - a$; $b/a = \sin B$, $c/a = \cos B$, ecuația echivalentă cu $\sin B + \cos B = (1 + \sqrt{3})/2$; $B \in \{30^\circ, 60^\circ\}$. **12.** Funcția din membrul stâng este strict crescătoare pe $(-\pi/2, \pi/2)$. Soluție unică $\pi/4$. **13.** Fie t timpul necesar întâlnirii. Atunci $AI = v_0 \cdot t$; $PI = v \cdot t$. Scriem $\operatorname{aria}(\triangle PIA)$ în 2 moduri: $1/2 AI \cdot AP \cdot \sin(IAP) = 1/2 PI \cdot AP \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin(IAP) = h/l$; rezultă $\sin \alpha = 1/2$. Două soluții $\alpha \in \{30^\circ, 150^\circ\}$. **14.** a) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$; înlocuim x cu 40° ; b) Plecăm de la $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, $\alpha = 40^\circ$.

Pg. 229. Teste de antrenament. Test 1. 1. pozitiv. 2. $\left[\sin \left(3 \left(x + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right] = \left[\sin (3x + 4\pi) \right] = \left[\sin 3x \right]$. 3. $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$. 4.

$x = 0$. **Test 2.** 1. De exemplu, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(6\pi x)$. 2. $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = -\operatorname{ctgx} = -\frac{4}{3}$. 3. Demonstrație completată prin reducerea la un număr întreg în funcție de paritatea lui n : expresia este egală cu $2^n \in \mathbb{Z}$ dacă n este impar, respectiv $-2^n \in \mathbb{Z}$ sau $-2^{n+1} \in \mathbb{Z}$, în funcție de forma lui n par. 4. Demonstrație completată prin transformarea membrului drept: $\frac{\sin 40^\circ}{2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 10^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 80^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{2\sin 50^\circ \cos 30^\circ} = \operatorname{tg} 10^\circ$. **Testul 3.** 1. a) $t = \operatorname{tg} \left(\arctg \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2}{5}$ și $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{4}{5}$. Rezultă $2 \left(\frac{3}{5} \right) + \frac{4}{5} = 2$ (Adevărat); b) $x \in \left\{ 2\arctg \frac{1}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. 2. Demonstrație realizată prin scrierea inegalității sub forma $\sin A - \cos B < \cos C$, transformarea în produs și utilizarea relației $A + B + C = \pi$ într-un triunghi ascuțitunghic. 3. Ecuația nu are soluții reale, deoarece se reduce la $\sin 2x = 4\cos 55^\circ$, unde membrul drept este strict mai mare decât 1. 4. $\operatorname{Im} f = [4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$. **Testul 4.** 1. $-\frac{2\sqrt{2}+11}{2}$. 2. $4\sin(a+b)\sin(b+c)\sin(c+a)$. 3. Verificare realizată prin desfacerea produsului: $\sqrt{3} - 4\sin 20^\circ = \frac{\sin 60^\circ - 2\sin 20^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \operatorname{ctg} 20^\circ$. 4. a) Valoarea nu este soluție, deoarece $\sin(2\pi + \arcsin(\sqrt{2}-1)) = \sqrt{2}-1$, iar $\cos(2(2\pi + \arcsin(\sqrt{2}-1))) = 1 - 2(\sqrt{2}-1)^2 = 4\sqrt{2}-5$, valori care nu sunt egale; b) $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Pg. 229. Teste de evaluare. 1. a) $f\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; b) $x \in \left\{ (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; c) $\operatorname{Im} f = [-2, 2]$; d) $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$. 2. a) $D = [-1, 1]$; b) $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$; c) $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) se folosește $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Capitolul 5

Pg. 235-236. 1. a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 13$; b) $BD = 3$; $\cos B = 19/35$; $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos B$. 2. $f(x) = x^2 - 18/7 x + 25$; $AM = \min \Rightarrow AM$ înălțime; $AM \min \Leftrightarrow a > 0$ ($a = 1$). 3. a) $\cos C > 0$; b) Fie $D \in (BA)$, $BD/DA = (a \cos B) / (b \cos A)$. 4. $a^2 + b^2 - 2ab \cos C = BC^2$; i) $c = 4\sqrt{2} + \sqrt{47}$; ii) $c = 5\sqrt{2} + \sqrt{101}$. 6. $b^2 + c^2 - a^2 / (2abc) = a^2 + c^2 - b^2 / (2abc) = a^2 + b^2 - c^2 / (2abc)$ etc. 7. $ma = \sqrt{bc} \Rightarrow a^2 = 2(b-c)^2$; $b = c\sqrt{2} \Rightarrow a = c(2 - \sqrt{2})$. 8. Scriem teorema cosinusului pentru AC^2 în $\triangle ABC$ și $\triangle ADC$; adunăm relațiile. 9. Fie O intersecția diagonalelor; $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos(\angle AOB)$; $CD^2 = OD^2 + OC^2 - 2OD \cdot OC \cos(\angle AOB)$ etc.; $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 \Leftrightarrow (OA + OC)(OB + OD) \cos(\angle AOB) = 0$. 10. Exprimăm segmentele BC , MN , BM , CN cu teorema cosinusului. Obținem $(AC - AM)(AB - AN) \cos A = 0$. 11. Aflăm, pe rând, AD , EP , BE , $\cos EBD$; $EC = 13a/15$. 12. $b^2 + c^2 + bc = 4/3 a^2$; $a^2 = 2\sqrt{3}/3 bc$; $a^2 = 2\sqrt{3}/3 a^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \sqrt{3}/3$. 13. $a^2/9 = b^2/8 = c^2/5$; $\cos A = 1/\sqrt{10}$; $\operatorname{tg} A = 3$. 15. Folosim teorema cosinusului și grupăm convenabil; obținem $(b^2 - a^2)/c + ((a-b)(a^2 + b^2 - c^2 + ab)) / (abc) = 0 \Leftrightarrow (b-a)(c-b)(c-a) = 0$. 16. Dacă G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, atunci $BG = 2/3 mb$; $CG = 2/3 mc$; aplicăm Pitagora. 17. Notăm $BN = M = x$; teorema cosinusului în $\triangle ABC$; $x = 5$, $MN = 5\sqrt{3}/7$. 18. $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cos \angle ABC \Rightarrow 2 \geq BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cos \angle ABC \geq 2 - 2BA \cdot BC \cos \angle ABC \Rightarrow \cos \angle ABC \geq 0 \Rightarrow \angle ABC \leq 90^\circ$ și analoge; rezultă că unghiurile patrulaterului sunt toate de 90° . Din $AC^2 = BA^2 + BC^2 \geq 1 + 1 = 2$, rezultă $AC = \sqrt{2}$ etc. **Pg. 238.** 1. d) $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$; $b \cos B + c \cos C = R(\sin 2B + \sin 2C) = 2R \sin(B+C) \cos(B-C)$. 2. b) $AB/\sin C = 2R \Rightarrow R = AB / 2\sin(A+B)$. 3. Calculăm în funcție de latura pătratului lungimile segmentelor; EC , EF , OE , BF ; $BF = BD$ etc. 4. Obținem echivalent $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos(A/2)$; $\cos(A/2) \neq 0 \Rightarrow \sin B = \sin(\pi/2 - A/2) \Rightarrow B = \pi/2 - A/2$ sau $B = \pi/2 + A/2 \Rightarrow C = B$ (din I caz). 5. $(a+b)/(a-b) = (\sin A + \sin B) / (\sin A - \sin B) = (2 \sin((A+B)/2) \cos((A-B)/2)) / (2 \sin((A-B)/2) \cos((A+B)/2))$. 6. teorema sinusurilor; $2 \cos A + 2 \cos((B+C)/2) \cos((B-C)/2) = 2 \Leftrightarrow 2 \cos A + 4 \sin^2(A/2) = 2 \Leftrightarrow \cos A = 1 - 2 \sin^2(A/2)$, evident. 7. Echivalent $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C = 0$, $\cos C \neq 0$ 8. $\sin A \cdot (\sin((A-B)/2) / \cos A \cos((A+B)/2)) - \sin B \cdot (\sin((A-B)/2) / \cos B \cos((A+B)/2)) = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B) \sin((A-B)/2) = 0$. 9. $a/c = b/c \Rightarrow b-a = c-b \Leftrightarrow \sin B - \sin A = \sin C - \sin B \dots \Rightarrow \operatorname{ctg}(C/2) - \operatorname{ctg}(B/2) = (\sin((B-C)/2)) / (\sin(C/2) \sin(B/2))$, transformăm în sumă etc. **Pg. 240.** 1. e) din teorema sinusurilor rezultă $\sin A = 2/3$, deci $A = \arcsin(2/3) \approx 41,81^\circ$, atunci $B = 180^\circ - (41,81^\circ - 30^\circ) = 108,19^\circ$. Dacă $A = \pi - \arcsin(2/3) \approx 138,19^\circ$; $B = 180^\circ - 30^\circ - 138,19^\circ = 11,81^\circ$; 2 soluții; f) $\sin C = 20/14 \sin A > 1$; $\emptyset$; g) $\sin C = 20/14 \sin A = 20/14 \cdot \sqrt{2}/2 = 10\sqrt{2}/14 > 1$, $\emptyset$; h) $\sin C = 20/14 \sin 40^\circ \approx 0,91$; $C = \arcsin(0,91) \approx 65,47^\circ$ sau $C = 114,53^\circ$; 2 soluții. 2. $m > 1$; $c > a$; $c > b$; $a + b > c$; unghiul opus laturii mari este C , $\cos C = -1/2$. 3. a) $CE \parallel AD$, $E \in (AB)$, rezolvăm $\triangle CEB$; b) teorema cosinusului în $\triangle ADB$ și $\triangle ACB$. 4. Aplicăm teorema cosinusului pentru fiecare diagonală, însumăm. 5. $AC = 8$. 6. Din teorema sinusurilor rezultă $a/\sin A = a'/\sin A'$; $\sin A = \sin A'$; $A < A'$ etc. (A, A' ascuțite); $C = C'$. 7. Scriem cu teorema cosinusului DB^2 în 2 moduri; $\cos A = -\cos C = 3/5$, rezultă $DB^2 = 98$; $\cos A = 7/(5\sqrt{2})$; $\sin A = 1/(5\sqrt{2}) \Rightarrow$ laturi. 8. $A = 60^\circ$, $B + C = 120^\circ$; $\cos((B-C)/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 = \cos 15^\circ$; $B = 75^\circ$, $C = 45^\circ$. 9. $\sin((A+B)/2) = \sqrt{2}/2$; $A + B = 90^\circ$, $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$, $a = 1 + \sqrt{3}$, $b = 3 + \sqrt{3}$. 10. Cu teorema sinusurilor aflăm BD și AD ; apoi aflăm AB etc. cu teorema cosinusului. **Pg. 243-244.** 3. b) $\operatorname{aria}(ABCD) = 2 \operatorname{aria}(ABD)$. 4. 2 soluții: $a = 15$,



$c = 13, h = 4$ sau $a = 15, c = 13, h = 2\sqrt{193}$. **5.** formula lui Heron; aria în 2 moduri. **6.** $l_a = (2bc \cos(A/2)) / (b + c) = 12 \cos(A/2) \leq 12$. **7.** $(\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})) / 2$. **8.** $a^2 = 2S \sin A / (\sin B \sin C)$, apoi teorema sinusurilor **9.** a) $S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))} = p(p-a) \operatorname{tg}(A/2) \dots$ **10.** $S = (ab \sin C)/2$; $1/4(a^2 + b^2) = (ab \sin C)/2 \leq ab/2$; $a = b, C = \pi/2$. **11.** $hc = 8$; $S = 3\sqrt{3} / 2$. **12.** $a + ha = b + hb \Rightarrow \{a, ha\} = \{b, hb\}$ (Viète) $\Rightarrow a = b$ (isoscel) sau $a = hb, b = ha \Rightarrow a \cdot b = 2S \Rightarrow C = 90^\circ$. **13.** $S = 1/2 bc \sin A = 36 \sin A = \max \Rightarrow A = 90^\circ$. **14.** ineg. mediilor $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq ((p-a) + (p-b) + (p-c))/3 \dots$ **15.** Van Aubel: $AP/PD = C'A/C'B + B'A/B'C$, analoagele; adunăm relațiile și ținem cont că $x/y + y/x \geq 2, x, y > 0$. Valoarea minimă este 6, realizată pentru $P = G$. **16.** $\operatorname{aria}(ABCD) = \operatorname{aria}(DEFI) - \operatorname{aria}(DEC) - \operatorname{aria}(CBF) - \operatorname{aria}(ABG) - \operatorname{aria}(AGIH) - \operatorname{aria}(DAH) = 84 \text{ cm}^2$; $DB = \sqrt{65}$; $AC = \sqrt{61}$; $\sin \alpha = 168 / \sqrt{(65 \cdot 61)}$. **17.** $AI \perp BI \Rightarrow IJ/JB = 1/4 = \operatorname{aria}(AIF) / \operatorname{aria}(AJB)$; $\operatorname{aria}(ADK) / \operatorname{aria}(ABK) = KD/KB = 1/2$; $\operatorname{aria}(ADK) = 1/3 \operatorname{aria}(ADB) = 2/9$; $\operatorname{aria}(DIJK) = \operatorname{aria}(ADK) - \operatorname{aria}(AIF) = 7/15$. **18.** Fie D piciorul bisectoarei interioare a unghiului A ; $BD/DC = (\operatorname{aria}(ABD)) / (\operatorname{aria}(ADC)) = (AB \cdot h_1) / (AC \cdot h_2) = AB/AC (h_1 = h_2)$. **19.** Dacă O este intersecția diagonalelor, $\operatorname{aria}(ADO) / \operatorname{aria}(ODC) = \operatorname{aria}(ABO) / \operatorname{aria}(BCO) \Rightarrow \operatorname{aria}(ABO) = 80$. **20.** Fie R raza cercului circumscris patrulaterului; $\operatorname{aria}(ABCD) = \operatorname{aria}(ABC) + \operatorname{aria}(ADC) = (AB \cdot BC \cdot AC)/4R + (AD \cdot DC \cdot AC)/4R$; analog $\operatorname{aria}(ABCD) = \operatorname{aria}(ABD) + \operatorname{aria}(CDB) = (AB \cdot AD \cdot BD + BC \cdot CD \cdot BD)/4R$. **21.** Însumăm ariile triunghiurilor în care se descompune poligonul (formula lui Heron). **Pg. 245. 1.** $\sin A = \sqrt{2}/2, \sin B = \sqrt{3}/2$; din $b > a$, rezultă $B > A$, deci A este ascuțit, $A = \pi/4$; $B = \pi/3$ sau $B = 2\pi/3$; $c / \sin C = 2R$, aflăm C , apoi S și R . **2.** Din arie deducem $\sin C = \sqrt{3}/2, C = 2\pi/3$; $c = \sqrt{61}, R = abc/4S$ etc. **3.** $b^2 + c^2 < a^2$; A este obtuz; $\sin A = \sqrt{3}/2$, atunci $A = 2\pi/3$. **4.** $S = aha/2 = bc \sin A / 2 \Rightarrow bc = 54$; $\cos A = \pm 1/3$; $b = c = 3\sqrt{6}$. **5.** $b = 10, c = 8, a = 2\sqrt{21}$; **6.** $2S = a \cdot ha = b \cdot hb = c \cdot hc \Rightarrow a/(1/ha) = b/(1/hb) = c/(1/hc)$; rezultă că triunghiurile de laturi $1/ha, 1/hb, 1/hc$ sunt asemenea cu A, B, C ; aplicând teorema cosinusului în acest nou triunghi obținem $\cos A = 1/2, \cos B = 1/\sqrt{2}, C = 5\pi/12$; aflăm laturile etc. **7.** Dacă AB și CD sunt bazele trapezului, iar O este centrul cercului înscris, atunci $\triangle BOC$ este dreptunghic în O . Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este raza cercului; teorema înălțimii. **8.** DB subîntinde un arc de 120° , deci $DB = R\sqrt{3}$. Aplicând teorema cosinusului în $\triangle ADB$, obținem $AB^2 = 117$; $R = \sqrt{39}$. **9.** $abc = 4RS = 1280$. **10.** $(p-a) \operatorname{tg}(A/2) = (p-a) \sqrt{((p-b)(p-c)/(p(p-a)))} = S/p = r$; $4R \cos(A/2) \cos(B/2) \cos(C/2) = 4R \sqrt{((p(p-a))/bc) \cdot ((p(p-b))/ac) \cdot ((p(p-c))/ab)} = 4R (p \cdot S) / abc = p$. **11.** $a/\sin A \cdot \sin B/2 \cdot \sin C/2 = (abc)/p \cdot S/(abc) = S/p \cdot 1/4R = r/4R$; b) $ma^2 = (2(b^2 + c^2) - a^2)/4 = (2(a^2 + 2bc \cos A) - a^2)/4 = \dots = R^2(\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C)$. **12.** $AI = r/\sin(A/2) = 4R \sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2) \cdot 1/\sin(A/2) = \dots$; b) $P(IBC) = P(IAC) \Leftrightarrow IB + a = IA + b \Leftrightarrow a - b = 4R \sin(C/2)(\sin(B/2) - \sin(A/2)) \Leftrightarrow 4R \sin(A-B)/2 \cos(A+B)/2 = 4R(\sin B/2 - \sin A/2) \cdot \sin C/2 \Leftrightarrow \sin(A-B)/2 - \sin(B-A)/2 \Leftrightarrow A = B$ etc. **13.** b) $AH = 2R |\cos A| \leq 2R$. **Pg. 247-248. 1.** $\cos B = 1/2, B = 60^\circ$; aplicăm formulele. **2.** $\cos(A/2) = 1/2, A = 120^\circ$; aplicăm teorema cosinusului. **3.** $BE = ac/(a+b)$; $CD = ab/(a+c)$; $ac/(a+b) = ab/(a+c) \Leftrightarrow c/(a+b) = b/(a+c) \Leftrightarrow c(a+c) = b(a+b) \Rightarrow c = b$. **4.** $AC/8 = AB/4 \Rightarrow AC = 2AB$; $AD^2 = AC \cdot AB - BD \cdot DC = 2AB^2 - 32$; $AB = 6\sqrt{2}$; $AC = 12\sqrt{2}$. **5.** $IA/IA' = BA/BA' = c/b$ etc. **6.** $BM/MC = BM/MA = BD/DA = BE/EC \Rightarrow MB/MC = BE/BC \Rightarrow ME$ este bisectoare exterioară $\triangle BMA$; $\angle BME = 90^\circ$ (unghiul bisectoarelor din M). **7.** $AI/ID = AB/BD$; $AG/GM = 2 \Rightarrow AI/ID = AG/GM \Leftrightarrow AI/ID = 2 \Rightarrow AB/BD = 2 \Leftrightarrow (b+c)/a = 2 \Leftrightarrow b+c = 2a$ (D este piciorul bisectoarei din A). **8.** $B'M/MC = BB'/BC$ (teorema bisectoarei); $\triangle ABM$ isoscel; $AB' = B'M$; $B'M/MC = B'M/AM = 1/2 \Rightarrow BB'/BC = 1/2 \Rightarrow BC = 2BB' = 30$; $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = 60^\circ$. **9.** $AM/MC = \sin C = AB/BC \Rightarrow BM$ este bisectoarea $\triangle ABC$; $BMCN$ paralelogram și MN bisectoare $\Rightarrow BMCN$ este romb și $\triangle BMC$ isoscel $\Rightarrow B/2 = C \Rightarrow C = 30^\circ \Rightarrow AB = 1/2 BC = BO$ (BM bisectoare în $\triangle ABO$ isoscel) $\Rightarrow BM \perp AO \Rightarrow AO \perp NC$. **10.** Notăm $DF = y$; $FC = x$; $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}, \frac{x}{y} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{DA} = \frac{3}{2}$. Din $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ și $\frac{x+1}{y+x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 9; y = 6$; $AD = 10; DC = 15$. **11.** $\frac{GC}{GA} = \frac{CM}{MB} = \frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{GC}{GA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BG$ este bisectoarea $\triangle ABC$. Rezultă că BG este înălțime în $\triangle ABF$ isoscel, deci $BG \perp EF, EM \perp BF$; deci G este intersecția înălțimilor în $\triangle BEF$. **12.** a) $\frac{BE}{CE} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BE}{c} = \frac{CE}{b} = \frac{a}{c-b}$; b) aplicăm teorema sinusurilor în $\triangle ACE$: $\frac{AE}{\sin C} = \frac{CE}{\sin(90^\circ - \frac{A}{2})}$; $AE = \frac{absinC}{(c-b)\cos\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{c-b} \sin \frac{A}{2}$; c) $AE = \frac{2bc}{c-b} \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{bc}} \Rightarrow AE^2 = bc \frac{a^2 - (c-b)^2}{(c-b)^2} = \frac{a^2 bc}{(c-b)^2} - bc = BE \cdot EC - AB \cdot AC$.

13. (OB și (OD sunt bisectoare ale $\widehat{AOC}$; deci $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$ (1); $\triangle OAB \equiv \triangle ODC \Rightarrow AB = CD$. Atunci (1) devine $AB^2 = AD \cdot BC$. **Pg. 250. 1.** Calcul direct din relații. **2.** $EB = CD \Leftrightarrow ab/(c+a) = ac/(b+a) \Leftrightarrow b/(c+a) = c/(b+a) \Leftrightarrow b = c$. **3.** Construim $CE \parallel AD, E \in (AB)$. Aplicăm teorema lui Stewart în $\triangle CAB, E \in (AB)$; $CE^2 \cdot a = CA^2 \cdot (a-c) + CB^2 \cdot b - ac(a-c)$; $CE = d$ etc. **4.** Relația lui Stewart pentru ABC . Avem: $AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB = AM^2 \cdot BC + BC \cdot BM \cdot CM$. Aplicăm egalitatea cu MB , apoi cu MC și adunăm relațiile obținute (ținem cont de $AB^2 + AC^2 = BC^2$ și $MB + MC = BC$). **5.** $a^2 + c^2 = 5b^2 \Leftrightarrow \triangle GBC$ dreptunghic în G . **6.** a) $EF^2 = 2(DE^2 + BE^2) - BD^2$ (DE mediană în $\triangle ADC, BE$ mediană în $\triangle ABC$); b) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow EF = 0$, apoi relația lui Euler. **7.** Din relația lui Leibniz avem: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$, cu egalitate pentru $MG = 0 \Rightarrow M = G$. **8.** Din egalitate deducem că $\triangle ABC$ este ascuțitunghic și $OH^2 = 0$, deci $O \equiv H$. **9.** Cu teorema lui Stewart în $\triangle ADE$, cu $BE \in (AC)$. **Pg. 253-254. 1.** a) $\angle FBC = \angle FBA + \angle ABC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$; b) Analog C, D, E sunt coliniare, $\angle C = 60^\circ$ rezultă $\triangle FCE$ echilateral; $FE = 20 \Rightarrow FA + AE$. **2.** Punctele

N, C sunt separate de dreapta AB și $\widehat{AMN} \equiv \widehat{BMC}$. **3.** $A'C \parallel AB$ și $B'C \parallel AB$. **4.** Fie $PQ \parallel BC, P \in AB, Q \in CD$. Aplicăm t.f.a. Mijloacele segmentelor paralele AD, PQ și DC se află pe aceeași dreaptă, mediana din E a triunghiului EBC (justificați!). **5.** $\frac{BC''}{AC} = \frac{AB}{CB'} (= \frac{BM}{MC}) \Rightarrow \Delta C''AB \sim \Delta AB''C \Rightarrow \widehat{AC''B} \equiv \widehat{CAB''} \Rightarrow \widehat{C''AB''} = 180^\circ$. **6.** $FHGI$ este paralelogram, deci HI și FG au același mijloc, punctul E , rezultă $E \in IG$. **7.** Construim $DD' \perp BC, EE' \perp DC$ și fie N intersecția dreptelor DE și BC . Avem $DD' = EE'$ și $DN \equiv NE$, deci $N = M$. **8.** Se aplică teorema „transversalei”. **9.** $\frac{MB}{MA} \cdot A'C + \frac{CQ}{QA} \cdot BA' = \frac{AA'}{PA} \cdot BC$, simplificăm cu $A'C$. **10.** Aplicăm teorema lui Menelaus pentru ΔBEC și transversala $A - P - D$. Rezultă $\frac{AE}{AC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{PB}{PC} = 1; \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}; \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$. **11.** Aplicăm teorema lui Menelaus în $\Delta DA'M$ cu transv. $A, B, N \Rightarrow \frac{UN}{UD} = \frac{BA'}{BD} \cdot \frac{AM}{AA'}$ (A' intersecția dreptelor $AM \cap BC$). Rezultă $\frac{UM}{UD} = \frac{a}{b+c} \cdot \frac{AM}{AA'}$, analog obținem $\frac{VM}{VE} = \frac{a}{b+c} \cdot \frac{AM}{AA'} \Rightarrow \frac{UM}{UD} = \frac{VM}{VE} \Leftrightarrow UV \parallel BC$. **12.** Aplicăm teorema lui Menelaus în ΔABC cu transversala $A_2 - C_1 - B_1$, atunci $\frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$; rezultă $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$ (cu teorema bisectoarei) și analoge. Aplicăm reciproca teoremei lui Menelaus pentru ΔABC și punctele exterioare A_2, B_2, C_2 . **13.** Aplicăm teorema lui Menelaus pentru ΔABC și transversala A', D, E . Rezultă $\frac{A'B}{AC} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DB}{DA}$. Însă $\frac{EA}{EC} = \frac{AH^2}{HC^2}, \frac{DB}{DA} = \frac{HB^2}{HA^2}$ (într-un triunghi dreptunghic raportul proiecțiilor pe ipotenuză este egal cu pătratul raportului catetelor alăturate); b) Aplicăm teorema reciprocă a lui Menelaus pentru punctele exterioare A', B', C' . **14.** Fie T intersecția dreptei cu diagonala (BD) (T este interior!). Aplicăm teorema lui Menelaus în ΔADB și ΔBCD : $\frac{XA}{XB} \cdot \frac{TB}{TD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1; \frac{TD}{TB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} = 1$. Înmulțim aceste egalități. **Pg. 259-260. 1.** $\frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BD}, \frac{FC}{FA} = \frac{DC}{AD}$ (teorema bisectoarei); rezultă $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$. **2.** Notăm $\{D'\} = CB' \cap AB, \{E'\} = BC' \cap AC; \frac{A'B}{A'C} = \frac{AB^2}{AC^2}; \Delta BAE \sim \Delta C'CE$ avem $\frac{EC}{EA} = \frac{AC}{AB}$, analog $\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{AB}$. Aplicăm teorema lui Ceva. **3.** Fie $\{E\} = MN \cap AC \cap PQ$. Aplicând Menelaus de 2 ori obținem $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1, \frac{QA}{QD} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$, rezultă $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$ (1). a) Dacă $NP \parallel BD$, atunci $\frac{MA}{MB} = \frac{QA}{QD}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MQ \parallel BD$; b) Dacă $NP \cap BD = \{F\}$, atunci $\frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{FD}{FB} = 1$ (3). Din (1) și (3) rezultă $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{FB}{FD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$, deci M, Q, F sunt coliniare, adică MQ, BD și NP concurente în F . **4.** a) Dacă A' este mijlocul laturii $[BC]$, atunci $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2C}{A_2B}$ etc.; b) Dacă A_2, B_2, C_2 sunt mijloacele laturilor ΔABC ($A_2 \in BC$) și A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele înălțimilor corespunzătoare laturilor, atunci $\Delta A_1 B_1 C_1 \equiv \Delta A_2 B_2 C_2$, unde S este piciorul înălțimii din A_2 în $\Delta A_2 B_2 C_2$, deci $A_2 A_1$ este izotomică înălțimii $A_2 S$ în $\Delta A_2 B_2 C_2$; se aplică punctul a). **5.** a) $\frac{\sin \widehat{BA_2 A_1}}{\sin \widehat{CA_2 A_1}} = \frac{\sin \widehat{CA_1 A_2}}{\sin \widehat{BA_1 A_2}} \Leftrightarrow (\widehat{BA_2 A_1} = \widehat{CA_1 A_2})$; aplicăm teorema lui Ceva scrisă sub formă trigonometrică; b) se aplică a). **6.** Fie $m(\widehat{MCA}) = x^\circ$; din teorema lui Ceva scrisă sub formă trigonometrică avem $\frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{\sin(70^\circ - x^\circ)}{\sin x^\circ} = 1 \Leftrightarrow \sin(70^\circ - x^\circ) \sin 50^\circ = \sin x^\circ \cdot \cos 10^\circ$ (1). Observăm că $x = 30^\circ$ verifică ($\sin 40^\circ \sin 50^\circ = \sin 30^\circ \cos 10^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 90^\circ) = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$). Însă ecuația (1) este echivalentă cu (2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 30^\circ \sin 70^\circ}{\cos 70^\circ \sin 50^\circ + \cos 10^\circ} > 0, x \in (0, 70^\circ) \subset (0^\circ, 90^\circ)$. Ecuația (2) are soluție unică.

Exerciții și probleme recapitulative

Pg. 261-265. 1. a) Demonstrație prin aducere la același numitor și gruparea termenilor sub forma $x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2 \geq 0$; b) Se aplică inegalitatea $2\sqrt{X \cdot Y} \leq X + Y$ sub forma $\sqrt{a(b+c)} \leq \frac{a+b+c}{2}$; c) Reprezintă *Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS) pentru $(1, 1, \dots, 1)$ și $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. **2.** a) $A = \{(1, 1), (-1, 0)\}$; b) $B = \{0, 1\}$. **3.** a) $\alpha = 2$; b) *Identitatea lui Hermite* are loc pentru $\alpha = 2$. **4.** a) Pasul de inducție folosește identitatea algebrică $\frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1} + (n+1)(n+2)\dots(n+k+1) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)(n+k+2)}{k+1}$; b) Verificare directă prin formula $\sin(A) - \sin(B)$ și inducție trigonometrică; c) Se demonstrează prin evaluarea raportului termenilor succesivi P_n . **5.** Termenul general este $a_n = n^2, \forall n \geq 1$. **6.** Termenul general este $x_n = \frac{n}{n+2}, \forall n \geq 1$. **7.** a) Rezultă direct prin desfacerea parantezelor și reducerea termenilor asemenea din membrul stâng; b) Pentru $x \neq 1, S_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. Pentru $x = 1, S_n = \frac{n(n+1)}{2}$; c) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$; d) $2 - \frac{n+2}{2^n}$. **8.** Din $a_m = m$ și $a_n = n$ rezultă rația $r = 1$ și primul termen $a_1 = 1$, deci $a_p = p, \forall p \geq 1$. **9.** Suma este $\frac{a(a^n - 1)}{a^n(a - 1)}$ pentru $a \neq 1$, respectiv n pentru $a = 1$. **10.** a) $f(x) = -2x - 2$ pentru $x \in (-\infty, -3)$, $f(x) = 4$ pentru $x \in [-3, 1]$, $f(x) = 2x + 2$ pentru $x \in (1, \infty)$; b) $\operatorname{Im}(f) = [4, \infty)$; c) $(f \circ f)(x) = 10, \forall x \in \mathbb{R}$.

- 11.** $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$. **12.** a) $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. **13.** a) $a = 9$ și $f(x) = 2x + 3$; b) identificarea coeficienților unici ai funcției liniare. **14.** a) $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$; b) f este bijectivă și $f^{-1}(x) = f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
- 15.** a) $f(-\infty, 1) = (-\infty, 2)$; $f(1, \infty) = (5, \infty)$; $f^{-1}(1, 2) = (0, 1)$; b) $a \geq 1$; c) $a \leq 0$; d) $f(-\infty, 1) = (-\infty, 2)$. **16.** a) Nu există; b) $a \geq -1, b > 0$ și $c \leq 5 - b$; c) Nu există; d) Nu există valori pentru care funcția să fie inversabilă. **17.** a) $a \leq 3$; b) $a \geq 3$; c) $a = 3$. **18.** a) Ambele sunt funcții strict monotone pe $\mathbb{R}$, deci bijective și inversabile; b) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$. **19.** $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_1+2} < \frac{x_2}{x_2+2}$ deoarece $f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$. Imaginea este $[0, 1)$, deci funcția este mărginită. **20.** a) Sumă de funcții strict crescătoare, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; b) Soluție unică: $x = 2$. **21.** a) Strict descrescătoare pe $(-\infty, 2]$ și strict crescătoare pe $[2, \infty)$; b) Ecuația $(x - 2)^4 = 0$, soluția unică $x = 2$. **22.** a) Ambele ramuri sunt strict crescătoare și $f(0) = 0$; b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$. **23.** a) $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = -f(x)$; b) $x^2 < x^2 + 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 \Rightarrow f(\mathbb{R}) \subset (-1, 1)$; c) Pasul de inducție: $f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{\sqrt{nx^2 + 1}}{\sqrt{\frac{x^2}{nx^2 + 1} + 1}} = \frac{x}{\sqrt{(n+1)x^2 + 1}}$. **24.** a) Economic, reflectă prezența costurilor fixe mari la volume mici și a randamentelor descrescătoare (suprasolicitare) la volume foarte mari; b) Minimum se realizează în vârful parabolei $X_v = -\frac{b}{2a} = \frac{120}{4} = 30$ de tranzacții zilnice. Costul minim este $C(30) = 700$ dolari. **25.** a) $(S \circ h)(t) = 3(4t + 5)^2 = 48t^2 + 120t + 75$; b) $h^{-1}(h) = \frac{h-5}{4}$. Semnificația practică: calculează timpul (în secunde) necesar dronei pentru a ajunge la o anumită altitudine ținând h . **26.** a) Dacă f nu ar fi injectivă, doi sau mai mulți pasageri ar primi același loc în avion; b) Dacă f este surjectivă, înseamnă că toate locurile disponibile din avion sunt ocupate. **27.** a) Funcția radical este strict crescătoare. În realitate, pe măsură ce avionul urcă, pasagerul poate vedea la o distanță din ce în ce mai mare; b) $3,57\sqrt{h} \geq 35,7 \Rightarrow \sqrt{h} \geq 10 \Rightarrow h \geq 100$ metri. **28.** a) Funcția este strict crescătoare pe $[1, \infty)$ deoarece exponentul este pozitiv. Demonstrează efectul compus al randamentului pe termen lung (efectul de bulgăre de zăpadă); b) $10000 \cdot x^{10} \leq 30000 \Rightarrow x \leq \sqrt[10]{3}$. **29.** Condiția de existență a rădăcinilor reale: $\Delta = (2a + 1)^2 - 4(2a^2 + a) = 1 - 4a^2 \geq 0 \Rightarrow a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- a) $x_1 + x_2 = 2a + 1 \in [0, 2]$; b) $x_1 x_2 = 2a^2 + a \in \left[-\frac{1}{8}, 1\right]$; c) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 \in [0, 2]$. **30.** a) $a \in \emptyset$; b) $a \in \left[\frac{\sqrt{37}-1}{2}, \infty\right)$. **31.** Condițiile implică $f(-1) > 0$ și $f(1) < 0$. Deoarece funcția își schimbă semnul, parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte, deci $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. **32.** Coordonatele vârfului sunt $X_v = \frac{m-1}{m+1}$ și $Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{2}{m+1}$; a) $m = 2$; b) $m \in (-1, \infty)$; c) $m \in (-\infty, -1)$; d) $m \in \emptyset$ (nu există soluții). **33.** Se notează $\sqrt{a} + \sqrt{b} = r_1$, $\sqrt{b} + \sqrt{c} = r_2$, $\sqrt{c} + \sqrt{a} = r_3$, cu $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$. Prin scăderi și adunări se obține $\sqrt{a} = \frac{r_1 - r_2 + r_3}{2} \in \mathbb{Q}$ (analog pentru $\sqrt{b}$ și $\sqrt{c}$). **34.** Ordinul rădăcinii trebuie să fie număr natural mai mare sau egal cu 2, deci $6 - x \in \mathbb{N}, 6 - x \geq 2 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Condiția de existență a expresiei impune $x \geq 0$, deci $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. **35.** a) $6 - \sqrt{5} > \sqrt[4]{112}$; b) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} > \sqrt[3]{6 + \sqrt{8}}$; c) $\sqrt[12]{18^4}, \sqrt[12]{15^6}, \sqrt[12]{24^3}, \sqrt[12]{36}$. **36.** a) Se ridică la puterea a treia și se restrânge sub forma $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$; b) Rezultă direct din punctul a) prin substituția $x = \sqrt[3]{a}$ și $y = \sqrt[3]{b}$. **37.** a) Se notează membrul stâng cu S și se ridică la cub folosind $S^3 = 34\sqrt{5} + 3S \Rightarrow S = \sqrt{20}$; b) Funcții strict monotone prin analiza semnelor derivatelor sau ratelor de creștere; c) $n = 3$. **38.** a) Funcția se rescrie sub o formă cu conjugat care arată clar creșterea strictă; b) Monotonia se deduce prin aplicarea succesivă a proprietății de la punctul a). **39.** Suma este egală cu $\frac{n \sin(nx) \cos(x)}{2}$. **40.** Reordonarea termenilor conduce la $(\sin x \sin y - \cos x \cos y)^2 = 0 \Rightarrow \cos(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$. **41.** Maximul expresiei se obține pentru $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, valoarea maximă fiind exact $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$. **42.** Inegalitate trigonometrică geometrică clasică, valabilă în orice triunghi prin trecerea la unghiuri pe jumătate. **43.** Identitate trigonometrică fundamentală pentru unghiurile unui triunghi ($\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z = 1 \Leftrightarrow x + y + z = \pi$). **44.** Se demonstrează prin inducție matematică folosind inegalitatea $|\cos(A - B)| \leq 1$. **45.** Deoarece raportul perioadelor componente $\frac{2\pi}{2\pi/\sqrt{3}} = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (număr irațional), funcțiile au perioade incommensurabile, deci suma lor nu este periodică. **46.** a) Se transformă membrul drept folosind formulele pentru funcții pe jumătate: $\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin(x - x/2)}{\sin(x/2)\sin x} = \frac{1}{\sin x}$; b) Sumă telescopică: $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}(2^n x)$. **47.** a) Se aplică succesiv formula de dublare a unghiului pentru tangentă și cotangentă; b) Se aduce la același numitor și se simplifică utilizând formulele pentru $\cos 2x$ și $\cos 4x$. **48.** Din

teorema medianei și condiția de perpendicularitate $GB^2 + GC^2 = BC^2$, înlocuind segmentele se obține relația cerută. **49.** Reprezintă *Relația lui Euler* în patrulater, demonstrabilă prin vectori sau teoreme succesive ale medianei. **50.** Relația se restrânge în $(\sin B - \sin C \cos A)^2 + \sin^2 C \sin^2 A = 1$, ceea ce conduce direct la $\cos A = 0 \Rightarrow A = 90^\circ$. **51.** Lungimile laturilor sunt 9, 12 și 15. **52.** $MN = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. **53.** Aria triunghiului BMN este $\frac{a \cdot r^3}{2(a^2 + r^2)}$. **54.** $\operatorname{ctg} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$. **55.** Identitate geometrică în poligoane regulate dedusă cu *Teorema lui Ptolemeu* în patrulateralele inscriptibile formate. **56.** Din proprietățile unghiurilor formate de antiparalele și bisectoare rezultă că triunghiurile BMO și CNO sunt isoscele, de unde $BM = MO$ și $CN = NO \Rightarrow BM + CN = MN$. **57.** Locul geometric este un cerc concentric cu cercul înscris. **58.** $AC = 6$. **59.** Aria = $12\sqrt{3}$. **60.** Raportul ariilor este $\frac{\operatorname{Aria}(AMN)}{\operatorname{Aria}(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. **61.** Laturile sunt $b = 12 + 4\sqrt{3}$, $c = 4\sqrt{3} + 4$, $a = 8 + 4\sqrt{3}$; aria = $\frac{bc}{2}$, iar $R = \frac{a}{2}$. **62.** $2S = b^2 \sin B \Rightarrow ab \sin C = b^2 \sin B \Rightarrow a \sin C = b \sin B$. Din teorema sinusurilor rezultă $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ (triunghi isoscel). **63.** Se transformă suma de cosinusuri în produs și se obține o structură ce impune un unghi de 90° . **64.** a) Rezultă direct din formulele $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ și $a + b + c = 2p$; b) Provine din formula $\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ și identitățile geometrice asociate. **65.** a) $\cos B + \cos C = 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} > \sin A$; b) Se demonstrează folosind teorema cosinusului pentru fiecare termen; c) Se folosește exprimarea laturilor și a funcțiilor cotangentă în raport cu razele R și r . **66.** Evaluând succesiv pentru $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$ se obține sistemul $b = a$ și $a = -b \Rightarrow a = b = 0$. **67.** Da, deoarece $\tan x = \tan y \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y}$. Cum $\sin x = \sin y \neq 0$, rezultă $\cos x = \cos y$. **68.** Deoarece $\sin x + \cos x > \frac{\pi}{2}$ pe intervalul dat, diferența argumentelor argumentează inegalitatea geometrică a cadranelor I. **69.** a) Funcția sinus este periodică de perioadă 2π , deci $f(x + 2\pi) = [\sin(x + 2\pi)] = [\sin x] = f(x)$; b) Graficul este o funcție în trepte: $f(x) = 1$ pentru $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $f(x) = -1$ pentru $x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi$, $f(x) = 0$ în rest. **70.** $A = [3, 5\pi, 4, 5\pi]$, $B = [-2\pi, -\pi]$. **71.** a) Rezultă direct; b) i) Se substituie $t = \arcsin x$ în relația dată; ii) Funcția este o parabolă restricționată la un interval de monotonie strictă, deci bijectivă. **72.** a) $x = \arctg(\frac{1}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sau $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$; d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; e) $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; f) $x = 0$ este singura soluție reală; g) Nu are soluții (deoarece $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \neq \frac{2\pi}{3}$; h) $x = 1$; i) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **73.** Deoarece $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin(\sin x) < \sin(1) < \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **74.** Calcul direct. **75.** Evaluare AI: B.1: Funcția f are vârful în $X_v = 2$. Pe intervalul $[2, \infty)$ funcția este strict crescătoare, deci injectivă. Imaginea funcției este $[1, \infty) \neq \mathbb{R}$, deci nu este surjectivă. B.2: AI-ul tinde să greșească omițând domeniul $[2, \infty)$ la injectivitate și confundând codomeniul dat ($\mathbb{R}$) cu imaginea funcției ($[1, \infty)$). **76.** B.1: $P_1 = 500$, rația $q = 1,15$. B.2: $P_{10} = 500 \cdot (1,15)^9 \approx 1759,11$. B.3: $S_{15} = 500 \cdot \frac{1.15^{15} - 1}{0.15} \approx 23789.97$ teraflopi.

Test final

Pg. 267. 1. a) Funcția nu este injectivă pe $\mathbb{R}$ deoarece $f(-1) = 3$ și $f(2) = 3$; b) Pentru $x \geq 1$, derivata sau rata de creștere este strict pozitivă, deci f este strict monotonă pe $[1, \infty)$; c) Ordinea crescătoare este: $\sqrt{2} < 1,5 < \sqrt[3]{3} \Rightarrow f(\sqrt{2}) < f(1,5) < f(\sqrt[3]{3})$. **2.** a) $y_{n+1} - y_n = (x_{n+1} - (n+1)^2) - (x_n - n^2) = (x_{n+1} - x_n) - 2n - 1 = (2n+3) - 2n - 1 = 2 \Rightarrow$ progresie aritmetică cu rația $r = 2$; b) Termenul general este $x_n = n^2 + 2n - 2$. **3.** a) Împărțind ecuația $2 \sin^3 x = \cos x$ la $\cos^3 x$ (pentru $\cos x \neq 0$) se obține exact forma $2 \tan^3 x - \tan^2 x - 1 = 0$; b) Soluția reală în $\mathbb{R}$ este $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **4.** a) Lungimea ipotenuzei $BC = 25$ cm; b) Unghiul AEC este obtuz deoarece E se află în interiorul segmentului determinat de înălțime. Razele sunt $r_{AEC} = \frac{15}{2}$ cm și $R_{AEC} = \frac{25}{2}$ cm.

OVIDIU ȘONTEA
EUGEN RADU
SILVIA MUȘĂTOIU

MATEMATICĂ

**Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS),
filiera teoretică, profilul real, specializarea
matematică-informatică – clasa a IX-a**

